

Modèles cinétiques pour la fusion

Eric Sonnendrücker
IRMA
Université Louis Pasteur
Strasbourg, France

Notes du cours de M2

11 mars 2008

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Les plasmas	5
1.2	La fusion thermonucléaire contrôlée	5
1.3	Le projet ITER	7
1.4	L'équation de Vlasov	7
1.5	Objectifs du cours	8
2	Modélisation des plasmas	9
2.1	Introduction	9
2.2	Une hiérarchie de modèles pour les plasmas	9
2.2.1	Le modèle à N -corps	9
2.2.2	Les modèles cinétiques	10
2.2.3	Les modèles fluides	11
3	Etude théorique du système de Vlasov-Maxwell	17
3.1	Etude de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée	17
3.2	L'équation de Vlasov linéaire	26
3.3	Propriétés de conservation formelles du système de Vlasov-Maxwell	30
4	Méthodes numériques pour Vlasov	35
4.1	Les méthodes particulières	35
4.1.1	Introduction	35
4.1.2	La méthode PIC	36
4.1.3	La méthode δf	42
4.2	La technique du splitting d'opérateurs	42
4.3	Les méthodes semi-Lagrangiennes	44
4.3.1	Interpolation par splines cubiques	44
4.3.2	La méthode semi-Lagrangienne classique	46
4.3.3	La méthode semi-Lagrangienne sans splitting	48
4.3.4	Éléments d'analyse de la méthode semi-Lagrangienne avec splitting	49
4.3.5	La méthode semi-Lagrangiennes conservative	52
4.3.6	Comparaison des schémas d'interpolation	54
4.4	Validation des codes Vlasov-Poisson 1D	56
4.4.1	L'amortissement Landau	57
4.4.2	L'instabilité double faisceau	59

A	Rappels d'analyse complexe et transformée de Laplace	63
A.1	Fonctions analytiques	63
A.2	Intégration sur un contour	63
A.3	Transformée de Laplace	65

Chapitre 1

Introduction

1.1 Les plasmas

Lorsqu'un gaz est porté à une température très élevée ($10^4 K$ ou plus) des électrons quittent l'orbite du noyau de l'atome auquel ils sont rattachés dans le gaz. On obtient alors un mélange globalement neutre des particules chargées, ions et électrons qui est appelé plasma. Les plasmas sont considérés à côté des solides, des liquides et des gaz, comme le quatrième état de la matière.

On peut également obtenir ce qu'on appelle un plasma non neutre, ou un faisceau de particules chargées, en imposant une très forte différence de potentiel de sorte à extraire soit des électrons, soit des ions d'un métal bien choisi. Un tel dispositif se trouve en général dans l'injecteur d'un accélérateur de particules.

Les utilisations des plasmas dans la vie courante sont devenues fréquentes. On peut citer par exemple les tubes à néon ou les écrans plasma. Il y a également un certain nombre d'applications industrielles : amplificateurs dans les satellites de télécommunication, gravure par plasma en micro-électronique, production de rayons X. Il faut également mentionner que même s'il est quasiment absent à l'état naturel sur la Terre, hormis les aurores boréales au pôle, le plasma constitue 99% de la masse de l'univers. Notamment les étoiles sont formées de plasmas et l'énergie qu'elles dégagent provient du processus de fusion de noyaux légers comme les protons.

1.2 La fusion thermonucléaire contrôlée

L'évolution des besoins énergétiques et l'épuisement des combustibles fossiles rendent indispensable de développer de nouvelles sources d'énergie. Selon la formule bien connue $E = mc^2$, on peut produire de l'énergie en réalisant une transformation qui fait disparaître de la masse. Il existe deux grands types de réactions nucléaires ayant cet effet. La réaction de fission qui consiste à générer deux noyaux plus légers à partir du noyau d'un atome lourd et la réaction de fusion qui consiste à créer à partir de deux atomes légers un noyau plus lourd. La fission est utilisée dans les centrales nucléaires actuelles. La fusion contrôlée en est encore au stade de la recherche.

La réaction de fusion la plus accessible consiste à faire fusionner des noyaux de Deutérium et de Tritium pour obtenir un atome d'Hélium et un neutron très énergétique qui servira à produire la chaleur nécessaire à fabriquer de l'électricité (voir fig. 1.1).

Les températures requises pour la fusion thermonucléaire dépassent la centaine de

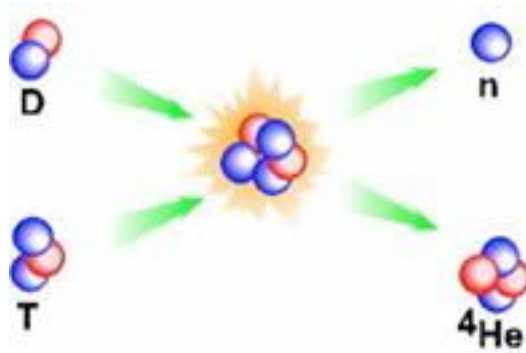


FIG. 1.1 – La réaction de fusion Deuterium-Tritium

millions de degrés. A ces températures les électrons se détachent complètement de leur atome et on obtient un gaz d'électrons et d'ions appelé plasma. Pour pouvoir produire de l'énergie, il est bien entendu nécessaire que le facteur d'amplification Q qui est le rapport de la puissance produite à la puissance extérieure fournie soit supérieur à un. Un bilan énergétique permet d'établir le critère de Lawson qui relie le facteur d'amplification Q au produit nTt_E où n est la densité, T la température et t_E le temps de confinement de l'énergie.

La fusion est à la base de l'énergie des étoiles dans lesquelles un confinement à une densité suffisante est assuré par leur masse. Les travaux de recherche sur la fusion contrôlée sur Terre envisagent deux approches : la fusion par confinement inertiel qui consiste à atteindre une densité très élevée pendant un temps relativement court en tirant sur une capsule de Deuterium et Tritium avec des faisceaux laser ; la fusion par confinement magnétique qui consiste à confiner le plasma grâce à un champ magnétique à une densité moins élevée mais pendant un temps plus long. Cette dernière approche est poursuivie dans le projet ITER dont la construction vient de démarrer à Cadarache dans le sud-est de la France. Le plasma est confiné dans une chambre de forme toroidale appelée tokamak qui pour ITER est représentée sur la figure 1.2.

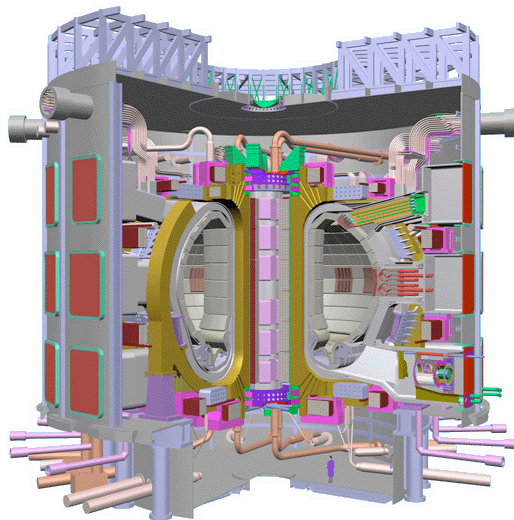


FIG. 1.2 – Vue d'artiste du Tokamak ITER

Notons que deux approches sont poursuivies pour le confinement inertiel, d'une part le confinement utilisant des lasers de très grande puissance pour lequel des installations expérimentales (NIF aux Etats-Unis et LMJ en France) sont en cours de construction pour la validation expérimentale du concept et d'autre par le confinement à l'aide de faisceaux d'ions lourds. On pourra se référer au site de L'Institut Lasers et Plasmas à Bordeaux pour plus d'informations sur la fusion inertielle par aser <http://www.ilp.u-bordeaux1.fr> et au site <http://hif.lbl.gov/tutorial/tutorial.html> pour la fusion par ions lourds.

Le record actuel de puissance de fusion produite en Deuterium-Tritium est de 16 MégaWatts correspondant à un facteur d'amplification $Q = 0,64$ dans le tokamak JET en Angleterre. Il est bien établi que pour obtenir un facteur d'amplification bien supérieur à un, il est nécessaire d'utiliser une machine plus grande, d'où la nécessité de la construction du tokamak ITER, qui contiendra un plasma de volume cinq fois plus grand que celui de JET, pour démontrer la faisabilité d'une centrale basée sur la fusion magnétique. Le facteur d'amplification prévu dans ITER devrait être supérieur à 10.

On pourra se référer au site suivant maintenu par le CEA pour en savoir plus sur la fusion magnétique <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>.

1.3 Le projet ITER

Le projet ITER est un partenariat entre l'Union Européenne, le Japon, la Chine, la Corée du sud, la Russie, les USA et l'Inde dont l'accord international a été signé le 21 novembre 2006 à Paris. Il a pour objectif de démontrer la faisabilité scientifique et technique de la production d'électricité grâce à l'énergie de fusion avec des ressources importantes en combustible et des retombées faibles sur l'environnement.

Le construction du tokamak ITER vient de démarrer à Cadarache dans le sud-est de la France et la phase d'exploitation devrait commencer vers 2016 et durer une vingtaine d'années. Les principaux objectifs d'ITER sont d'une part d'atteindre un facteur d'amplification supérieur à 10 et ainsi de vraiment permettre la production d'énergie, d'autre part de mettre en oeuvre et de tester les technologies nécessaires pour une centrale à fusion et finalement de tester les concepts de production de Tritium à partir de la ceinture de Lithium utilisée pour absorber l'énergie des neutrons.

En cas de succès l'étape suivante appelée DEMO sera de construire un réacteur de fusion électrogène d'étude avant de passer aux centrales à fusion commerciales.

Plus d'informations sont disponibles sur le site <http://www.iter.org>.

1.4 L'équation de Vlasov

Nous nous intéresserons dans ce cours plus particulièrement à un des modèles couramment utilisé pour décrire l'évolution d'un plasma qui est appelé modèle cinétique et qui est basé sur l'équation de Vlasov qui décrit l'évolution de particules chargées dans un champ électromagnétique qui peut être soit auto-consistant, c'est-à-dire engendré par les particules elles-mêmes, soit appliqué de l'extérieur, ou le plus souvent, les deux à la fois. Elle s'écrit pour une espèce de particules non relativistes

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

où m est la masse des particules, q leur charge et $f \equiv f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ représente la densité de particules dans l'espace des phases au point (\mathbf{x}, \mathbf{v}) et au temps t . Elle a la structure d'une équation de transport dans l'espace des phases qui comprend les trois dimensions de l'espace physique et les trois dimensions de l'espace des vitesses (ou des quantités de mouvement dans le cas relativiste). Le champ électromagnétique auto-consistant peut être calculé grâce à un couplage avec l'équation de Maxwell dont les sources qui sont les densités de charge et de courant sont calculées à partir des particules :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

avec

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = q \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

Les plasmas, en particulier les plasmas de fusion, sont des objets extrêmement complexes, mettant en jeu des interactions non linéaires et des échelles de temps et d'espace multiples. Ils sont sujet à de nombreuses instabilités et à des phénomènes de turbulence qui s'opposent à leur confinement. La route vers la fusion thermonucléaire comme source d'énergie passe donc par une compréhension très fine des plasmas à l'aide de modèles adaptés et de simulations numériques basées sur ces modèles.

La résolution numérique du système de Vlasov-Maxwell tri-dimensionnel représente un défi important ne serait-ce qu'à cause de la taille énorme du système venant du fait que l'équation de Vlasov est posée dans l'espace des phases 6D et du couplage non linéaire entre Vlasov et Maxwell. Les sept variables à prendre en compte sont les trois variables donnant la position dans l'espace physique ainsi que les trois variables de vitesse en plus du temps. Pour que le modèle soit utilisable en pratique, il sera donc indispensable d'avoir recours à des modèles réduits qui peuvent être suffisamment précis grâce à certaines spécificités du système étudié : symétries, variables négligeables, etc. En outre les propriétés spécifiques de l'équation de Vlasov vont nécessiter d'utiliser des méthodes numériques conçues spécialement pour ce genre d'équations.

1.5 Objectifs du cours

L'objectif de ce cours va être de vous familiariser avec différentes techniques d'étude théorique de l'équation de Vlasov et de présenter les principales méthodes numériques utilisées pour la simulation. Nous présenterons aussi deux exemples classiques d'utilisation de l'équation de Vlasov : l'amortissement Landau et de l'instabilité double faisceaux qui pourront servir de cas tests pour valider les codes développés.

Chapitre 2

Modélisation des plasmas

2.1 Introduction

Nous nous intéressons à des modèles décrivant l'interaction de particules chargées sous l'effet d'un champ électromagnétique qu'elles génèrent d'une part elles-mêmes ou qui est externe ou, en général la combinaison des deux. Toute particule chargée génère un champ électromagnétique qui même si son intensité décroît avec la distance à la particule a un effet dans tout l'espace. Le modèle complet pour décrire un plasma consiste donc à expliciter le mouvement d'une particule, à l'aide de la loi de Newton, sous l'effet de tous ces champs combinés ainsi que d'éventuels champs externes. Vu la quantité énorme de particules dans un plasma, même pour les moins denses, il est impossible d'utiliser un tel modèle pour simuler numériquement l'évolution d'un plasma. Il faut donc avoir recours à des modèles approchés, soit cinétiques comme l'équation de Vlasov, soit fluides. Même si elles jouent un rôle prédominant dans certaines applications, que nous ne considérerons pas ici, nous négligerons dans ce cours les collisions entre particules qui ont bien entendu une influence sur leur dynamique.

2.2 Une hiérarchie de modèles pour les plasmas

2.2.1 Le modèle à N -corps

Au niveau microscopique, un plasma ou un faisceau de particules est composé d'un certain nombre de particules qui évoluent toutes suivant les lois classiques de la dynamique relativiste ou non. Chaque particule obéit donc à la loi de Newton

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}}{dt} = \sum F_{ext},$$

où m est la masse de la particule, \mathbf{v} sa vitesse $\gamma = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ le facteur de Lorentz (c étant la vitesse de la lumière). Le membre de droite F_{ext} est composé de l'ensemble des forces appliquées à la particule qui dans notre cas se réduisent à la force de Lorentz induite par les champs électromagnétiques extérieurs et générés par les autres particules. Les autres forces comme le poids des particules sont en général négligeables. On a donc

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}).$$

D'autre part, la vitesse d'une particule \mathbf{v}_i est liée à sa position \mathbf{x}_i par

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i.$$

Ainsi, si les positions et vitesses initiales des particules sont connues de même que les champs externes, l'évolution des particules est complètement déterminée par les équations

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad (2.1)$$

$$\frac{d\gamma m \mathbf{v}_i}{dt} = \sum_i q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.2)$$

Remarque 1 *Ce système est Hamiltonien, ce qu'on peut voir le plus facilement dans le cas non relativiste avec un champ magnétique négligeable. Dans ce cas, le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Le hamiltonien s'écrit alors*

$$H = \frac{v_i^2}{2} + \frac{q}{m}\phi.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}_i} = \mathbf{v}_i, \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{q}{m}\nabla\phi = \frac{q}{m}\mathbf{E} \end{aligned}$$

Le système des équations du mouvement d'une particule est également Hamiltonien dans le cas général, mais il faut introduire un jeu de coordonnées particulières appelées coordonnées canoniques pour trouver le Hamiltonien.

En général un plasma est constitué d'un nombre très importants de particules, 10^{10} et plus. Le modèle microscopique décrivant les interactions des particules deux à deux n'est donc pas utilisable dans une simulation numérique car il serait beaucoup trop coûteux. Il faut donc trouver des modèles approchés qui tout en restant suffisamment précis permettent d'atteindre un coût de calcul raisonnable. Il existe en fait une hiérarchie de modèles décrivant l'évolution d'un plasma. Le modèle de base de la hiérarchie qui est le plus précis est le modèle à N corps que nous venons de décrire, ensuite il existe des modèles intermédiaires qu'on appelle cinétiques et qui sont basés sur une description statistique de la distribution de particules dans l'espace des phases et finalement les modèles macroscopiques ou fluides qui assimilent chaque espèce de particules d'un plasma à un fluide caractérisé par sa densité, sa vitesse et son énergie. Les modèles fluides deviennent une bonne approximation lorsque les particules sont proches de l'équilibre thermodynamique et que la distribution de particules est maxwellienne.

2.2.2 Les modèles cinétiques

Dans un modèle *cinétique*, chaque espèce de particules s dans un plasma est caractérisé par sa fonction de distribution $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ qui correspond à une moyenne statistique de la répartition des particules dans l'espace des phases pour un grand nombre de réalisations du système physique considéré. Le produit $f_s d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ est la moyenne du

nombre de particules de l'espèce s , dont la position et la vitesse sont dans une boîte de volume $d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ centrée en (\mathbf{x}, \mathbf{v}) . La fonction de distribution contient beaucoup plus d'informations que celles données par une description fluide car elle inclut des informations sur les répartitions des vitesses des particules.

Une description cinétique d'un plasma est indispensable quand la fonction de distribution est très éloignée de la distribution de Maxwell-Boltzmann (aussi appelée Maxwellienne) qui correspond à l'équilibre thermodynamique du plasma. Sinon une description fluide est suffisante. Dans la limite où les effets collectifs sont dominants sur les collisions binaires entre particules l'équation cinétique que l'on dérive, par des techniques de physique statistique du modèle à N -corps est l'équation de *Vlasov* qui s'écrit

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.3)$$

Cette équation exprime que la fonction de distribution f est conservée le long des trajectoires des particules qui sont déterminées par le champ électromagnétique moyen. Notons $f_{s,0}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ la valeur initiale de la fonction de distribution. L'équation de Vlasov, lorsqu'elle prend en compte le champ électromagnétique auto-consistant généré par les particules est couplées aux équations de Maxwell permettant de calculer ce champ à partir de la distribution des particules :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Les termes sources des équations de Maxwell, la densité de charges $\rho(\mathbf{x}, t)$ et la densité de courant $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ s'expriment à partir des fonctions de distribution des différentes espèces de particules $\int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ à l'aide des relations

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \\ \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= \sum_s q_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Quand les collisions binaires entre particules sont dominantes par rapport aux effets de champ moyen. La fonction de distribution f satisfait l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = Q(f, f),$$

où Q est l'opérateur de collision non linéaire de Boltzmann. Dans certains cas intermédiaires, un opérateur de collision peut être ajouter comme membre de droite à l'équation de Vlasov.

2.2.3 Les modèles fluides

On peut dériver un modèle fluide de plasma en partant de l'équation de Vlasov couplée aux équations de Maxwell où à un modèle approché (comme Poisson) permet-

tant d'obtenir le champ électromagnétique.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (2.4)$$

Remarque 2 Notons que nous avons ajouté un opérateur de collision de Boltzmann $Q(f, f)$ dans le membre de droite. Cet opérateur n'aura pas d'influence sur le résultat car une de ses propriétés fondamentales est que ses trois premiers moments en vitesse s'annulent.

Les quantités macroscopiques sont définies à partir des trois premiers moments en vitesse de la fonction de distribution $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$

- La densité est définie par

$$n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v},$$

- La vitesse moyenne $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ vérifie

$$n(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v} d\mathbf{v},$$

- Le tenseur de pression $\mathbb{P}(\mathbf{x}, t)$ est défini par

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) = m \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{v}.$$

- La pression scalaire est le tiers de la trace du tenseur de pression

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{3} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2 d\mathbf{v},$$

- On définit la température $T(\mathbf{x}, t)$ à partir de la pression par

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{p(\mathbf{x}, t)}{n(\mathbf{x}, t)}.$$

- Le flux d'énergie est un vecteur défini par

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \frac{m}{2} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)\mathbf{v}^2\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}.$$

On obtient des équations reliant ces quantités macroscopiques en prenant les premiers moments de l'équation de Vlasov. Remarquons d'abord que comme \mathbf{v} est une variable indépendante de \mathbf{x} , on a $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f = \nabla_{\mathbf{x}}(f\mathbf{v})$. De plus, comme $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ ne dépend pas de \mathbf{v} et que la i^{eme} composante de

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} v_2 B_3(\mathbf{x}, t) - v_3 B_2(\mathbf{x}, t) \\ v_3 B_1(\mathbf{x}, t) - v_1 B_3(\mathbf{x}, t) \\ v_1 B_2(\mathbf{x}, t) - v_2 B_1(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$$

est indépendante de v_i , on a également

$$(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (f(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t))).$$

En intégrant (2.4) par rapport à la vitesse \mathbf{v} on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \nabla_x \cdot \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} + 0 = 0.$$

D'où, comme $n(\mathbf{x}, t)u(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}$, on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n\mathbf{u}) = 0. \quad (2.5)$$

En multipliant, l'équation de Vlasov par $m\mathbf{v}$ et en intégrant par rapport à \mathbf{v} , on obtient

$$\begin{aligned} m \frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} + m \nabla_x \cdot \int (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ - q(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) = 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\int \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} + n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}.$$

D'où

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n\mathbf{u}) + m \nabla \cdot (n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbb{P} = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.6)$$

Finalement, en multipliant l'équation de Vlasov par $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ et en intégrant par rapport à \mathbf{v} , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \frac{\partial}{\partial t} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v}^2 d\mathbf{v} + \frac{1}{2}m \nabla_x \cdot \int (\mathbf{v}^2 \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \\ + \frac{1}{2}q \int \mathbf{v}^2 \nabla_v \cdot [(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] d\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne alors

$$\int \mathbf{v}^2 \nabla_v \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{v} \cdot [(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)] d\mathbf{v}.$$

Ensuite, en développant $\int f(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v}$ on obtient

$$\int f(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v} = \int f\mathbf{v}^2 d\mathbf{v} - 2\mathbf{u} \cdot \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} + \mathbf{u}^2 \int f d\mathbf{v} = \int f\mathbf{v}^2 d\mathbf{v} - n\mathbf{u}^2,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}m n \mathbf{u}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{E} \cdot (q n \mathbf{u}). \quad (2.7)$$

On pourrait continuer à calculer des moments de f , mais on voit que chaque nouvelle expression fait apparaître un moment d'ordre supérieur. On a donc besoin d'informations supplémentaires pour avoir autant d'inconnues que d'équations afin de pouvoir résoudre ces équations. Cette information supplémentaire s'appelle *relation de fermeture*.

Dans notre cas, on va utiliser comme relation de fermeture la propriété physique qu'à l'équilibre thermodynamique la fonction de distribution tend vers une fonction

de distribution Maxwellienne qu'on va noter $f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ et qu'on peut exprimer sous certaines hypothèses en fonction des grandeurs $n(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ et $T(\mathbf{x}, t)$ qui sont les densité, vitesses moyenne et température du fluide :

$$f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{n(\mathbf{x}, t)}{(2\pi T(\mathbf{x}, t)/m)^{3/2}} e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))^2}{2T(\mathbf{x}, t)/m}}.$$

Nous introduisons également une grandeur classique en physique des plasmas qui est la vitesse thermique de l'espèce de particules considérée

$$v_{th} = \sqrt{\frac{T}{m}}.$$

On peut vérifier facilement que les trois premiers moments de la fonction de distribution f_M sont consistants avec la définition des grandeurs macroscopiques n , \mathbf{u} et T définies pour une fonction de distribution quelconque. On a en effet facilement en faisant à chaque fois le changement de variable $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{v_{th}}$

$$\begin{aligned} \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} &= n(\mathbf{x}, t), \\ \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v} &= n(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \int f_M(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v} &= 3n(\mathbf{x}, t) T(\mathbf{x}, t)/m. \end{aligned}$$

D'autre part en remplaçant f par f_M dans les définitions des tenseurs de pression \mathbb{P} et de flux d'énergie \mathbf{Q} , on peut exprimer ces termes également en fonction de n , \mathbf{u} et T ce qui nous permet d'obtenir un système fermé en ces trois inconnues contrairement au cas d'une fonction de distribution f quelconque. En effet, remarquons d'abord que

$$\int w_i w_j e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \int e^{-\mathbf{w}^2} d\mathbf{w} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On a ensuite que le tenseur de pression associé à la Maxwellienne vaut

$$\mathbb{P} = m \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \int e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T/m}} (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{u}) d\mathbf{v},$$

et donc grâce au calcul précédent, les termes non diagonaux de \mathbb{P} sont nuls et en faisant le changement de variable $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}-\mathbf{u}}{v_{th}}$, on obtient pour les termes diagonaux

$$\mathbb{P} = m \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \frac{T}{m} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} w_i^2 d\mathbf{w} = nT.$$

Il en résulte que $\mathbb{P} = nT\mathbb{I} = p\mathbb{I}$ où \mathbb{I} est la matrice identité 3×3 . Il reste maintenant à calculer de la même manière \mathbf{Q} en fonction de n , \mathbf{u} et T pour la Maxwellienne avec le même changement de variables, ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi T/m)^{3/2}} \int e^{-\frac{(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T/m}} \mathbf{v}^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}, \\ &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} (v_{th} \mathbf{w} + \mathbf{u})^2 (v_{th} \mathbf{w} + \mathbf{u}) d\mathbf{w}, \\ &= \frac{m}{2} \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-\frac{\mathbf{w}^2}{2}} (v_{th}^2 \mathbf{w}^2 \mathbf{u} + 2v_{th}^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \mathbf{w} + \mathbf{u}^2 \mathbf{u}) d\mathbf{w}, \\ &= \frac{m}{2} n \left(3 \frac{T}{m} \mathbf{u} + 2 \frac{T}{m} \mathbf{u} + \mathbf{u}^2 \mathbf{u} \right), \end{aligned}$$

car les moments impairs en \mathbf{w} s'annulent. Il vient donc finalement

$$\mathbf{Q} = \frac{5}{2}nT\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u} = \frac{5}{2}p\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u}.$$

Finalement en reportant ces expressions de \mathbb{P} et de \mathbf{Q} dans (2.5)-(2.6)-(2.7) on obtient les équations fluides pour une espèce de particules du plasma :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_x \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (2.8)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{u}) + m\nabla \cdot (n\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = qn(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}mn\mathbf{u}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{5}{2}p\mathbf{u} + \frac{m}{2}n\mathbf{u}^2\mathbf{u} \right) = \mathbf{E} \cdot (qn\mathbf{u}), \quad (2.10)$$

qui correspond en dimension 3 à un système de 5 équations scalaires avec 5 inconnues scalaires qui sont la densité n , les trois composantes de la vitesse moyenne \mathbf{u} et la pression scalaire p . Ces équations doivent bien entendu être couplées aux équations de Maxwell pour le calcul du champ électromagnétique, avec s'il n'y a qu'une espèce de particules $\rho = qn$ et $\mathbf{J} = qn\mathbf{u}$. Notons également qu'une approximation parfois utilisée en physique des plasmas pour encore simplifier ces équations est celle du plasma froid qui correspond à $T = 0$ et donc $p = 0$. On n'a dans ce cas plus besoin que des deux premières équations.

Chapitre 3

Etude théorique du système de Vlasov-Maxwell

3.1 Etude de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée

Dans un certain nombre de situations physiques, on s'intéresse à de petites perturbations d'un plasma à l'équilibre. Considérons notamment les équations de Vlasov-Poisson 1D au voisinage d'un état d'équilibre donné par une fonction de distribution $f_0(x, v)$ pour les électrons et un fond d'ions neutralisant tels que le champ électrique associé soit nul. On se place sur un domaine périodique de période $L = 2\pi/k_0$ en x et sur \mathbb{R} tout entier en v .

En notant $-e$ la charge d'un électron et m sa masse. La fonction de distribution à l'équilibre vérifie les équations de Vlasov-Poisson

$$\frac{\partial f^0}{\partial t} + v \frac{\partial f^0}{\partial x} - \frac{e}{m} E^0(x) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{dE^0}{dx} = \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(x, v) dv) \quad (3.2)$$

avec la condition initiale $f^0(x, v, t) = f_0(x, v)$ et où $n_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^0(x, v) dv$ est la densité constante du fond d'ions neutralisant. Si f^0 est une solution stationnaire $\frac{\partial f^0}{\partial t} = 0$ et si de plus $E^0 = 0$, il reste dans l'équation de Vlasov $v \frac{\partial f^0}{\partial x} = 0$ pour tout v , ce qui entraîne que $f^0(x, v, t) = f_0(x, v) \equiv f^0(v)$. Toute fonction f^0 dépendant uniquement de v peut donc être une solution d'équilibre. Une solution stable qui correspond à l'équilibre thermodynamique du plasma est le cas où f^0 est une Maxwellienne :

$$f^0(v) = \frac{n_0}{2\pi v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

où l'on note $v_{th} = \frac{T}{m}$ la vitesse thermique électronique.

On peut maintenant linéariser les équations de Vlasov-Poisson autour de cet état d'équilibre en développant la fonction de distribution et le champ électrique sous la forme de la solution à l'équilibre plus une petite perturbation : $f(x, v, t) = f^0(x, v) + \epsilon f^1(x, v, t)$, $E(x, t) = E^0(x) + \epsilon E^1(x, t)$.

La fonction de distribution f vérifie les équations de Vlasov-Poisson

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E(x) \frac{\partial f}{\partial v} &= 0, \\ \frac{dE}{dx} &= \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv),\end{aligned}$$

avec une condition initiale que l'on suppose de la forme $f_0(x, v) = f^0(v) + \epsilon f_0^1(x, v)$. En reportant le développement de f et de E dans cette équation

$$\begin{aligned}\frac{\partial f^1}{\partial t} + v \frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{m} E(x) \left(\frac{\partial f^0}{\partial v} + \epsilon \frac{\partial f^1}{\partial v} \right) &= 0, \\ \frac{dE^1}{dx} &= \frac{e}{m} (n_0 - \int_{-\infty}^{+\infty} (f^0(v) + \epsilon f^1(x, v, t)) dv).\end{aligned}$$

En négligeant les termes en ϵ^2 , on obtient, sachant que $E^0 = 0$

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + v \frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{m} E^1(x) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{dE^1}{dx} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f^1(x, v, t) dv, \quad (3.4)$$

avec la condition initiale $f^1(x, v, 0) = f_0^1(x, v)$. Comme f^0 est une fonction connue de v , cette équation, dont les inconnues sont f^1 et E^1 , est linéaire et fait apparaître des dérivées partielles en x et en t , on peut donc essayer d'en calculer une solution analytique en utilisant, comme f^1 est périodique en x , une série de Fourier en x et une transformée de Laplace en t . Pour simplifier les notations nous omettrons les indices 1 dans la suite de cette section. Des rappels d'analyse complexe permettant de comprendre les calculs ci-dessous et la définition de la transformée de Laplace sont données dans l'appendice A.

Nous définissons la série de Fourier d'une fonction g continue et périodique de période L par

$$g(x) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(k) e^{ikx} \quad \text{avec } \hat{g}(k) = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ikx} dx \text{ et } k = \frac{2\pi}{L} k'.$$

Ainsi en multipliant (3.3) et (3.4) par e^{-ikx} et en intégrant entre 0 et L , on obtient les relations suivantes entre les coefficients de Fourier

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(k, v, t) + ikv \hat{f}(k, v, t) - \frac{e}{m} \hat{E}(k, t) \frac{\partial f^0}{\partial v} = 0, \quad (3.5)$$

$$ik \hat{E}(k, t) = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k, v, t) dv. \quad (3.6)$$

On a de plus pour la condition initiale $\hat{f}(k, v, 0) = \hat{f}_{in}(k, v)$. On procède maintenant à la transformée de Laplace en t de ces équations. Pour pouvoir comparer nos résultats à ceux des ouvrages classiques de physique des plasmas, nous adoptons la convention des physiciens de prendre $s = -i\omega$ par rapport à nos formules données dans l'appendice A.3. La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ s'écrit alors

$$\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (3.7)$$

et la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \int_{-\infty+iu}^{+\infty+iu} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.8)$$

En multipliant par $e^{i\omega t}$ et en intégrant par rapport à t entre 0 et $+\infty$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(k, v, t) e^{i\omega t} dt &= [\hat{f}(k, v, t) e^{i\omega t}]_0^{+\infty} - i\omega \int_0^{+\infty} \hat{f}(k, v, t) e^{i\omega t} dt \\ &= -\hat{f}(k, v, 0) - i\omega \tilde{f}(k, v, \omega), \end{aligned}$$

où l'on note $\tilde{f}(k, v, \omega)$ la transformée de Laplace de $\hat{f}(k, v, t)$. On obtient alors

$$(-i\omega + ikv) \tilde{f}(k, v, \omega) - \frac{e}{m} \tilde{E}(k, \omega) \frac{\partial f^0}{\partial v} = \hat{f}_0(k, v), \quad (3.9)$$

et la transformée de Laplace de l'équation de Poisson donne

$$\tilde{E} = \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k, v, \omega) dv. \quad (3.10)$$

En reportant (3.9) dans (3.10) on obtient

$$\tilde{E} = \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0 + \frac{e}{m} \tilde{E} \frac{\partial f^0}{\partial v}}{-i\omega + ikv} dv = \frac{ie^2}{k\epsilon_0 m} \tilde{E} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{-i\omega + ikv} dv + \frac{ie}{k\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{-i\omega + ikv} dv.$$

Posons

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k^2 \epsilon_0 m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv, \quad (3.11)$$

$$N(k, \omega) = \frac{e}{k^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0}{v - \frac{\omega}{k}} dv. \quad (3.12)$$

On obtient alors l'expression suivante pour \tilde{E} :

$$\tilde{E}(k, \omega) = \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}.$$

Les conditions d'application du théorème 7 d'inversion de la transformée de Laplace sont réalisées si la fonction \tilde{E} est analytique en dehors de points isolés qui sont les pôles de $N(k, \omega)$ et les zéros de $D(k, \omega)$. Il existe alors une bande $\Im(s) > R$ au dessus de ces points isolés sur laquelle \tilde{E} est analytique.

Nous allons commencer pour déterminer une expression plus explicite de $D(k, \omega)$ et $N(k, \omega)$. Les deux termes sont bien définis pour $\Im(\omega) > 0$ et sont analytiques dans ce cas à condition que f^0 et f_0 le soient. Pour pouvoir traiter également le cas de $\Im(\omega) \leq 0$ qui existe physiquement et qui correspond à l'amortissement de la perturbation initiale, nous allons définir un prolongement analytique de ces fonctions pour $\Im(\omega) \leq 0$. Considérons donc une fonction de la forme

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(v)}{v - \frac{\omega}{k}} dv.$$

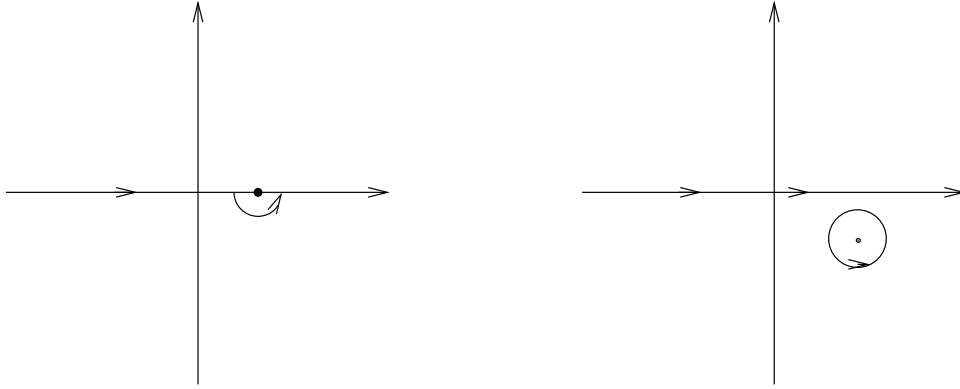


FIG. 3.1 – Contour pour pôle sur l’axe réel à gauche et pour pôle en dessous de l’axe réel à droite

Supposons $g \in L^1(\mathbb{C})$. Alors la fonction $G(\omega)$ est analytique pour $\Im(\omega) > 0$. Soit γ l’axe réel paramétré par $v \in [-\infty, +\infty]$. Alors on a

$$G(\omega) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - \frac{\omega}{k}}.$$

Pour $\Im(\omega) > 0$ l’intégrale ne présente pas de singularité et donc $G(\omega)$ est analytique. Comme g est intégrable, l’intégrale sur deux contours différents allant vers l’infini de chaque coté est identique s’il n’y a pas de pôle entre les deux contours. Ainsi pour $\Im(\omega) > 0$, on peut définir $G(\omega)$ en utilisant à la place de l’axe réel n’importe quel droite en dessous de l’axe réel sans changer sa valeur. Il en résulte que pour définir un prolongement analytique de $G(\omega)$ pour $\Im(\omega) \leq 0$, il suffit de définir $G(\omega)$ comme une intégrale sur une droite parallèle à l’axe réel qui passe en dessous du pôle ou sur n’importe quelle déformation de cette droite choisie pour faciliter le calcul de l’intégrale. Les contours choisis en pratique sont représentés sur la figure 3.1. Ainsi, en prenant le contour γ adapté, i.e. la droite réelle pour $\Im(\omega) > 0$, le contour sur la gauche de la figure 3.1 pour $\Im(\omega) = 0$ et le contour sur la droite de la figure 3.1 pour $\Im(\omega) < 0$, la fonction

$$G(\omega) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z - \frac{\omega}{k}}$$

est analytique dans le plan complexe. On peut donc de la sorte définir un prolongement analytique de $D(s, k)$ et de $N(s, k)$ sur tout le plan complexe si nécessaire et exprimer leurs valeurs. En général les fonctions f^0 et f_0 sont des combinaisons linéaires de Maxwelliennes en v . Les fonctions g Maxwelliennes en v jouent donc un rôle essentiel dans le calcul des relations de dispersion. Fried et Conte [17] ont par conséquent introduit la fonction de dispersion d’un plasma noté Z et définie par

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\gamma} \frac{e^{-z^2}}{z - \zeta}, \quad (3.13)$$

où γ est n’importe quel contour ouvert parallèle à l’axe réel à l’infini et passant en dessous du pôle $z = \zeta$. On pourra également consulter le livre de Stix [23] pour une dérivation physique de diverses relations de dispersion dont celle-ci dans les plasmas.

Proposition 1 *La fonction de dispersion du plasma Z définie par (3.13) est indépendante du contour γ de la forme $t \mapsto t + iu$ pour $|t|$ suffisamment grand et passant en dessous du pôle $z = \zeta$. On a de plus les expressions suivantes pour Z :*

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du + i\pi e^{-\zeta^2} \right], \quad (3.14)$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2} [i - \text{erfi}(\zeta)], \quad (3.15)$$

où $\text{erfi}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{t^2} dt$ est la fonction d'erreur complexe. On peut également exprimer les dérivées de Z en fonction de Z avec notamment les relations suivantes :

$$Z'(\zeta) = -2(1 + \zeta Z(\zeta)), \quad (3.16)$$

$$Z''(\zeta) = 4\zeta - 2(1 - 2\zeta^2)Z(\zeta). \quad (3.17)$$

Notons que pour $b \in \mathbb{R}$

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-b} du = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{b-\delta} \frac{g(u)}{u-b} du + \int_{b+\delta}^{+\infty} \frac{g(u)}{u-b} du \right]$$

désigne la valeur principale de Cauchy.

Remarque 3 *La fonction d'erreur complexe erfi est une fonction spéciale classique disponible dans les logiciels de calcul formel ou numérique.*

Preuve. Pour démontrer que l'intégrale est indépendante du contour de la forme donnée choisie, il suffit de prendre deux contours différents de cette forme. Ces contours sont parallèles à l'axe réel en dehors de $[-A, A]$ pour A assez grand. On peut donc les relier en $-A$ et A par des segments de droite parallèles à l'axe imaginaire de sorte à obtenir un contour fermé. Comme les deux contours choisis sont en dessous du pôle et donc le contour fermé construit ne contient pas de pôle de sorte que l'intégrale sur ce contour est nulle. De plus, vu la forme de la fonction intégrée, il est clair que les intégrales sur les segments de droite parallèles à l'axe imaginaire tendent vers 0 quand $A \rightarrow +\infty$. Il en résulte que l'intégrale sur les deux contours initiaux est la même. Pour obtenir l'expression (3.14), on choisit un contour passant par le pôle ζ et le contournant par le bas comme représenté sur le schéma de gauche de la figure 3.1. Ce contour peut être paramétré par $\gamma_1 : t \mapsto t + i\Im(\zeta)$ pour $|t - \Re(\zeta)| \geq \delta$ et $\gamma_2 : \theta \mapsto \zeta - \delta e^{i\theta}$ pour $\theta \in [0, \pi]$. Et on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-z^2}}{z-\zeta} &= \int_{-\infty}^{\Re(\zeta)-\delta} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t+i\Im(\zeta)-\zeta} dt + \int_{\Re(\zeta)+\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t+i\Im(\zeta)-\zeta} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\Re(\zeta)-\delta} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t-\Re(\zeta)} dt + \int_{\Re(\zeta)+\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(t+i\Im(\zeta))^2}}{t-\Re(\zeta)} dt, \\ &= \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $u = t - \Re(\zeta)$. Et donc en faisant tendre δ vers 0, on a

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{-z^2}}{z-\zeta} \rightarrow \text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du.$$

D'autre part

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{-z^2}}{z - \zeta} = \int_0^\pi \frac{e^{-(\zeta - \delta e^{i\theta})^2}}{-\delta e^{i\theta}} (-i\delta e^{i\theta}) d\theta \rightarrow i\pi e^{-\zeta^2} \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

En sommant les limites des intégrales sur les deux contours, on obtient l'expression (3.14).

On a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-(u+\zeta)^2}}{u} du &= e^{-\zeta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-2\zeta u} \frac{du}{u}, \\ &= e^{-\zeta^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} (e^{-2\zeta u} - e^{2\zeta u}) \frac{du}{u}, \\ &= -2e^{-\zeta^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\text{sh}(2\zeta u)}{u} du. \end{aligned}$$

Notons que comme $\text{sh}(2\zeta u) \sim 2\zeta u$ au voisinage de $u = 0$, il n'y a pas de singularité et l'intégrale est donc égale à sa valeur principale de Cauchy. Posons maintenant

$$y(\zeta) = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\text{sh}(2\zeta u)}{u} du.$$

Alors

$$y'(\zeta) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \text{ch}(2\zeta u) du,$$

et en dérivant puis en intégrant par parties

$$y''(\zeta) = 4 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u \text{sh}(2\zeta u) du = 4\zeta \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \text{ch}(2\zeta u) du = 2\zeta y'(\zeta).$$

Il en résulte que $y'(\zeta) = y'(0)e^{\zeta^2}$. Or $y'(0) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$. D'où $y'(\zeta) = \sqrt{\pi}e^{\zeta^2}$. Ensuite, comme $y(0) = 0$, on a

$$y(\zeta) = \sqrt{\pi} \int_0^\zeta e^{x^2} dx = \frac{\pi}{2} \text{erfi}(\zeta),$$

en utilisant la définition $\text{erfi}(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{x^2} dx$. On en déduit alors l'expression (3.15) à partir de (3.14).

On obtient l'expression de Z' en dérivant (3.15) :

$$\begin{aligned} Z'(\zeta) &= -2\zeta Z(\zeta) - \text{erfi}'(\zeta) \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2}, \\ &= -2\zeta Z(\zeta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\zeta^2} \sqrt{\pi} e^{-\zeta^2}, \\ &= -2\zeta Z(\zeta) - 2. \end{aligned}$$

Puis en redérivant on obtient

$$\begin{aligned} Z''(\zeta) &= -2(Z(\zeta) + \zeta Z'(\zeta)), \\ &= -2(Z(\zeta) - 2\zeta - 2\zeta^2 Z(\zeta)), \\ &= 4\zeta - 2(1 - 2\zeta^2)Z(\zeta). \end{aligned}$$

■

On peut maintenant poursuivre le calcul de $D(k, \omega)$. On a

$$f^0(v) = \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

et donc

$$\frac{\partial f^0}{\partial v}(v) = -\frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \frac{v}{v_{th}^2} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}.$$

En reportant cette expression dans l'expression de $D(k, \omega)$ (3.11) et en introduisant la fréquence plasma $\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}$, on obtient

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}}, \\ &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(v - \frac{\omega}{k}) e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv + \frac{\omega}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}} dv = 1.$$

Ensuite en faisant le changement de variable $u = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$, il vient

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u - \frac{\omega}{k\sqrt{2}v_{th}}} du \right].$$

En utilisant l'expression de la fonction de dispersion du plasma Z cette relation s'écrit

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k} Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right) \right], \quad (3.18)$$

ce qui devient avec l'expression de Z donnée par (3.15)

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 + \frac{\sqrt{\pi}\omega}{\sqrt{2}v_{th}k} e^{-\frac{\omega^2}{2v_{th}^2 k^2}} \left(i - \operatorname{erfi}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right) \right) \right], \quad (3.19)$$

et en utilisant l'expression de Z' en fonction de Z (3.16) on obtient la forme la plus simple suivante

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} Z'\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}\right). \quad (3.20)$$

Ces calculs ont été fait sur l'expression initiale valable pour $\Im(\omega) > 0$, mais en faisant le prolongement analytique comme nous l'avons vu, on obtient les mêmes expressions en choisissant le contour d'intégration adéquat pour ω quelconque.

Nous pouvons maintenant passer de la même manière au calcul de $N(k, \omega)$ en supposant que

$$f_0^1(x, v) = g(x) \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}},$$

où g est une fonction donnée en général de la forme $g(x) = \cos(kx)$. On a alors

$$\hat{f}_0^1(k, v) = \hat{g}(k) \frac{n_0}{\sqrt{2\pi}v_{th}} e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}.$$

Puis

$$\begin{aligned} N(k, \omega) &= -\frac{e}{k^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0^1}{v - \frac{\omega}{k}} dv, \\ &= -g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{v^2}{2v_{th}^2}}}{v - \frac{\omega}{k}} dv. \end{aligned}$$

On fait alors le changement de variables $u = \frac{v}{\sqrt{2}v_{th}}$ pour obtenir

$$N(k, \omega) = -\hat{g}(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u - \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{th}k}} du.$$

On reconnaît la fonction de dispersion des plasmas Z et on a donc

$$N(k, \omega) = -\hat{g}(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}v_{th}} Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2\pi}v_{th}k}\right). \quad (3.21)$$

Finalement à partir des expressions (3.20) et (3.21), on obtient une formule explicite pour la transformée de Laplace du champ électrique \tilde{E} . On en déduit ensuite le champ électrique à l'aide des formules de transformée de Fourier et de Laplace inverse. En commençant par la transformée de Laplace inverse (A.4), on a

$$\hat{E}(k, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty+iu}^{+\infty+iu} \tilde{E}(k, \omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

On peut calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus en fermant le contour par un demi-cercle vers le bas du plan complexe de rayon tendant vers l'infini. En supposant que $\tilde{E}(k, \omega)$ est analytique en dehors d'un nombre fini de pôles et que l'intégrale sur le demi-cercle tend vers 0 quand le rayon tend vers l'infini, on aura simplement

$$\hat{E}(k, t) = \sum_j \text{Res}_{\omega=\omega_j}(\tilde{E}(k, \omega)) e^{-i\omega_j t},$$

où la somme est effectuée sur les pôles.

Pour obtenir une valeur explicite de cette expression du champ électrique, il ne reste plus qu'à calculer numériquement pour k fixé les valeurs de ω pour lesquelles $D(k, \omega)$ s'annule. Dans Maple à l'aide de la commande *fsolve* on obtient les valeurs suivantes de ω pour différents k :

k	ω
0,5	1,4156 - 0,1533i
0,4	1,2850 - 0,0661i
0,3	1,1598 - 0,0126i
0,2	1,0640 - 5,510 × 10 ⁻⁵ i

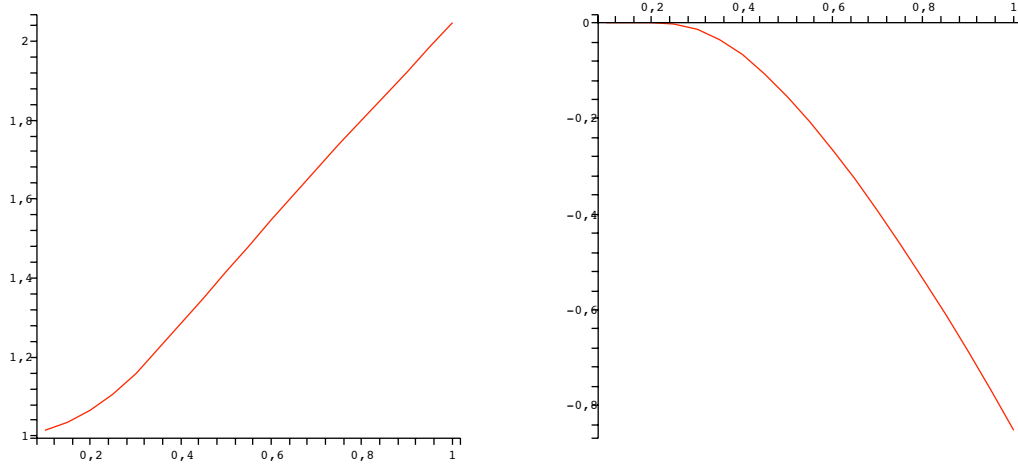


FIG. 3.2 – Partie réelle (à gauche) et imaginaire (à droite) des zéros ω de $D(k, \omega)$ en fonction de k .

Les ondes qui intéressent les physiciens dans une distribution d'électrons ont en général une vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k} \gg v_{th}$ ce qui correspond à la limite $\frac{\omega}{kv_{th}} \rightarrow +\infty$. On peut alors simplifier la relation de dispersion en faisant un développement limité de la fonction $erfi$ au voisinage de $+\infty$. Pour ceci on va commencer par chercher un développement limité de sa dérivée $erfi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{x^2}$. Considérons la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^5} \right).$$

On a alors

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{x^2} \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x^4} + \frac{3}{2x^4} - \frac{15}{4x^6} \right).$$

Il en résulte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$erfi'(x) = g'(x) + O\left(\frac{e^{x^2}}{x^6}\right),$$

puis comme $erfi(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, la constante apparaissant dans l'intégration est négligeable et il vient

$$erfi(x) = g(x) + O\left(\frac{e^{x^2}}{x^7}\right).$$

Finalement en remplaçant $erfi$ par cette expression dans l'expression de $D(k, \omega)$, on obtient

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} \left[1 - \left(1 + \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2} + \frac{3k^4 v_{th}^4}{\omega^4} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{k v_{th}} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{th}^2}} \right] \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p^2 \omega}{k^3 v_{th}^3} e^{-\frac{\omega^2}{2k^2 v_{th}^2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette expression correspond à l'expression classique que l'on trouve dans les livres d'introduction à la physique des plasmas comme par exemple [12] et qui est en général dérivée en faisant l'hypothèse $\frac{\omega}{k} \gg v_{th}$ pour calculer l'intégrale

$$\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\partial f^0}{\partial v}}{v - \frac{\omega}{k}} dv,$$

et en faisant un développement limité du dénominateur.

A partir de l'expression (3.22) de D , on peut obtenir une expression explicite des parties réelle ω_r et imaginaire ω_i de ω en supposant $\omega_i \ll \omega_r$. On a alors au premier ordre $D_r(\omega_r, k) = 0$ et

$$\omega_i = -\frac{D_i(\omega_r, k)}{\frac{\partial D_r}{\partial \omega_r}(\omega_r, k)}.$$

La relation de dispersion que nous avons dérivée dans cette section peut également être utilisée pour d'autres distributions d'équilibre. Un cas utile en pratique est la superposition de plusieurs maxwelliennes centrées en différentes vitesses et avec éventuellement des vitesses thermiques différentes. On a dans ce cas

$$f^0(v) = \frac{n_0}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_{th_i}} e^{-\frac{(v-v_i)^2}{2v_{th_i}^2}},$$

et la relation de dispersion s'écrit

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{Nk^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_{th_i}^2} \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{kv_{th_i}} - \frac{v_i}{v_{th_i}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} - v_i)^2}{2v_{th_i}^2}} \left(i - \text{erfi} \left(\frac{\frac{\omega}{k} - v_i}{\sqrt{2}v_{th_i}} \right) \right) \right]. \quad (3.23)$$

3.2 L'équation de Vlasov linéaire

On parle d'équation de Vlasov linéaire lorsque les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont supposés connus indépendamment de f . En normalisant les constantes à un l'équation de Vlasov s'écrit dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.24)$$

où $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ sont des champs donnés. En posant

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

l'équation (3.24) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_{(x,v)} f = 0. \quad (3.25)$$

C'est donc une équation d'advection linéaire dans l'espace des phases. En outre

$$\begin{aligned} \nabla_{(x,v)} \cdot \mathbf{A} &= \nabla_x \cdot \mathbf{v} + \nabla_v \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial v_1} (E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) + \frac{\partial}{\partial v_2} (E_2 + v_3 B_1 - v_1 B_3) + \frac{\partial}{\partial v_3} (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'équation de Vlasov peut donc également s'écrire sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{(x,v)} \cdot (\mathbf{A}f) = 0, \quad (3.26)$$

car $\nabla_{(x,v)} \cdot (\mathbf{A}f) = \mathbf{A} \cdot \nabla_{(x,v)} f + f \nabla_{(x,v)} \cdot \mathbf{A}$.

Remarque 4 Ces propriétés ne dépendent pas du fait que \mathbf{E} et \mathbf{B} soient donnés indépendamment de f et sont donc également valables dans le cas non linéaire.

On est donc ramené à une équation d'advection linéaire de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla f = 0, \quad (3.27)$$

avec $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{A} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Considérons maintenant le système différentiel

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}, \quad (3.29)$$

qui est naturellement associé à l'équation d'advection (3.27).

Définition 1 On appelle les solutions de (3.28) les caractéristiques de l'équation d'advection linéaire (3.27). On note $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ la solution de (3.28)- (3.29).

Rappelons le théorème classique de la théorie des équations différentielles qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (3.28)- (3.29). On en trouvera la preuve dans [3] ou [11] par exemple.

Théorème 1 On suppose que $\mathbf{A} \in C^{k-1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, $\nabla \mathbf{A} \in C^{k-1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ pour $k \geq 1$ et que

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)| \leq \kappa(1 + |\mathbf{x}|) \quad \forall t \in [0, T] \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Alors pour tout $s \in [0, T]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution $\mathbf{X} \in C^k([0, T]_t \times [0, T]_s \times \mathbb{R}^d_x)$ de (3.28)- (3.29).

Proposition 2 Sous les hypothèses du théorème précédent, on a les propriétés suivantes :

(i) $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$ et $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x}).$$

(ii) $\forall (t, s) \in [0, T]^2$, l'application $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})$ est un C^1 - difféomorphisme de \mathbb{R}^d d'inverse $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{X}(t; s, \mathbf{y})$.

(iii) Le jacobien $J(t; s, 1) = \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}))$ vérifie

$$\frac{\partial J}{\partial t} = (\nabla \cdot \mathbf{A})(t; \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}))J,$$

et $J > 0$. En particulier si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $J(t; s, 1) = J(s; s, 1) = \det \mathbb{I}_d = 1$, où \mathbb{I}_d est la matrice identité d'ordre d .

Preuve.

- (i) Les points $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t_1; t_1, \mathbf{x})$, $\mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})$, $\mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x})$ sont sur une même caractéristique. Celle qui est caractérisée par la condition initiale $\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{x}$. Ainsi en prenant l'un quelconque de ces points comme condition initiale au temps correspondant, on obtient la même solution de (3.28)- (3.29). On a ainsi en particulier $\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_1, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_1, \mathbf{x})$.
- (ii) En prenant $t_1 = t_3$ dans l'égalité du (i) on a

$$\mathbf{X}(t_3; t_2, \mathbf{X}(t_2; t_3, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t_3; t_3, \mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Donc $\mathbf{X}(t_3; t_2, \cdot)$ est l'inverse de $\mathbf{X}(t_2; t_3, \cdot)$ (on note $g(\cdot)$ la fonction $x \mapsto g(x)$) et les deux applications sont de classe C^1 en raison du théorème précédent.

- (iii) Soit

$$J(t; s, 1) = \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) = \det\left(\left(\frac{\partial X_i(t; s, \mathbf{x})}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq d}\right).$$

Or \mathbf{X} vérifie $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{X}(t), t)$. Donc en particulier en prenant la i ème ligne de cette égalité $\frac{dX_i}{dt} = A_i(\mathbf{X}(t), t)$. Et en prenant le gradient de cette égalité, on obtient

$$\frac{d}{dt} \nabla X_i = \sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Pour une matrice M d'ordre d le déterminant de M est une forme d -linéaire alternée ayant pour argument les colonnes de M , on peut donc, en notant (\cdot, \dots, \cdot) cette forme d -linéaire alternée, écrire $\det M = (M_1, \dots, M_d)$ où M_j est la j ème colonne de M . En appliquant cette notation au cas qui nous intéresse on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(t; s, 1) &= \frac{\partial}{\partial t} \det(\nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x})) \\ &= \left(\frac{\partial \nabla X_1}{\partial t}, \nabla X_2, \dots, \nabla X_d\right) + \dots + \left(\nabla X_1, \nabla X_2, \dots, \frac{\partial \nabla X_d}{\partial t}\right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_k}, \nabla X_2, \dots, \nabla X_d\right) + \dots + \left(\nabla X_1, \nabla X_2, \dots, \sum_{k=1}^d \nabla X_k \cdot \frac{\partial A_d}{\partial x_k}\right) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} J + \dots + \frac{\partial A_d}{\partial x_d} J, \end{aligned}$$

car (\cdot, \dots, \cdot) est d -linéaire alternée. On a donc bien $\frac{\partial J}{\partial t}(t; s, 1) = (\nabla \cdot \mathbf{A})J$. D'autre part $\nabla_x \mathbf{X}(s; s, \mathbf{x}) = \nabla_x \mathbf{x} = \mathbb{I}_d$ et donc $J(s; s, \mathbf{x}) = \det \mathbb{I}_d = 1$. J est donc solution de l'équation différentielle

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{A})J, \quad J(s) = 1,$$

qui a pour unique solution $J(t) = e^{\int_s^t \nabla \cdot \mathbf{A} dt} > 0$ et en particulier si $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, on a $J(t; s, 1) = 1$ pour tout t . ■

Après avoir mis en évidence les propriétés des caractéristiques, on peut maintenant exprimer la solution de l'équation d'advection linéaire (3.27) à l'aide des caractéristiques.

Théorème 2 Soit $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ et \mathbf{A} un champ de vecteur vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Il existe alors une unique solution de l'équation d'advection linéaire (3.27) associée à la condition initiale $f(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{x})$. Elle est donnée par

$$f(\mathbf{x}, t) = f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})), \quad (3.30)$$

où \mathbf{X} représente les caractéristiques associées à \mathbf{A} .

Preuve. La fonction f donnée par (3.30) est C^1 car f_0 et \mathbf{X} le sont et \mathbf{X} est défini de manière unique. Vérifions que f est bien une solution de (3.27) et qu'elle vérifie la condition initiale. On a tout d'abord de manière immédiate avec la formule (3.30)

$$f(\mathbf{x}, 0) = f_0(\mathbf{X}(0; 0, \mathbf{x})) = f_0(\mathbf{x}).$$

On a ensuite

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X}{\partial s}(0; t, \mathbf{x}) \cdot \nabla f_0(0; t, \mathbf{x}),$$

puis

$$\begin{aligned} \nabla_x f(\mathbf{x}, t) &= \nabla_x (f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}))) \\ &= \sum_{k=1}^d \frac{\partial f_0}{\partial x_k} \nabla_x X_k(0; t, \mathbf{x}), \\ &= \nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})), \end{aligned}$$

au sens du produit matrice vecteur avec la matrice jacobienne

$$\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_l}(0; t, \mathbf{x}) \right)_{1 \leq k, l \leq d} \right).$$

On a alors

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f \right)(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial X}{\partial s}(0; t, \mathbf{x}) \cdot \nabla f_0(0; t, \mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \right). \quad (3.31)$$

Or on a également grâce aux propriétés des caractéristiques que $\mathbf{X}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) = \mathbf{X}(t; r, \mathbf{x})$ et en différenciant cette relation par rapport à s , on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) + \nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{X}(s; r, \mathbf{x})) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s; r, \mathbf{x}) = 0.$$

Or par définition des caractéristiques $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}(s; r, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, s)$ et de plus cette relation est vérifiée pour toutes valeurs de t, r, s et donc en particulier pour $r = s$. Elle devient dans ce cas

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s}(t; s, \mathbf{x}) + \nabla_x \mathbf{X}(t; s, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, s) = 0.$$

En reportant cette expression dans (3.31) on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f \right)(\mathbf{x}, t) &= -\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \\ &\quad + \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \left(\nabla_x \mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})^T \nabla_x f_0(\mathbf{X}(0; t, \mathbf{x})) \right). \end{aligned}$$

Or pour une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et deux vecteurs $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$, on a $(M\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T M^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (M^T \mathbf{v})$. Il vient donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{A} \cdot \nabla_x f = 0,$$

ce qui signifie que f définie par (3.30) est solution de (3.27).

Le problème étant linéaire si f_1 et f_2 sont deux solutions on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_1 - f_2) + \mathbf{A} \cdot \nabla_x(f_1 - f_2) = 0,$$

et donc en utilisant les caractéristiques $\frac{d}{dt}(f_1 - f_2)(\mathbf{X}(t), t) = 0$. Ainsi si f_1 et f_2 vérifient la même condition initiale, elles sont identiques ce qui donne l'unicité de la solution qui est donc bien celle donnée par la formule (3.30). ■

Exemples

1. L'équation de transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Les caractéristiques sont solution de

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

On a donc $V(t; s, x, v) = v$ et $X(t; s, x, v) = x + (t - s)v$ ce qui donne pour solution

$$f(x, v, t) = f_0(x - vt, v).$$

2. Focalisation uniforme dans un accélérateur (modèle 1D). On a alors $E(x, t) = -x$ et l'équation de Vlasov s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

$$\frac{dX}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = -X.$$

On a donc $X(t; s, x, v) = x \cos(t - s) + v \sin(t - s)$ et $V(t; s, x, v) = -x \sin(t - s) + v \cos(t - s)$ ce qui donne pour solution

$$f(x, v, t) = f_0(x \cos t - v \sin t, x \sin t + v \cos t).$$

3.3 Propriétés de conservation formelles du système de Vlasov-Maxwell

On appelle équation de Vlasov non linéaire, l'équation de Vlasov couplée avec les équations de Maxwell ou un modèle réduit comme les équations de Poisson. Elle a un certain nombre de propriétés de conservation qu'on devra soit essayer de conserver exactement dans les méthodes numériques soit qu'on pourra utiliser pour tester la validité de la simulation.

3.3. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION FORMELLES DU SYSTÈME DE VLASOV-MAXWELL31

Rappelons les équations de Vlasov-Maxwell adimensionnée pour une seule espèce de particules :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.32)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.35)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.36)$$

avec

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

On remarque d'abord que l'équations de Vlasov (3.32) peut également s'écrire sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{F}f) = 0, \quad (3.37)$$

avec $\mathbf{F} = (\mathbf{v}, \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^T$ tel que $\nabla_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} = 0$.

Proposition 3 *Les équations de Vlasov-Maxwell vérifient les propriétés suivantes :*

– *Principe du maximum*

$$0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \leq \max_{(x,v)}(f_0(x, v)). \quad (3.38)$$

– *Conservation des normes L^p , p entier, $1 \leq p \leq \infty$*

$$\frac{d}{dt} \left(\int (f(t, x, v))^p d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right) = 0 \quad (3.39)$$

– *Conservation du volume. Pour tout volume V de l'espace des phases*

$$\int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int_{F^{-1}(V)} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u}. \quad (3.40)$$

– *Conservation de l'énergie.*

$$\frac{d}{dt} \left[\int v^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int (E^2 + B^2) d\mathbf{x} \right] = 0. \quad (3.41)$$

Preuve. Le système définissant les caractéristiques associées s'écrit

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(t), \quad (3.42)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{V}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)). \quad (3.43)$$

On note $(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s), \mathbf{V}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, s))$, ou de manière plus concise $(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))$ quand la dépendance par rapport aux conditions initiales n'est pas explicitement nécessaire, l'unique solution au temps t de ce système qui prend la valeur (\mathbf{x}, \mathbf{v}) au temps s .

En utilisant (3.42)-(3.43), l'équation de Vlasov (3.32) peut s'exprimer de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}(f(\mathbf{X}(t), \mathbf{V}(t))) = 0.$$

On a donc

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

De cette expression, on déduit que f vérifie un principe du maximum qui peut s'écrire comme f_0 est positive

$$0 \leq f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \leq \max_{(x,v)}(f_0(x, v)).$$

En multipliant l'équation de Vlasov (3.32) par f^{p-1} et en intégrant sur tout l'espace des phases on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\int (f(t, x, v))^p d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right) = 0,$$

de sorte que les normes L^p de f sont conservées pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Notons que la norme L^∞ est également conservé en vertu du principe du maximum (3.38).

En intégrant sur un volume arbitraire V de l'espace des phases et en utilisant que f est conservée le long des caractéristiques on a

$$\begin{aligned} \int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} &= \int_V f(t, \mathbf{X}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(t; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= \int_V f(0, \mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\ &= \int_V f_0(\mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)) d\mathbf{x} d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

maintenant en faisant le changement de variables $\mathbf{y} = \mathbf{X}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, $\mathbf{u} = \mathbf{V}(0; \mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ dont le jacobien vaut 1 en vertu de la proposition 2 car

$$\nabla_{(x,v)} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \end{pmatrix} = 0,$$

on obtient

$$\int_V f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \int_{F^{-1}(V)} f_0(\mathbf{y}, \mathbf{u}) d\mathbf{y} d\mathbf{u}.$$

On a également la conservation de l'énergie pour le système de Vlasov-Maxwell. Pour l'obtenir on commence par multiplier l'équation de Vlasov par $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$ à intégrer sur l'espace des phases

$$\frac{d}{dt} \int v^2 f d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \nabla_x \cdot (v^2 \mathbf{v} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int v^2 \nabla_v \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

Or comme f tend vers 0 à l'infini on a

$$\int \nabla_x \cdot (v^2 \mathbf{v} f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0$$

et

$$\int v^2 \nabla_v \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{v} \cdot ((\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = -2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{x}.$$

3.3. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION FORMELLES DU SYSTÈME DE VLASOV-MAXWELL33

Donc

$$\frac{d}{dt} \int v^2 f \, d\mathbf{x}d\mathbf{v} = 2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \, d\mathbf{x}. \quad (3.44)$$

On prend maintenant le produit scalaire de l'équation d'Ampère avec \mathbf{E} et on intègre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int E^2 \, d\mathbf{x} - \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = - \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x}, \quad (3.45)$$

puis on prend le produit scalaire de l'équation de Faraday avec \mathbf{B} et on intègre

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int B^2 \, d\mathbf{x} + \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3.46)$$

En utilisant la formule de Green sur le rotationnel dans un domaine périodique on obtient

$$\int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x} = \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \, d\mathbf{x},$$

Ainsi en faisant la somme des équations (3.44) et deux fois les équations (3.45) et (3.46), on obtient la conservation de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt} \left[\int v^2 f \, d\mathbf{x}d\mathbf{v} + \int (E^2 + B^2) \, d\mathbf{x} \right] = 0,$$

le premier terme représentant l'énergie cinétique des particules et le deuxième l'énergie potentielle. ■

Chapitre 4

Les méthodes numériques pour la résolution de l'équation de Vlasov

Différents types de méthodes sont actuellement utilisées en pratique pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov, couplée non linéairement aux équations de Maxwell ou de Poisson. Les grands types de méthodes utilisées sont les méthodes particulières, les méthodes spectrales basées sur des développement de Fourier, et dans certains cas de Hermite, de la fonction de distribution, et finalement les méthodes utilisant un maillage de l'espace des phases. Un petit historique des méthodes utilisées pour la simulation de plasmas montre que les méthodes numériques doivent sans cesse évoluer et être améliorées en adéquation avec les moyens de calcul. Des situations de plus en plus complexes peuvent être traitées lorsque les moyens de calcul évoluent, mais cela nécessite le développement de nouvelles méthodes numériques. Ainsi, la simulation numérique de plasmas et de faisceaux de particules s'est développée en fonction des ressources de calcul disponibles : au début, dans les années 1960 et 1970 où l'on pouvait traiter uniquement des problèmes 1D, d'innombrables méthodes ont vu le jour, chacune avec ses avantages et ses inconvénients. Ensuite il s'est avéré que l'une de ces méthodes, la méthode Particle-In-Cell (PIC), a été utilisée de manière quasi-exclusive dans les années 1980 et 1990, car elle permettait de faire des simulations de problèmes physiquement réalistes de manière satisfaisante avec les moyens disponibles. Depuis une dizaine d'années les moyens de calcul permettent de revenir à des méthodes utilisant un maillage de l'espace des phases qui permettent d'avoir des résultats plus précis dans certains cas. Ces méthodes doivent bien entendu être améliorées et analysées pour comprendre l'étendue de leur applicabilité. Plus généralement il reste un travail important à faire pour la compréhension, voire l'amélioration, et l'analyse de méthodes numériques existantes.

4.1 Les méthodes particulières

4.1.1 Introduction

La première méthode à avoir été développée historiquement et encore de nos jours la plus utilisée pour la simulation des équations de Vlasov-Maxwell ou de Vlasov-Poisson est la méthode PIC (pour Particle In Cell) qui consiste en le couplage d'une méthode particulière pour Vlasov et une méthode sur maillage pour Maxwell ou Poisson. Le principe de la méthode est de discrétiser la fonction de distribution par une ensemble

de macro-particules représentant à l'instant initial une réalisation de la loi de probabilité associée à la fonction de distribution initiale $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ qui normalisée telle que son intégrale vaut 1 représente une densité de probabilité. On avance ces macro-particules en temps en résolvant numériquement leur équation du mouvement dans un champ électromagnétique. Le couplage avec le solveur de champ se fait en calculant les sources, densité de charge et de courant, pour les équations de Maxwell grâce à une méthode de régularisation. Un solveur de champ classique peut alors être utilisé. Pour continuer la boucle en temps on doit alors calculer les champs aux positions des particules, ce qui se fait de manière naturelle avec certains solveurs (Eléments finis par exemple) ou par interpolation avec d'autres. Il existe une littérature considérable sur ces méthodes incluant deux livres plutôt orientés vers la physique, celui de Birdsall et Langdon [7] et celui de Hockney et Eastwood [18]. Des preuves de convergence des algorithmes existent également dans certains cas particuliers par Neunzert et Wick [21], Cottet et Raviart [15], Victory et Allen [24] et Wollman [26].

Il existe également une variante de la méthode PIC qui est souvent utilisée lorsque la physique étudiée reste proche d'une configuration d'équilibre, notamment dans les tokamaks ou dans les accélérateurs de particules. Cette méthode est appelée δf . Elle consiste à développer la fonction de distribution au voisinage d'un équilibre connu f^0 en $f = f^0 + \delta f$ et à approximer uniquement la partie δf par une méthode PIC. Une autre méthode particulière, apparentée aux méthodes SPH (smooth particle hydrodynamics) utilisées en mécanique des fluides à été introduite par Bateson et Hewett [4], mais semble relativement peu utilisée depuis. Elle consiste à faire évoluer un nombre relativement faible de macro-particules de forme gaussienne dont la taille peut varier et qui interagissent directement les unes avec les autres. Nous ne détaillerons pas cette méthode.

4.1.2 La méthode PIC

Le principe d'une méthode particulière est d'approcher la fonction de distribution f solution de l'équation de Vlasov par une somme de masses de Dirac centrées en les positions dans l'espace des phases $(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t))_{1 \leq k \leq N}$ d'un nombre N de macro-particules ayant chacune un poids w_k . La fonction de distribution approchée que nous notons f_N s'écrit alors

$$f_N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=1}^N w_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t)).$$

Dans ce but on initialise les positions \mathbf{x}_k^0 , les vitesses \mathbf{v}_k^0 et les poids w_k pour que $f_N(\mathbf{x}, \mathbf{v}, 0)$ soit une approximation, en un sens à préciser, de la fonction de distribution initiale $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$. L'évolution en temps de l'approximation se fait en avançant les macro-particules le long des caractéristiques de l'équation de Vlasov, i.e. en résolvant le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} &= \mathbf{v}_k \\ \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} &= \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_k, t)) \\ \mathbf{x}_k(0) &= \mathbf{x}_k^0, \quad \mathbf{v}_k(0) = \mathbf{v}_k^0. \end{aligned}$$

Proposition 4 La fonction f_N est une solution au sens des distributions de l'équation de Vlasov associée à la condition initiale $f_N^0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^N w_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^0) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k^0)$.

Preuve. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[)$. Alors f_N définit une distribution de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[$ de la manière suivante :

$$\langle f_N, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^N \int_0^T w_k \varphi(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t), t) dt.$$

On a alors

$$\left\langle \frac{\partial f_N}{\partial t}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f_N, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = - \sum_{k=1}^N w_k \int_0^T \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t), t) dt,$$

or

$$\frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t), t)) = \frac{d\mathbf{x}_k}{dt} \cdot \nabla_x \varphi + \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} \cdot \nabla_v \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t), t),$$

et comme φ est à support compact dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[$, elle s'annule pour $t = 0$ et $t = T$. Donc

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\varphi(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t), t)) dt = 0.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f_N}{\partial t}, \varphi \right\rangle &= \sum_{k=1}^N w_k \int_0^T (\mathbf{v}_k \cdot \nabla_x \varphi + \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_k, t)) \cdot \nabla_v \varphi) dt \\ &= - \langle \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_N + \frac{q}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_k, t)) \cdot \nabla_v f_N, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que f_N vérifie de manière exacte l'équation de Vlasov au sens des distributions. ■

Conséquence : Si on peut résoudre exactement les équations du mouvement (ce qui est le cas parfois lorsqu'on a uniquement un champ appliqué suffisamment simple), la méthode particulière donne la solution exacte pour une fonction de distribution initiale sous forme de somme de masses de Dirac.

Le champ électromagnétique auto-consistant est quand à lui calculé sur un maillage de l'espace physique utilisant une méthode classique (p.ex. Elements Finis, ou Différences Finies) pour résoudre les équations de Maxwell ou de Poisson.

Pour déterminer complètement une méthode particulière, il faut préciser comment est choisie la condition initiale f_N^0 et quelle est la méthode numérique choisie pour la résolution du système d'équations différentielles des caractéristiques.

On peut maintenant donner l'algorithme d'un code PIC qui est représenté schématiquement sur la figure 4.1.

Détaillons en les étapes principales.

Choix de la condition initiale.

- *Méthode déterministe :* On définit un maillage de l'espace des phases (uniforme ou non). On prend comme position initiale des particules $(\mathbf{x}_k^0, \mathbf{v}_k^0)$ les barycentres des mailles et pour poids w_k associé l'intégrale de f_0 sur la maille correspondante : $w_k = \int_{V_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ de sorte que $\sum_k w_k = \int f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x}d\mathbf{v}$.
- *Méthode Monte-Carlo :* On choisit les positions initiales de manière aléatoire ou pseudo-aléatoire selon la densité de probabilité associée à f_0 .

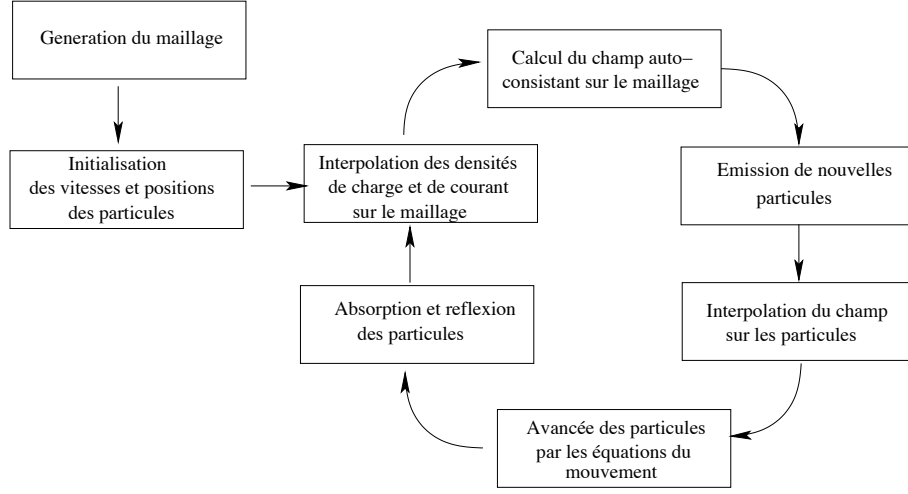


FIG. 4.1 – Les différentes étapes d'un code PIC.

Couplage particules-maillage. L'approximation particulaire f_N de la fonction de distribution ne permet pas de définir une valeur de cette fonction en tous les points de l'espace des phases. Ainsi pour le couplage avec le solveur de champ défini sur le maillage une étape de régularisation est nécessaire. On définit pour cela des noyaux de convolution qui seront utilisés pour la régularisation. Numériquement, il est intéressant de prendre comme noyaux de convolution des B-splines d'ordre fixé. Ces B-splines sont définies par récurrence : On définit la B-spline d'ordre 0 que nous noterons S^0 par

$$S^0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{si } -\frac{\Delta x}{2} \leq x < \frac{\Delta x}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les B-splines d'ordre supérieur sont alors définies par :
Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S^m(x) &= (S^0)^{*m}(x), \\ &= S^0 * S^{m-1}(x), \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} S^{m-1}(u) du. \end{aligned}$$

On obtient en particulier à l'ordre 1

$$S^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \left(1 - \frac{|x|}{\Delta x}\right) & \text{si } |x| < \Delta x, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

à l'ordre 2

$$S^2(x) = \frac{1}{\Delta x} \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{|x|}{\Delta x}\right)^2 & \text{si } \frac{1}{2}\Delta x < |x| < \frac{3}{2}\Delta x, \\ \frac{3}{4} - \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}\Delta x, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et à l'ordre 3

$$S^3(x) = \frac{1}{6\Delta x} \begin{cases} \left(2 - \frac{|x|}{\Delta x}\right)^3 & \text{si } \Delta x \leq |x| < 2\Delta x, \\ 4 - 6\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 3\left(\frac{|x|}{\Delta x}\right)^3 & \text{si } 0 \leq |x| < \Delta x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les B-splines vérifient les propriétés importantes suivantes :

Proposition 5 – *Moyenne unité*

$$\int S^m(x) dx = 1.$$

– *Partition de l'unité. Pour $x_j = j\Delta x$,*

$$\Delta x \sum_j S^m(x - x_j) = 1.$$

– *Parité*

$$S^m(-x) = S^m(x).$$

Les sources pour les équations de Maxwell ρ et \mathbf{J} sont définies à partir de la fonction de distribution f_N , pour une espèce de particules de charge q par

$$\rho_N = q \sum_k w_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad \mathbf{J}_N = q \sum_k w_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{v}_k.$$

On applique ensuite le noyau de convolution S pour pouvoir définir ρ et \mathbf{J} en tout point de l'espace et en particulier aux points du maillage :

$$\rho_h(\mathbf{x}, t) = \int S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rho_N(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = q \sum_k w_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{J}_h(\mathbf{x}, t) = \int S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbf{J}_N(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = q \sum_k w_k S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \mathbf{v}_k. \quad (4.2)$$

Lorsqu'un noyau de régularisation est appliqué aux particules, on applique le même pour régulariser les champs et en avoir une expression aux positions des particules. Ainsi en adoptant le formalisme que pour une méthode de différences finies le champ (électrique ou magnétique) est une somme de masses de Dirac centrées aux points du maillage, on construit un champ défini partout par convolution avec le même noyau S utilisé pour la régularisation des particules. On obtient alors

$$\mathbf{E}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{E}_j(t) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{B}_h(\mathbf{x}, t) = \sum_j \mathbf{B}_j(t) S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j). \quad (4.3)$$

Notons que pour le cas le plus fréquent en pratique où l'on prend $S = S^1$ c'est régularisation correspond à une interpolation linéaire des champs définis aux maillages aux positions des particules, mais pour des splines d'ordre supérieur à 1 ce n'est plus une interpolation et le champ régularisé aux points du maillage n'est plus égal à \mathbf{E}_j mais, par exemple dans le cas de S^3 , à $\frac{1}{6}\mathbf{E}_{j-1} + \frac{2}{3}\mathbf{E}_j + \frac{1}{6}\mathbf{E}_{j+1}$.

Schéma en temps pour les particules. On considère pour l'instant uniquement le cas où le champ magnétique est nul (Vlasov-Poisson). Dans ce cas les trajectoires des macro-particules obéissent aux équations suivantes :

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{v}_k, \quad \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}_k, t).$$

Ce système d'équations différentielles étant hamiltonien, on le résout en général à l'aide d'un schéma symplectique. De loin le plus utilisé est le schéma de Verlet qui permet de passer d'un pas de temps au suivant à l'aide des étapes que voici. On suppose \mathbf{x}_k^n , \mathbf{v}_k^n et \mathbf{E}_k^n connus.

$$\mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_k^n + \frac{q\Delta t}{2m}\mathbf{E}_k^n(\mathbf{x}_k^n), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{x}_k^{n+1} = \mathbf{x}_k^n + \Delta t\mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{v}_k^{n+1} = \mathbf{v}_k^{n+\frac{1}{2}} + \frac{q\Delta t}{2m}\mathbf{E}_k^{n+1}(\mathbf{x}_k^{n+1}). \quad (4.6)$$

On remarque que l'étape (4.6) nécessite de connaître le champ électrique à l'instant t_{n+1} . On peut le calculer après l'étape (4.5) en résolvant l'équation de Poisson qui utilise comme donnée ρ_h^{n+1} qui ne nécessite la connaissance que de \mathbf{x}_k^{n+1} et pas de \mathbf{v}_k^{n+1} .

Boucle en temps. Résumons maintenant les étapes principales pour passer du temps t_n au temps t_{n+1} :

1. On calcule les densités de charge ρ_h et de courant \mathbf{J}_h sur le maillage à l'aide des relations (4.1)-(4.2).
2. On met à jour le champ électromagnétique avec un solveur classique sur maillage (différences finies, éléments finis, spectral, ...).
3. On calcule les champs aux positions des particules à l'aide des relations (4.3).
4. Les particules sont avancées à l'aide d'un schéma numérique pour les caractéristiques, par exemple (4.4)-(4.6).

Interprétation probabiliste de la méthode PIC Même quand les particules sont initialisées de manière non aléatoire les effets non linéaires de pair avec les erreurs d'arrondi induisent des effets aléatoires après un certain temps. Il est donc naturel d'analyser les erreurs commises par la méthode PIC avec des techniques probabilistes et de rapprocher cette méthode des méthodes de type Monte-Carlo utilisées pour diverses applications.

Une vision Monte-Carlo de la méthode PIC peut être introduite comme suit : On commence par tirer des macro-particules dans l'espace des phases comme une réalisation aléatoire de la loi de probabilité associée à la densité de probabilité p obtenue à partir de la distribution initiale f_0 par

$$p = \frac{1}{\mathcal{N}}f_0, \quad \text{où } \mathcal{N} = \int f_0 dx dv.$$

Une fois les particules initialisées, elles sont avancées à l'aide des équations du mouvement qui sont déterministes, mais à chaque temps t les particules données par leurs positions dans l'espace des phases $(\mathbf{x}_k(t), \mathbf{v}_k(t))_{1 \leq k \leq N}$ représentent une réalisation de la loi de probabilité associée à la densité $p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{1}{\mathcal{N}}f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ liée à la solution au temps t de l'équation de Vlasov.

Dans ce cadre, les différentes grandeurs physiques peuvent être exprimées comme des espérances sous la loi de probabilité associée à p . Pour une fonction g , son espérance

sous p est définie par

$$\mathbb{E}_p(g) = \int g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) p(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \frac{1}{N} \int g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

Grâce à la loi forte des grands nombres, ces espérances peuvent être approximées par les réalisations aléatoires :

$$\mathbb{E}_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{v})) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k).$$

De plus le théorème central limite permet d'obtenir une estimation d'erreur $\mathbb{E}_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2) < +\infty$, et donc l'erreur

$$\epsilon_N = \mathbb{E}_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{v})) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$$

est telle que $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \epsilon_N$ converge vers la gaussienne centrée réduite dont la variance σ est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2) - \mathbb{E}_f(g(\mathbf{x}, \mathbf{v}))^2, \\ &= \int g(\mathbf{x}, \mathbf{v})^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} - \left(\int g(\mathbf{x}, \mathbf{v}) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que cette approximation converge comme $1/\sqrt{N}$ quand N tend vers $+\infty$ et que l'approximation est d'autant meilleure que la variance est petite. En particulier des techniques de réduction de variance utilisées en statistique peuvent constituer un moyen d'améliorer cette approximation.

Les différentes quantités physiques peuvent s'interpréter à l'aide de la terminologie probabiliste. On voit par exemple que l'énergie cinétique vaut

$$\mathcal{N} \mathbb{E}_f(\mathbf{v}^2) = \int \mathbf{v}^2 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v},$$

la densité de charge au point \mathbf{x}_i est

$$\rho_i = \mathcal{N} \mathbb{E}_f(S_i) = \int S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v},$$

et la densité de courant au point \mathbf{x}_i est

$$J_i = \mathcal{N} \mathbb{E}_f(\mathbf{v} S_i) = \int S(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v}.$$

De plus ces espérances peuvent être approximées avec la réalisation aléatoire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_f(\mathbf{v}^2) &\approx \frac{1}{N} \sum \mathbf{v}_k^2, & \rho_i &= \mathbb{E}_f(S_i) \approx \frac{1}{N} \sum S(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i), \\ J_i &= \mathbb{E}_f(\mathbf{v} S_i) \approx \frac{1}{N} \sum S(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i) \mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

4.1.3 La méthode δf

L'idée de base de cette méthode est de réduire la variance, et donc le bruit, dans la méthode PIC quand la fonction de distribution reste proche d'un état d'équilibre connu ce qui est le cas dans un certain nombre de contextes physiques, en particulier dans les plasmas de tokamaks.

La stratégie consiste à décomposer la fonction de distribution f en $f = f^0 + \delta f$, où f^0 est connue et $\delta f \ll f^0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_f(S_i) &= \mathbb{E}_{f^0}(S_i) + \mathbb{E}_{f-f^0}(S_i) \\ &= \int S_i(x) f^0(x, v) dx dv + \int S_i(x) (f(x, v) - f^0(x, v)) dx dv. \end{aligned}$$

Comme f^0 est connue, le premier terme de cette somme peut être calculé exactement et uniquement le deuxième sera approximé avec la loi des grands nombres. On pourra se référer à [1] et aux références données dans cet article pour plus de détails sur cette méthode.

Remarquons qu'il existe une version perturbative de cette méthode qui résout l'équation de Vlasov linéarisé, mais aussi une version qui résout l'équation de Vlasov initiale, en faisant simplement le changement d'inconnue $\delta f = f - f_0$. Dans ce dernier cas, δf ne sera pas toujours petit devant f_0 , et dans les zones où cela n'est pas le cas le bruit ne sera pas diminué, mais les équations plus compliquées à résoudre.

4.2 La technique du splitting d'opérateurs

Dans l'équation de Vlasov, du fait que le champ d'advection en \mathbf{x} ne dépende pas de \mathbf{v} et que le champ d'advection en \mathbf{v} ne dépende pas de \mathbf{x} , il est souvent commode de décomposer les deux parties par ce qui est communément appelé une méthode de splitting (ou de décomposition) d'opérateurs.

Pour l'équation de Vlasov-Poisson non relativiste qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0,$$

On va décomposer l'équation en les deux parties suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f = 0, \quad (4.7)$$

avec \mathbf{v} fixé et

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q}{m} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (4.8)$$

avec \mathbf{x} fixé. Ce sont alors deux advection à coefficients constants qu'on peut résoudre plus simplement.

Remarque 5 *Lorsque l'équation de départ a certaines propriétés importantes pour la qualité de la solution numérique, il est essentiel de ne pas les détruire par le splitting. En particulier lorsque l'on décompose une équation conservative, il faut veiller à ce que chacune des parties après décomposition soit conservative.*

Pour analyser l'erreur commise par le splitting, on va considérer l'équation

$$\frac{du}{dt} = (A + B)u, \quad (4.9)$$

où A et B sont deux opérateurs différentiels (en espace) quelconques, qu'on suppose constants entre t_n et t_{n+1} . La solution formelle de cette équation sur un pas de temps s'écrit

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t(A+B)}u(t).$$

On décompose l'équation (4.9) en

$$\frac{du}{dt} = Au, \quad (4.10)$$

$$\frac{du}{dt} = Bu. \quad (4.11)$$

Les solutions formelles de ces équations prises séparément sont

$$u(t + \Delta t) = e^{\Delta t A}u(t) \text{ et } u(t + \Delta t) = e^{\Delta t B}u(t).$$

La méthode de splitting standard consiste à résoudre successivement sur un pas de temps (4.10) puis (4.11) Donc en résolvant successivement les deux équations splittées, on obtient sur un pas de temps

$$\tilde{u}(t + \Delta t) = e^{\Delta t B}e^{\Delta t A}u(t).$$

Si les opérateurs A et B commutent $e^{\Delta t B}e^{\Delta t A} = e^{t(A+B)}$ et le splitting est exact. C'est le cas en particulier lorsque l'on décompose une advection à coefficients constants de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

On pourra le vérifier en utilisant la méthode des caractéristiques.

Dans le cas où A et B ne commutent pas on peut diminuer l'erreur de splitting en résolvant d'abord (4.10) sur un demi pas de temps, puis (4.11) sur un pas de temps et de nouveau (4.10) sur un demi pas de temps. Cette méthode est appelée splitting de Strang. Elle correspond à la solution formelle

$$\bar{u}(t + \Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2}A}e^{\Delta t B}e^{\frac{\Delta t}{2}A}u(t).$$

L'erreur commise sur un pas de temps par la méthode de splitting quand les opérateurs ne commutent pas est donné par

Proposition 6 – *Le splitting standard est d'ordre 1 en temps.*
– *Le splitting de Strang est d'ordre 2 en temps.*

Preuve. Pour déterminer les erreurs, il suffit de développer l'exponentielle

On a d'une part

$$e^{\Delta t(A+B)} = I + \Delta t(A + B) + \frac{\Delta t^2}{2}(A + B)^2 + O(\Delta t^3),$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} &= \left(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + O(\Delta t^3) \right) \left(I + \Delta t A + \frac{\Delta t^2}{2} A^2 + O(\Delta t^3) \right) \\ &= I + \Delta t(A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + B^2 + 2BA) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

Or comme A et B ne commutent pas, on a $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Il en résulte que $e^{\Delta t(A+B)} - e^{\Delta t B} e^{\Delta t A} = O(\Delta t^2)$, ce qui donne donc une erreur locale d'ordre 2 et une erreur globale d'ordre 1.

Enfin pour le splitting de Strang, on a

$$\begin{aligned} e^{\frac{\Delta t}{2} A} e^{\Delta t B} e^{\frac{\Delta t}{2} A} &= \left(I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3) \right) \left(I + \Delta t B + \frac{\Delta t^2}{2} B^2 + O(\Delta t^3) \right) \\ &\quad \left(I + \frac{\Delta t}{2} A + \frac{\Delta t^2}{4} A^2 + O(\Delta t^3) \right) \\ &= I + \Delta t(A + B) + \frac{\Delta t^2}{2} (A^2 + B^2 + BA + AB) + O(\Delta t^3). \end{aligned}$$

On obtient donc une erreur locale d'ordre 3 et donc globale d'ordre 2 pour la méthode de Strang. ■

Remarque 6 *On peut obtenir des méthodes de splitting d'ordre aussi élevé que l'on souhaite en composant les opérateurs de manière adéquate suivant l'idée de Strang.*

Remarque 7 *Le splitting de Strang peut aussi se généraliser à plus de deux opérateurs. Si $A = A_1 + \dots + A_n$, la décomposition suivante donne un ordre global de 2 :*

$$e^{\frac{\Delta t}{2} A_1} \dots e^{\frac{\Delta t}{2} A_{n-1}} e^{\Delta t A_n} e^{\frac{\Delta t}{2} A_{n-1}} \dots e^{\frac{\Delta t}{2} A_1}.$$

4.3 Les méthodes semi-Lagrangiennes

Les méthodes semi-Lagrangiennes sont loin derrière les méthodes PIC devenues classiques pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov en raison de leur grande précision et de l'absence de bruit numérique. Elles utilisent un maillage de l'espace des phases, ce qui explique qu'elles ne sont utilisées actuellement qu'en dimension réduite 1D ou 2D, car on ne sait pas encore vraiment gérer un maillage 6D avec des dimensions raisonnables dans chaque direction. La spécificité des méthodes semi-Lagrangiennes par rapport aux méthodes de discrétisation classiques des EDP sur un maillage est qu'elles utilisent les caractéristiques de l'équation de transport pour mettre à jour l'inconnue d'un pas de temps à l'autre. Ces méthodes semi-Lagrangiennes se déclinent sous plusieurs formes, en avant, en arrière, volumique, que nous allons détailler dans cette section. Les méthodes semi-Lagrangiennes utilisent souvent une interpolation par splines cubiques, nous allons donc commencer par présenter cette interpolation.

4.3.1 Interpolation par splines cubiques

On considère un maillage régulier de l'intervalle $[a, b]$ défini par $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, avec $h = \frac{b-a}{N}$. Soit $f \in C^k([a, b])$, $k \geq 0$ son interpolant f_h par splines cubiques

sur ce maillage est défini par $f_h(x_i) = f(x_i)$ pour $i = 0, \dots, N$, $f_h \in \mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}])$ et $f_h \in C^2([a, b])$.

Dans le cas où l'on suppose le domaine périodique, i.e., si $[a, b]$ correspond à une période des fonctions périodiques f et f_h , ces conditions suffisent à déterminer de manière unique f_h . Sinon il faut ajouter des conditions aux limites, soit de type Hermite qui correspondent à donner également les valeurs de $f'_h(a)$ et de $f'_h(b)$ ou de type naturel qui consistent à fixer $f''_h(a) = f''_h(b) = 0$.

Il est pratique de déterminer une expression de f_h sur la base des B-splines cubiques S^3 . Rappelons l'expression de S^3 sur notre maillage

$$S^3(x) = \frac{1}{6h} \begin{cases} (2 - \frac{|x|}{h})^3 & \text{si } h \leq |x| < 2h, \\ 4 - 6\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 3\left(\frac{|x|}{h}\right)^3 & \text{si } 0 \leq |x| < h, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Commençons par traiter le cas périodique. On suppose donc que toutes les fonctions que l'on considère sont périodiques de période $b - a$. On a alors en particulier que $f_h^{(p)}(a) = f_h^{(p)}(b)$ pour $p = 0, 1, 2$. Le point x_N du maillage correspond donc à x_0 et aucune inconnue nouvelle n'y est définie.

L'expression de f_h sur la base des B-splines s'écrit alors

$$f_h(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j S^3(x - x_j),$$

et les coefficients α_i sont déterminés par les conditions d'interpolation

$$f(x_i) = f_h(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j S^3(x_i - x_j).$$

Or $S^3(x_i - x_i) = \frac{2}{3h}$, $S^3(x_i - x_{i+1}) = S^3(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{6h}$ et $S^3(x_i - x_j) = 0$ si $|x_i - x_j| \geq 2h$.

Il en résulte le système d'équations déterminant les α_i , $i = 0, N - 1$:

$$\alpha_{i-1} + 4\alpha_i + \alpha_{i+1} = 6hf(x_i), \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

avec en raison de la périodicité $\alpha_{-1} = \alpha_{N-1}$ et $\alpha_N = \alpha_0$. Ce système peut s'écrire sous forme matricielle $A\alpha = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \quad b = 6h \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice A est à diagonale strictement dominante elle est inversible et permet donc de déterminer α de manière unique et donc la fonction f_h .

Remarque 8 Pour l'implémentation de la méthode, il est préférable d'enlever le h qui est en facteur dans b et de compenser en enlevant le $\frac{1}{h}$ en facteur de S^3 . On peut exprimer ceci de manière différente en disant qu'on fait les changements de variable $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{h}$ et $\tilde{S}^3 = hS^3$.

4.3.2 La méthode semi-Lagrangienne classique

La méthode semi-Lagrangienne classique, ou en arrière, se décompose en deux étapes pour calculer la fonction de distribution f^{n+1} au temps t_{n+1} à partir de la fonction de distribution f^n au temps t_n :

1. Pour chaque point x_i du maillage de l'espace des phases, calculer $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ la valeur de la caractéristique en t_n qui vaut x_i en t_{n+1} .
2. Comme la fonction de distribution solution de l'équation de Vlasov vérifie

$$f^{n+1}(x_i) = f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1})),$$

on obtient la valeur $f^{n+1}(x_i)$ cherchée, en calculant $f^n(X(t_n; x_i, t_{n+1}))$ par interpolation car $X(t_n; x_i, t_{n+1})$ n'est en général pas un point du maillage.

On représente ces opérations sur la figure 4.2.

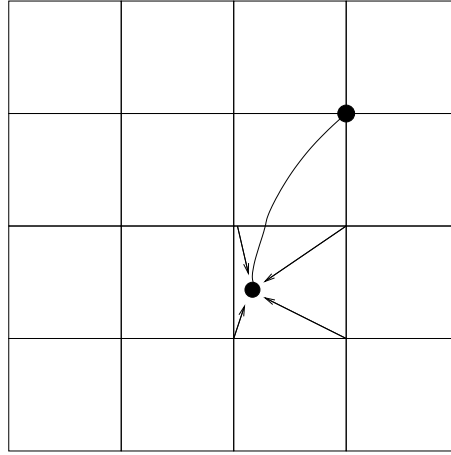


FIG. 4.2 – Schéma de principe de la méthode semi-Lagrangienne classique.

Remarque 9 *La méthode semi-Lagrangienne est très diffusive si une interpolation d'ordre trop faible est utilisée, en particulier pour l'interpolation linéaire. En pratique on utilise le plus souvent des interpolations cubiques, soit par splines, soit de Hermite ou de Lagrange.*

La méthode semi-Lagrangienne a été initialement introduite pour les équations de Vlasov-Poisson par Cheng et Knorr [13] en 1976. Elle est basée sur une interpolation par splines cubiques et sur un splitting de Strang et est particulièrement efficace dans ce cas.

On considère le problème de Vlasov-Poisson 1D avec une fonction de distribution pour les électrons et un fond d'ions neutralisant sur un domaine $[0, L]$ périodique en x et infini en v . Les équations s'écrivent alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{dE}{dx} = \rho(x, t) = 1 - \int f(x, v, t) dv,$$

avec la condition initiale $f(x, v, 0) = f_0(x, v)$, vérifiant $\int f_0(x, v) dx dv = L$.

On tronque l'espace infini des vitesses à un segment $[-A, A]$ suffisamment grand pour que f reste de l'ordre de l'erreur d'arrondi pour des vitesses de l'ordre de $-A$ ou A tout au long de la simulation (en pratique on peut prendre A de l'ordre de 10 pour la plupart des cas tests pour le problème considéré). On définit alors un maillage uniforme de l'espace des phases $x_i = iL/N$, $i = 0, \dots, N-1$ (on ne redéfinit pas le point x_N qui correspond à x_0), $v_j = -A + j2A/M$, $j = 0, \dots, M$.

L'algorithme s'écrit dans ce cas :

1. **Initialiation.** La fonction de distribution initiale $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ est donnée. On en déduit $\rho(x, 0) = 1 - \int f_0(x, v) dv$, puis on calcule le champ électrique initial $E(x, 0)$ en résolvant Poisson.
2. **Passage de t_n à t_{n+1} .** On connaît f^n en tous les points (x_i, v_j) du maillage de l'espace des phase et E^n en tous les points du maillage de l'espace physique x_i .
 - On calcule f^* en résolvant

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^n \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

sur un demi pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$ par une méthode semi-Lagrangienne.

- On calcule f^{**} en résolvant sur un pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

- On calcule $\rho^{n+1}(x) = 1 - \int f^{**}(x, v) dv$ et on calcule le champ électrique E^{n+1} correspondant à l'aide de l'équation de Poisson.
- On calcule f^{n+1} en résolvant sur un demi pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E^{n+1} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (4.12)$$

à partir de la condition initiale f^{**} .

Remarquons qu'on peut bien calculer ρ^{n+1} à l'aide de $f^{**}(x, v)$, car la densité de charge correspondant à $f^{**}(x, v)$ est la même que celle correspondant à $f^{n+1}(x, v)$. En effet, on passe de $f^{**}(x, v)$ à $f^{n+1}(x, v)$ en résolvant (4.12), et on remarque en intégrant cette équation en v qu'elle entraîne que $\frac{d}{dt} \int f(x, v, t) dv = 0$ et donc que ρ n'est pas modifié par cette étape.

Variante avec advection des dérivées pour une interpolation de Hermite cubique. L'advection en v pour un champ électrique $E(x)$ fixé s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + E \frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

et à pour solution explicite sur un pas de temps $f(x, v, t + \Delta t) = f(x, v - E(x)\Delta t, t)$. On peut en déduire une expression explicite des dérivées partielles par rapport à x et v

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t + \Delta t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, v - E(x)\Delta t, t) - \frac{dE}{dx}(x)\Delta t \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, v - E(x)\Delta t, t) - \rho(x)\Delta t \frac{\partial f}{\partial v}(x, v - E(x)\Delta t, t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

On obtient ainsi, en plus de la valeur de f aux points du maillage la valeurs de ses dérivées dont on a besoin pour une interpolation de Hermite cubique.

De la même manière l'advection en x s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

et à pour solution explicite sur un pas de temps $f(x, v, t + \Delta t) = f(x - v\Delta t, v, t)$, dont on déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, v, t + \Delta t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x - v\Delta t, v, t), \\ \frac{\partial f}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) &= -\Delta t \frac{\partial f}{\partial x}(x - v\Delta t, v, t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x - v\Delta t, v, t). \end{aligned}$$

L'interpolation de Hermite cubique 1D d'une fonction f s'écrit

$$\pi f(x) = \sum_k f(x_k) \varphi(x_k) + f'(x_k) \psi(x_k),$$

où φ_k est le polynôme de degré 3 par maille vérifiant $\varphi_k(x_l) = \delta_{k,l}$ et $\varphi'_k(x_l) = 0$ et ψ_k est le polynôme de degré 3 par maille vérifiant $\psi_k(x_l) = 0$ et $\psi'_k(x_l) = \delta_{k,l}$ pour tous les points x_l du maillage.

Le schéma dans chacune des directions est alors déterminé en utilisant les valeurs de f et de ses dérivées partielles aux points du maillage déterminées précédemment. Ainsi pour l'advection en v on a

$$\begin{aligned} f_h(x, v, t + \Delta t) &= \pi(f(x, v - E(x)\Delta t, t)) \\ &= \sum_k f(x, v_k, t) \varphi_k(v - E(x)\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, v_k, t) \psi_k(v - E(x)\Delta t). \end{aligned}$$

On peut donc calculer

$$\frac{\partial f_h}{\partial v}(x, v, t + \Delta t) = \sum_k f(x, v_k, t) \varphi'_k(v - E(x)\Delta t) + \frac{\partial f}{\partial v}(x, v_k, t) \psi'_k(v - E(x)\Delta t),$$

et pour l'autre dérivée on utilise l'expression (4.14) en calculant $\frac{\partial f}{\partial x}(x, v_E(x)\Delta t, t)$ en utilisant une interpolation quadratique par rapport aux points voisins.

4.3.3 La méthode semi-Lagrangienne sans splitting

Les méthodes semi-Lagrangiennes avec splitting pour la résolution des équations de Vlasov-Poisson ont le grand avantage de permettre à chaque étape du splitting un calcul explicite de l'origine des caractéristiques, ce qui permet de simplifier l'algorithme. Néanmoins, le splitting lui-même qui privilégie les directions des axes induit bien sûr des erreurs. Il peut donc être intéressant dans certains cas de développer une méthode semi-Lagrangienne sans splitting qui nécessite dans ce cas une approximation numérique pour calculer l'origine des caractéristiques qui sont les solutions de

$$\frac{dV}{dt} = E(X(t), t), \quad \frac{dX}{dt} = V.$$

L'algorithme permettant de passer du pas de temps t_n au pas de temps t_{n+1} s'écrit alors comme suit : à l'instant t_n on connaît f^n et E^n sur les points du maillage et on veut calculer ces grandeurs à l'instant $n + 1$. Un schéma d'ordre 2 en temps de type prédicteur-correcteur peut être défini comme suit :

1. Prédire une valeur \bar{E}^{n+1} du champ électrique à l'instant t_{n+1} .
2. Pour tous les points du maillage $x_i = X^{n+1}, v_j = V^{n+1}$ calculer successivement
 - $V^{n+1/2} = V^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} \bar{E}^{n+1}(X^{n+1})$,
 - $X^n = X^{n+1} - \Delta t V^{n+1/2}$,
 - $V^n = V^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \bar{E}^n(X^n)$.
 - Interpoler f^n au point (X^n, V^n) .
3. On a alors une première approximation de $f^{n+1}(x_i, v_j) = f^n(X^n, V^n)$ qu'on utilise pour calculer une version corrigée de E^{n+1} à partir de laquelle on peut éventuellement faire une nouvelle itération de l'algorithme pour améliorer la précision si nécessaire.

Pour initialiser la prédiction de \bar{E}^{n+1} , il est pratique et efficace d'utiliser l'équation de conservation de la charge qui est obtenue en intégrant Vlasov par rapport à v :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0.$$

Avec un schéma centré d'ordre 2, on obtient une approximation de ρ^{n+1} à partir de $\rho^{n-1} = \int f^{n-1} dv$ et de $J^n = \int v f^n dv$ sous la forme

$$\rho^{n+1} = \rho^{n-1} - 2\Delta t \nabla \cdot J^n.$$

On calcule ensuite \bar{E}^{n+1} en résolvant Poisson avec pour source ρ^{n+1} .

4.3.4 Éléments d'analyse de la méthode semi-Lagrangienne avec splitting

Pour valider la technique de splitting utilisée, nous allons démontrer la convergence dans le cas simplifié où le champ électrique est supposé connu et où on utilise une interpolation linéaire. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3 *Soit $E \in C^2([0, T] \times \mathbb{R})$ donné. Alors la solution du problème de Vlasov associé est de classe $C^3([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ et f_h calculé par l'algorithme splitté avec interpolation linéaire vérifie*

$$\|f - f_h\|_\infty \leq C(\Delta t^2 + \frac{h^2}{\Delta t}).$$

Preuve. On définit les opérateurs

$$\begin{aligned} \tau_E(\Delta t) &: f(x, v, t) \mapsto f(x, v - E(x)\Delta t), \\ \tau_E^h(\Delta t) &: f(x, v, t) \mapsto \pi f(x, v - E(x)\Delta t), \\ \tau_v(\Delta t) &: f(x, v, t) \mapsto f(x - v\Delta t, v), \end{aligned}$$

où π est l'opérateur d'interpolation (linéaire dans notre cas). L'opérateur τ_E^h peut s'exprimer également de manière plus concise $\tau_E^h = \pi \tau_E$.

On peut alors exprimer l'approximation de f au temps t_{n+1} en fonction de l'approximation de f au temps t_n de la manière suivante

$$f_h^{n+1} = \pi \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \pi \tau_v(\Delta t) \circ \pi \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) f_h^n.$$

L'erreur au temps t_{n+1} s'exprime par

$$e_{n+1} = f(x, v, t_{n+1}) - f_h^{n+1}(x, v).$$

On décompose l'erreur en trois parties :

1. l'erreur liée au transport des caractéristiques,
2. l'erreur de propagation à chaque étape,
3. le transport de l'erreur au temps précédent.

On a alors

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= f(x, v, t_{n+1}) - \tau_{E^{n+1}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) \\ &+ \tau_{E^{n+1}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) - \pi \tau_{E^{n+1}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \pi \tau_v(\Delta t) \circ \pi \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) \\ &\quad + \pi \tau_{E^{n+1}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \pi \tau_v(\Delta t) \circ \pi \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) (f(x, v, t_n) - f_h^n). \end{aligned}$$

Estimons maintenant les trois parties de l'erreur :

On commence par l'erreur liée au transport des caractéristiques. On a

$$\tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) = f\left(x, v - \frac{\Delta t}{2} E^n(x)\right),$$

puis

$$\tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) = f\left(x - v\Delta t, v - \frac{\Delta t}{2} E^n(x - v\Delta t)\right),$$

puis

$$\begin{aligned} &\tau_{E^{n+1}}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \circ \tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) f(x, v, t_n) \\ &= f\left(x - \left(v - \frac{\Delta t}{2} E^{n+1}(x)\right)\Delta t, v - \frac{\Delta t}{2} E^{n+1}(x) - \frac{\Delta t}{2} E^n\left(x - \left(v - \frac{\Delta t}{2} E^{n+1}(x)\right)\Delta t\right)\right) \\ &= f\left(x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} E^{n+1}(x), v - \frac{\Delta t}{2} (E^{n+1}(x) + E^n(x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} E^{n+1}(x)))\right). \end{aligned}$$

Comme f est conservée le long des caractéristiques, on a

$$f(x, v, t_{n+1}) = f(X(t_n; x, v, t_{n+1}), V(t_n; x, v, t_{n+1}), t_n),$$

où (X, V) sont les caractéristiques solutions de $\frac{dX}{dt} = V$ et $\frac{dV}{dt} = E(X(t), t)$. On a donc en intégrant la première équation entre t_n et t_{n+1} et la deuxième entre t et t_{n+1}

$$x - X(t_n; x, v, t_{n+1}) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} V(t) dt, \quad (4.15)$$

$$v - V(t_n; x, v, t_{n+1}) = \int_t^{t_{n+1}} E(X(t), t) dt, \quad (4.16)$$

$$= (t_{n+1} - t) E^{n+1}(x) + O(\Delta t^2), \quad (4.17)$$

avec la formule des rectangles à droite. Puis en utilisant la formule du point milieu pour approximer l'intégrale dans (4.15), et en utilisant (4.17) pour $t = t_{n+\frac{1}{2}}$ on obtient

$$x - X(t_n; x, v, t_{n+1}) = \Delta t V(t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\Delta t^3) = \Delta t \left(v - \frac{\Delta t}{2} E^{n+1}(x)\right) + O(\Delta t^3)$$

et donc

$$X(t_n; x, v, t_{n+1}) = x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} E^{n+1}(x) + O(\Delta t^3). \quad (4.18)$$

Ensuite en utilisant la formule des trapèzes pour approximer l'intégrale de (4.16) pour $t = t_n$ on obtient

$$v - V(t_n; x, v, t_{n+1}) = \frac{\Delta t}{2}(E^{n+1}(x) + E^n(X(t_n; x, v, t_{n+1}))) + O(\Delta t^3).$$

Or grâce à l'approximation (4.18) de $X(t_n; x, v, t_{n+1})$, et comme E est de classe C^2 on a

$$E^n(X(t_n; x, v, t_{n+1})) = E^n(x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}E^{n+1}(x)) + O(\Delta t^3).$$

Il s'ensuit que

$$V(t_n; x, v, t_{n+1}) = v - \frac{\Delta t}{2}(E^{n+1}(x) + E^n(x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}E^{n+1}(x))) + O(\Delta t^4).$$

Et finalement

$$\|f(t_{n+1}) - \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})f(t_n)\| \leq C\Delta t^3.$$

On passe maintenant à la deuxième partie de l'erreur.

$$\begin{aligned} & \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \tau_v(\Delta t) \circ \tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})f(t_n) - \pi\tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \pi\tau_v(\Delta t) \circ \pi\tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})f(t_n) \\ &= \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \tau_v(\Delta t) \circ (\tau_{E^n} - \pi\tau_{E^n})(\frac{\Delta t}{2})f(t_n) \\ & \quad + \tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ (\tau_v - \pi\tau_v)(\Delta t) \circ \pi\tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})f(t_n) \\ & \quad + (\tau_{E^{n+1}} - \pi\tau_{E^{n+1}})(\frac{\Delta t}{2}) \circ \pi\tau_v(\Delta t) \circ \pi\tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})f(t_n). \end{aligned}$$

Or par définition des opérateurs de transport, on a de manière évidente que $\|\tau_v(\Delta t)f\|_\infty = \|f\|_\infty$ et $\|\tau_E(\Delta t)f\|_\infty = \|f\|_\infty$. De plus pour l'interpolation linéaire on a $\|\pi\|_\infty \leq 1$ et

$$\|f - \pi f\|_\infty \leq Ch^2.$$

Il en résulte que chacun des termes composant l'erreur est borné par Ch^2 en norme L^∞ .

On peut maintenant passer à la troisième et dernière partie de l'erreur. Comme $\|\pi\|_\infty \leq 1$ et $\|\tau_E\|_\infty = \|\tau_v\|_\infty = 1$, on a

$$\|\pi\tau_{E^{n+1}}(\frac{\Delta t}{2}) \circ \pi\tau_v(\Delta t) \circ \pi\tau_{E^n}(\frac{\Delta t}{2})(f(x, v, t_n) - f_h^n)\|_\infty \leq \|f(t_n) - f_h^n\|_\infty = \|e_n\|_\infty.$$

Il en résulte que

$$\|e_{n+1}\|_\infty \leq C(\Delta t^3 + h^2) + \|e_n\|_\infty.$$

Ensuite, en cumulant les erreurs jusqu'au temps t_n avec $n \leq N = \frac{t}{\Delta t}$, on obtient

$$\|e_n\|_\infty \leq nC(\Delta t^3 + h^2) \leq CT(\Delta t^2 + \frac{h^2}{\Delta t}).$$

■

Cette démonstration donne dans un cas simplifié les idées utilisées pour démontrer la convergence de la méthode semi-Lagrangienne avec splitting pour les équations de Vlasov-Poisson. On trouvera la démonstration complète pour l'interpolation linéaire dans un article de N. Besse [8] et pour des interpolations d'ordre plus élevé dans un article de N. Besse et M. Mehrenberger [9].

4.3.5 La méthode semi-Lagrangienne conservative

On peut également dériver des méthodes semi-Lagrangiennes à partir de l'équation de Vlasov écrite sous forme conservative et qui seront alors de manière naturelle conservatives. Notons que la méthode semi-Lagrangienne classique avec splitting est également conservative, mais la vérification se fait a posteriori.

La méthode semi-Lagrangienne conservative s'apparente à une méthode de type volumes finis, mais le calcul des flux est remplacé par une intégration sur le volume occupé à l'instant t_n par la maille considérée. L'inconnue est dans ce cas la valeur moyenne de f sur une maille $\frac{1}{|V|} \int_V f dx dv$ et la méthode numérique se décompose en trois étapes :

1. Reconstruction d'une approximation polynomiale du degré souhaité à partir des valeurs moyennes par maille.
2. Calcul de l'origine des caractéristiques aboutissant aux points du maillage.
3. Calcul de la valeur moyenne par maille au temps t_{n+1} en utilisant que $\int_V f dx dv$ est conservé le long des caractéristiques.

Un schéma de principe est donné dans la figure 4.3.

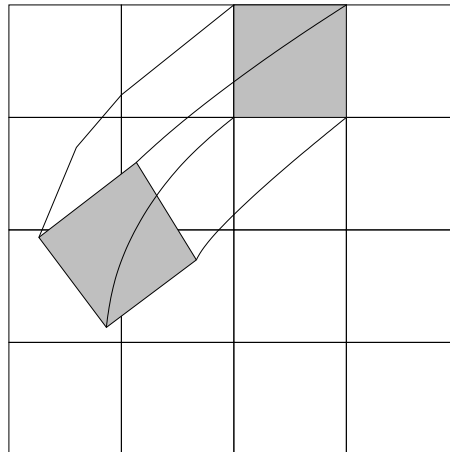


FIG. 4.3 – Schéma de principe de la méthode semi-Lagrangienne conservative.

Dans le cas où l'on fait des splitting 1D, on a la possibilité de manière assez simple de modifier la reconstruction pour imposer la positivité et un principe du maximum.

Détaillons un peu les 3 étapes de l'algorithme dans le cas 1D en commençant par l'étape 1. Cette étape consiste à construire sur chaque maille un polynôme de degré m qui a une valeur moyenne donnée. La technique classique qui permet de réaliser ceci est la méthode de reconstruction par primitive qui consiste à construire une primitive du polynôme qu'on cherche de la façon suivante :

Soit f_j^n la valeur moyenne fixée de f^n sur la maille $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ de longueur $h_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$. On veut construire un polynôme $p_m(x)$ de degré m tel que

$$\frac{1}{h_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p_m(x) dx = f_j^n.$$

Pour cela on va chercher $\tilde{p}_m(x)$ tel que $\frac{d}{dx}\tilde{p}_m(x) = p_m(x)$ de sorte que

$$h_j f_j^n = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p_m(x) dx = \tilde{p}_m(x_{j+\frac{1}{2}}) - \tilde{p}_m(x_{j-\frac{1}{2}}).$$

Soit $W(x) = \int_{x_{\frac{1}{2}}}^x \tilde{f}^n(x) dx$ une primitive de la fonction constante par morceaux \tilde{f}^n qui vaut f_j^n sur $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$. On a alors

$$W(x_{j+\frac{1}{2}}) = \sum_{k=1}^j h_k f_k^n$$

et

$$W(x_{j+\frac{1}{2}}) - W(x_{j-\frac{1}{2}}) = h_j f_j^n = \tilde{p}_m(x_{j+\frac{1}{2}}) - \tilde{p}_m(x_{j-\frac{1}{2}}).$$

On va donc prendre pour \tilde{p}_m un polynôme d'interpolation aux points $x_{j+\frac{1}{2}}$ de la fonction W ce qui entraînera que

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_j} \int_{x_{\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p_m(x) dx &= \frac{1}{h_j} (\tilde{p}_m(x_{j+\frac{1}{2}}) - \tilde{p}_m(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{h_j} (W(x_{j+\frac{1}{2}}) - W(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= f_j^n, \end{aligned}$$

qui est la propriété souhaitée.

Il reste à choisir le type d'interpolation. Le plus simple consiste à faire de l'interpolation de Lagrange en utilisant autant de points voisins nécessaires pour avoir le degré souhaité. On peut choisir ces points pour avoir un stencil centré ou pour minimiser les oscillations, en élargissant le stencil du côté où la variation est la plus faible (méthode de type ENO). On peut de manière alternative choisir une interpolation globale de type spline qui permettra d'avoir plus de régularité sur la reconstruction. En effet dans le cas d'une interpolation de Lagrange, la primitive sera juste continue et donc la fonction reconstruite, qui correspond au polynôme p_m sur chaque maille, sera discontinue à la traversée des mailles. Au contraire si on calcule la primitive avec des splines cubiques qui sont globalement de classe C^2 , la fonction reconstruite sera de classe C^1 .

La deuxième étape de la méthode consiste à calculer l'origine des caractéristiques aboutissant en chacun des noeuds du maillage. Cette étape est strictement identique à l'étape correspondante dans la méthode semi-Lagrangienne classique avec un calcul exact quand on fait du splitting et numérique sinon.

La troisième étape consiste à calculer la valeur moyenne par maille à l'instant t_{n+1} en utilisant la relation (dans le cas où on fait du splitting 1D) pour l'advection en x

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f^{n+1}(x, v_j) dx = \int_{X(t_n; x_{i-\frac{1}{2}}, v_j, t_{n+1})}^{X(t_n; x_{i+\frac{1}{2}}, v_j, t_{n+1})} f^n(x, v_j) dx,$$

où $f^n(x, v_j)$ est la fonction polynomiale sur chaque maille reconstruite dans l'étape 1 et de même pour l'advection en v . On pourra consulter [16] pour plus de détails.

Remarque 10 Dans le cas de la méthode semi-Lagrangienne avec splitting, où on a des advections à coefficient constant pour chaque étape du splitting, on peut montrer que la méthode semi-Lagrangienne classique est équivalente à la méthode semi-Lagrangienne conservative avec l'interpolation correspondante (de Lagrange) ou (splines).

4.3.6 Comparaison des schémas d'interpolation

On donne dans cette section quelques éléments de comparaison des différentes méthodes présentées dans ce cours. La figure 4.4 montre le facteur d'amplification et l'erreur de phase en fonction de la position du point où on interpole dans la maille. La première constatation est que les interpolations plus régulières (spline ou Hermite) sont très peu dissipatives quand le point d'interpolation est proche d'un point du maillage et dans le cas le pire où le point d'interpolation est au milieu de la maille la méthode par splines est la moins dissipative devant la méthode de Hermite et les méthodes de Lagrange. La méthode spline est encore la meilleure pour l'erreur de phase devant les méthodes de Lagrange et la méthode de Hermite.

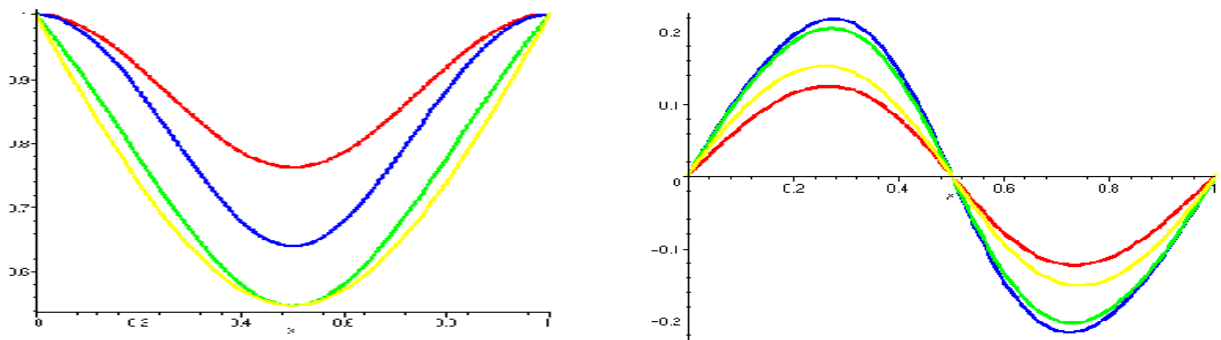


FIG. 4.4 – Facteur d'amplification et erreur de phase en fonction de la position dans la maille α pour un mode k fixé. Interpolation de Lagrange quadratique (jaune), cubique (vert), interpolation de Hermite cubique (bleu) et par spline cubique (rouge).

La figure 4.5 donne l'évolution des normes L^1 et L^2 de la fonction de distribution au cours du temps pour l'amortissement Landau. Ces deux quantités sont conservées exactement pour le système de Vlasov-Poisson. La non conservation est donc un phénomène purement numérique qu'il faut expliquer. Toutes les méthodes présentées sont basées sur le splitting et sont conservatives de sorte que $\int f(x, v, t) dx dv$ est conservée au cours du temps donc la non conservation de $\|f(t)\|_{L^1} = \int |f(x, v, t)| dx dv$ met en avant la non conservation de la positivité de la fonction de distribution. On remarque bien que pour la méthode PFC où la positivité est imposée dans la reconstruction la norme L^1 est exactement conservée. La non conservation de la norme L^2 est plus importante et met en relief la diffusion numérique des méthodes semi-Lagrangiennes qu'on ne peut pas éviter sur des temps de simulation longs. La diffusion est plus faible pour des interpolations d'ordre plus élevé et plus régulières. La figure 4.6 montre les mêmes propriétés de diffusion sur la norme L^2 pour l'instabilité double faisceau.

La figure 4.7 donne une indication sur le comportement des méthodes PIC et semi-Lagrangiennes. On compare la densité de charge pour un problème de transport d'un faisceau de particules en 2D obtenue par une méthode semi-Lagrangienne avec interpolation par splines cubiques et une méthode PIC avec un nombre de particules de plus en plus élevé du haut à gauche vers le bas à droite. Les temps de calcul des deux méthodes sont comparables pour la figure en bas à gauche qui correspond à 5 000 000 de particules. On remarque que les méthodes PIC permettent à un coût relativement faible d'obtenir une bonne idée du comportement qualitatif d'un phénomène non

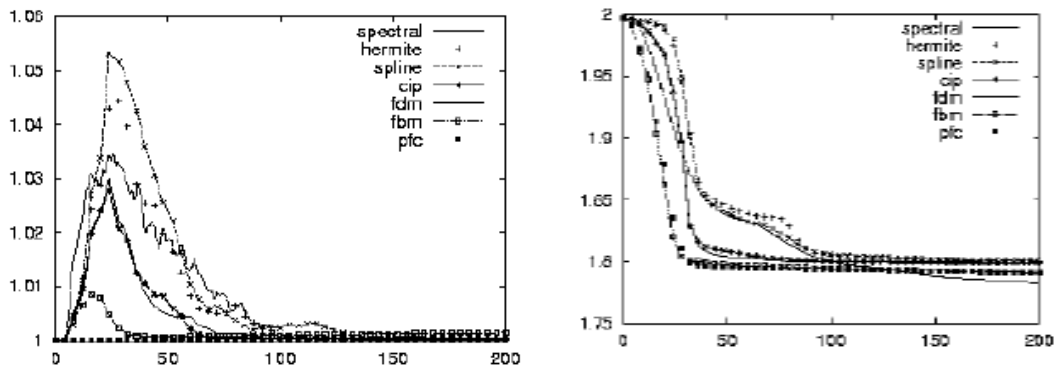


FIG. 4.5 – Evolution des normes L^1 et L^2 lors d'une simulation numérique de l'amortissement Landau. Légende : spectral = méthode de Fourier, hermite = interpolation de Hermite avec calcul numérique des dérivées, spline = interpolation par splines cubiques, cip = interpolation de Hermite avec advection des dérivées, fdm = méthode de différences finies, fbm = méthode conservative avec reconstruction de Lagrange quadratique, pfc = méthode conservative avec reconstruction de Lagrange cubique et conservation de la positivité.

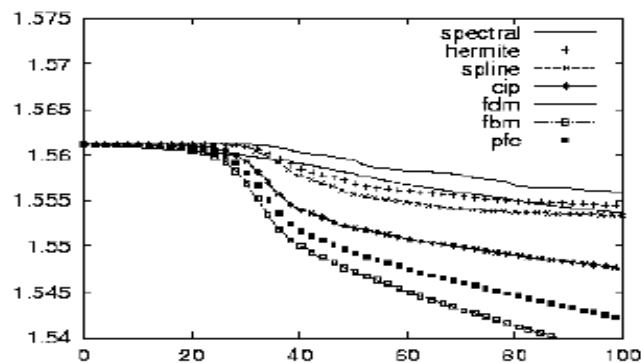


FIG. 4.6 – Evolution en temps de la norme L^2 pour l'instabilité double faisceau. Légende : spectral = méthode de Fourier, hermite = interpolation de Hermite avec calcul numérique des dérivées, spline = interpolation par splines cubiques, cip = interpolation de Hermite avec advection des dérivées, fdm = méthode de différences finies, fbm = méthode conservative avec reconstruction de Lagrange quadratique, pfc = méthode conservative avec reconstruction de Lagrange cubique et conservation de la positivité.

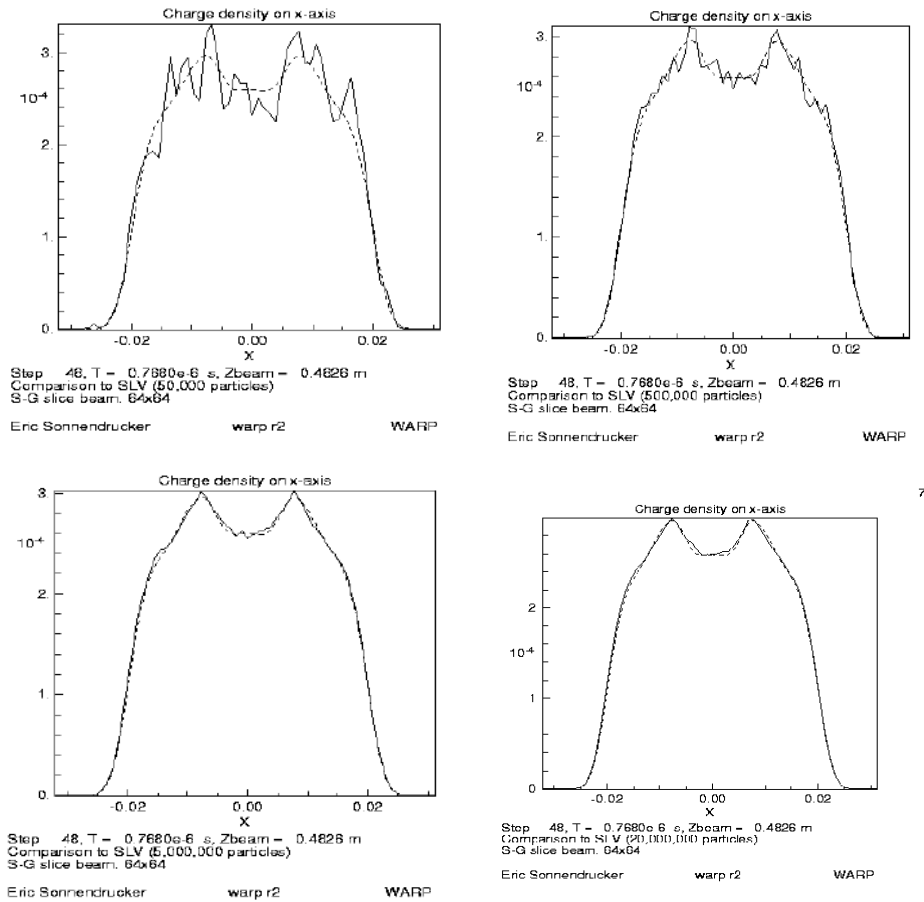


FIG. 4.7 – Comparaison de la méthode semi-Lagrangienne et de la méthode PIC pour différents nombres de particules. En haut à gauche 50 000 particules, en haut à droite 500 000 particules, en bas à gauche 5 000 000 de particules, en bas à droite 20 000 000 de particules.

linéaire assez fin comme ici l'évolution d'une onde de charge d'espace, mais pour avoir une description quantitative précise, il faut énormément de particules et on obtient en général une description fine des phénomènes, quand c'est possible, à un coût inférieur pour une méthode semi-Lagrangienne. Les deux méthodes sont donc destinées à être utilisées toutes les deux pour la simulation des plasmas car elles sont complémentaires.

4.4 Validation des codes Vlasov-Poisson 1D

La validation d'un code Vlasov-Poisson 1D commence bien sûr, au fur et à mesure de l'écriture du code, par la validation de toutes les étapes élémentaires du code. Les principes de validation consistent à comparer le comportement du code avec les propriétés mathématiques connues des équations et du schéma. En particulier, on s'assurera que les propriétés de conservation du schéma sont vérifiées à la précision machine, on comparera la solution calculée avec une solution analytique et on vérifiera que l'ordre numérique du schéma correspond bien à l'ordre théorique.

Pour les codes semi-Lagrangiens, il faudra vérifier l'interpolation, le solveur de Poisson et éventuellement la résolution numérique des caractéristiques.

Une fois toutes les briques de base validées, on passe à la validation du code global en utilisant les solutions connues de Vlasov-Poisson linéarisé. Nous considérerons deux cas tests classiques : l'amortissement Landau et l'instabilité double faisceau.

Le champ électrique solution de Vlasov-Poisson linéarisé s'écrit

$$\hat{E}(k, t) = \sum_j \text{Res}_{\omega=\omega_j} \tilde{E}(k, \omega) e^{-i\omega t},$$

où nous avons écrit

$$\tilde{E}(k, \omega) = \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)}$$

et les ω_j sont les racines de $D(k, \omega) = 0$ pour k fixé. Il y a en général plusieurs racines de $D(k, \omega)$. On peut calculer ces racines à l'aide de la fonction `fsolve` de Maple, mais la racine trouvée dépend de l'initialisation choisie, il est donc difficile de toutes les trouver. En pratique seule la racine dominante (i.e. celle de partie imaginaire la plus grande) va persister au cours du temps. Les autres vont devenir très rapidement négligeables. Il suffit donc en pratique de calculer la racine dominante qu'on trouve assez rapidement.

Pour calculer les résidus on peut écrire le développement de Taylor de $D(k, \omega)$ au voisinage de ω_j

$$D(k, \omega) = D(k, \omega_j) + (\omega - \omega_j) \frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j) + O((\omega - \omega_j)^2),$$

et donc, si ω_j est racine simple, on a $D(k, \omega_j) = 0$ et $\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j) \neq 0$. Il en résulte que

$$\text{Res}_{\omega=\omega_j} \left(\frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t} \right) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_j} ((\omega - \omega_j) \frac{N(k, \omega)}{D(k, \omega)} e^{-i\omega t}) = \frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)} e^{-i\omega_j t}.$$

4.4.1 L'amortissement Landau

La condition initiale de l'amortissement Landau correspond à

$$f_0(x, v) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}, \quad L = 4\pi.$$

Dans les simulations numériques présentées plus loin nous prenons $\epsilon = 0,001$. Il s'agit physiquement d'une petite perturbation d'un équilibre Maxwellien. Cet équilibre est stable et la fonction de distribution revient à l'équilibre après la perturbation.

Cela correspond au cas que nous avons traité dans le chapitre 3 avec comme fonction d'équilibre $f^0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$ et comme perturbation initiale $f_0^1(x, v) = \epsilon \cos(kx) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$. Il en résulte que la perturbation associée de la densité de charge vaut $\rho_0^1(x) = \int f_0^1(x, v) dv = \epsilon \cos(kx)$, de sorte que seuls les modes de Fourier -1 et 1 associées à $k = \pm \frac{2\pi}{L}$ sont non nuls et valent $\frac{1}{2}$. Ainsi $g(k)$ apparaissant dans (3.21) vaut $\frac{1}{2}$ pour ces valeurs de k et est nul sinon. Puis, comme le champ électrique vérifie $\frac{dE}{dx}(x, 0) = \rho_0^1(x)$, on a $E(x, 0) = \frac{\epsilon}{k} \sin(kx)$ qui a les mêmes modes de Fourier non nuls valant $\frac{1}{2}$ pour $k' = 1$ et $-\frac{1}{2}$ pour $k' = -1$.

Nous avons vu (3.20) que

$$D(k, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{k^2 v_{th}^2} Z' \left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k} \right),$$

et que (3.21)

$$N(k, \omega) = g(k) \frac{n_0 e}{k^2 \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2} v_{th}} Z\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} v_{th}}\right).$$

Il en résulte que

$$\frac{N(k, \omega)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega)} = -2g(k) \frac{m}{e} k v_{th}^2 \frac{Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}{Z''\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)} \quad (4.19)$$

$$= -g(k) \frac{m}{e} k v_{th}^2 \frac{Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}{2 \frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k} - \left(1 - \frac{\omega^2}{v_{th}^2 k^2}\right) Z\left(\frac{\omega}{\sqrt{2} v_{th} k}\right)}. \quad (4.20)$$

Donnons un tableau des racines dominantes de $D(k, \omega) = 0$ et la valeur de $\frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)}$ associée pour plusieurs valeurs de k :

k	ω_j	$\frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)}$
0, 5	$\pm 1, 4156 - 0, 1533i$	$0, 3677 e^{\pm i 0, 536245}$
0, 4	$\pm 1, 2850 - 0, 0661i$	$0, 424666 e^{\pm i 0, 3357725}$
0, 3	$\pm 1, 1598 - 0, 0126i$	$0, 63678 e^{\pm i 0, 114267}$
0, 2	$\pm 1, 0640 - 5, 510 \times 10^{-5}i$	$1.129664 e^{\pm i 0, 00127377}$

Notons $\omega_r = \Re(\omega_j)$, $\omega_i = \Im(\omega_j)$, r l'amplitude de $\frac{N(k, \omega_j)}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(k, \omega_j)}$ et φ sa phase. On note qu'on a toujours pour une racine de la forme $\omega_r + i\omega_j$ associée à $re^{i\varphi}$, une racine de la forme $-\omega_r + i\omega_j$ associée à $re^{-i\varphi}$. Donc en ne considérant que les deux racines pour lesquelles ω_i est le plus grand, on a

$$\begin{aligned} \hat{E}(k, t) &\approx re^{i\varphi} e^{-i(\omega_r + i\omega_i)t} + re^{-i\varphi} e^{-i(-\omega_r + i\omega_i)t}, \\ &= re^{\omega_i t} (e^{-i(\omega_r t - \varphi)} + e^{i(\omega_r t - \varphi)}), \\ &= 2re^{\omega_i t} \cos(\omega_r t - \varphi). \end{aligned}$$

Ensuite, on peut vérifier que $\hat{E}(-k, t) = -\hat{E}(k, t)$, de sorte que

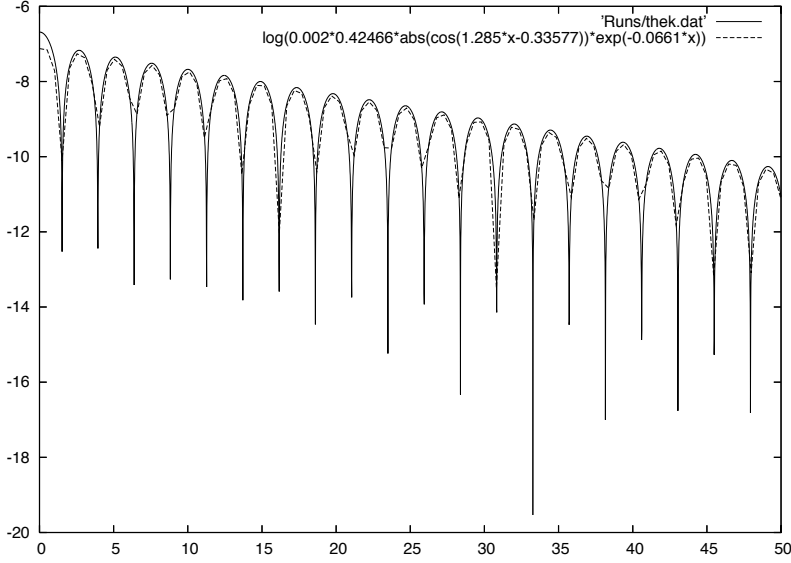
$$E(x, t) \approx 4\epsilon re^{\omega_i t} \sin(kx) \cos(\omega_r t - \varphi).$$

Notons que ceci n'est pas la solution complète, car nous n'avons considéré que le mode dominant. Néanmoins, il s'avère qu'après environ une période en temps, ceci représente une excellente approximation de E car les autres modes deviennent très rapidement négligeables devant le mode dominant.

On peut mettre cette formule en application en considérant par exemple la première ligne du tableau, le champ électrique pour $k = 0, 5$ sera assez rapidement (après que les termes correspondant aux autres racines soient devenus négligeables) de la forme

$$E(x, t) = 4\epsilon \times 0, 3677 e^{-0, 1533t} \sin(0, 5x) \cos(1, 4156t - 0, 536245).$$

On superpose dans la figure 4.8 la solution analytique du mode dominant du champ électrique pour $k = 0, 4$ ($\hat{E}(k, t) = 0, 002 \times 0, 424666 e^{0, 0661t} \cos(1, 2850t - 0, 3357725)$) et la solution calculée numériquement par une méthode semi-Lagrangienne avec un maillage de 128 points en x et en v . Le maillage en v a été tronqué de manière symétrique pour $v_{max} = 10$

FIG. 4.8 – L’amortissement Landau pour $k = 0, 4$.

Pour les mêmes paramètres numériques on représente dans la figure 4.9 la même solution numérique et on trace également la pente correspond à l’amortissement plutôt que la solution complète. On remarque que pour un temps de l’ordre de 80 l’amortissement est brutalement interrompu et le champ électrique revient quasiment à son amplitude initiale. Il s’agit d’un phénomène purement numérique lié à l’utilisation d’un maillage uniforme en vitesse pour un problème périodique en espace. Ce phénomène est connu sous le nom de récurrence de Poincaré. Dans notre cas, on peut l’analyser en considérant l’équation de transport libre

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

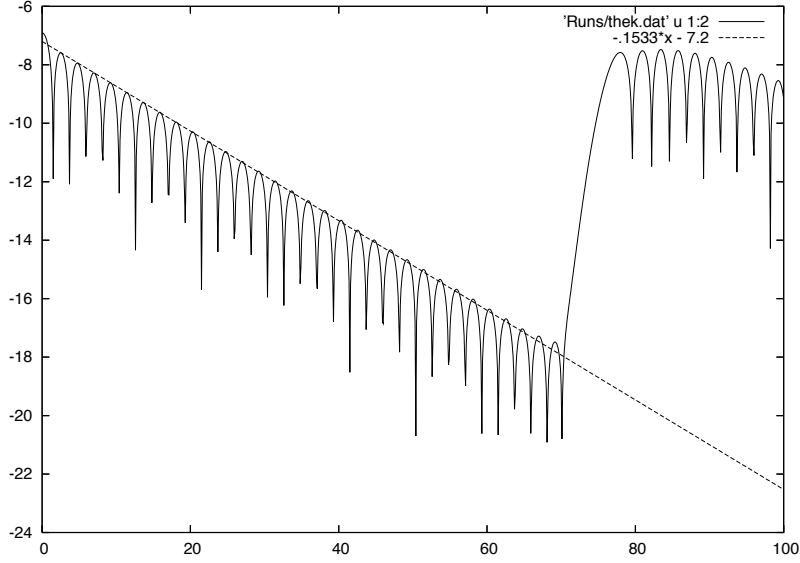
Le domaine étant périodique en x , on passe en série de Fourier. Le mode k vérifie alors $\frac{df_k}{dt} - \frac{2i\pi k}{L} v f_k = 0$. D’où $f_k(v, t) = f_k(v, 0) e^{\frac{2i\pi k}{L} vt}$. Puis comme $v = j\Delta v$, f_k va être périodique en t de période $T_R = \frac{L}{\Delta v}$. Dans notre cas, on a $L = 4\pi$ et $\Delta v = 20/127 = 0,1574$. Il en résulte que $T_R \approx 79,8$. Ce qui correspond bien à la valeur observée.

4.4.2 L’instabilité double faisceau

L’instabilité double faisceaux correspond à deux faisceaux de vitesses moyennes différentes qui se rencontrent. On considère ici deux faisceaux se déplaçant respectivement à des vitesses moyennes v_0 et $-v_0$. En fonction de k et de v_0 cette configuration peut-être stable ou instable.

La condition initiale correspondant à cette configuration physique est

$$f_0(x, v) = (1 + 0.001 \cos(kx)) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}} \right), \quad L = \frac{2\pi}{k}.$$

FIG. 4.9 – L’amortissement Landau pour $k = 0, 5$.

On va utiliser la relation de dispersion pour plusieurs faisceaux (3.23) dans le cas de deux faisceaux de même vitesse thermique et de vitesses moyennes opposées. Elle devient alors

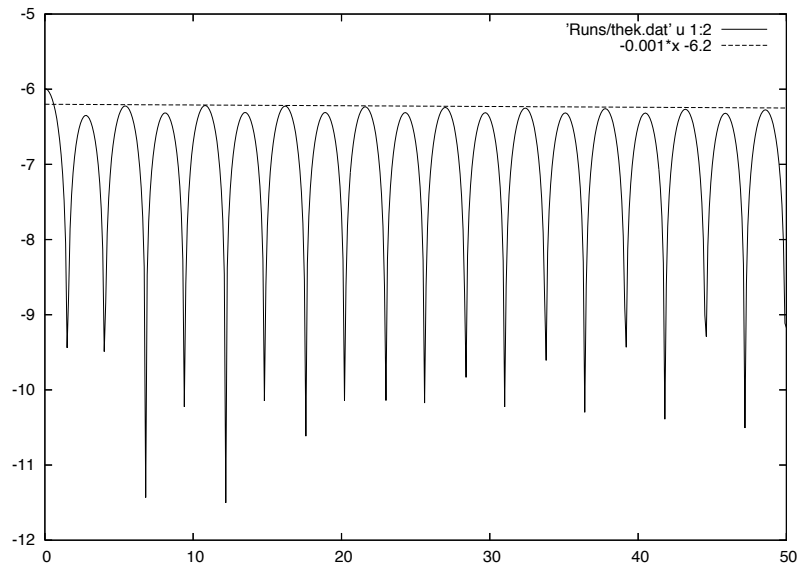
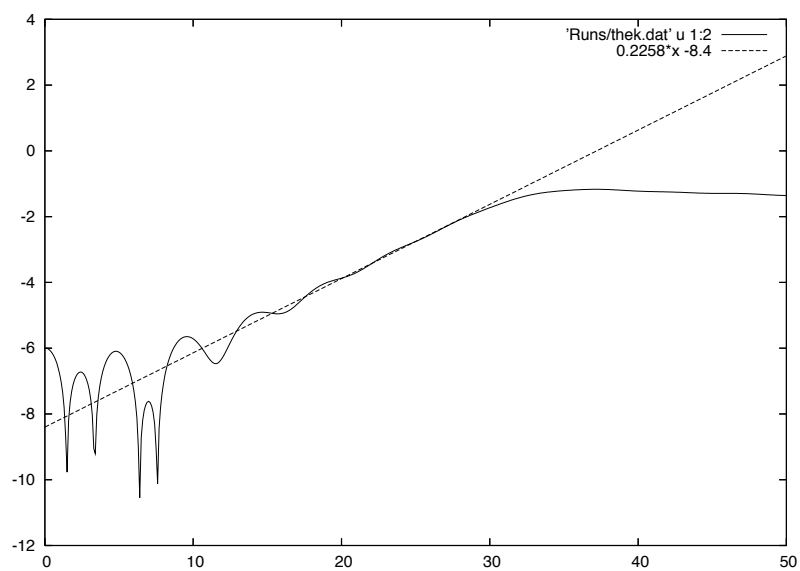
$$D(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2k^2 v_{th}^2} \left[2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} - \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} - v_0)^2}{2v_{th}^2}} (i - \operatorname{erfi}(\frac{\frac{\omega}{k} - v_0}{\sqrt{2}v_{th}})) \right. \\ \left. \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{v_{th}k} + \frac{v_0}{v_{th}} \right) e^{-\frac{(\frac{\omega}{k} + v_0)^2}{2v_{th}^2}} (i - \operatorname{erfi}(\frac{\frac{\omega}{k} + v_0}{\sqrt{2}v_{th}})) \right],$$

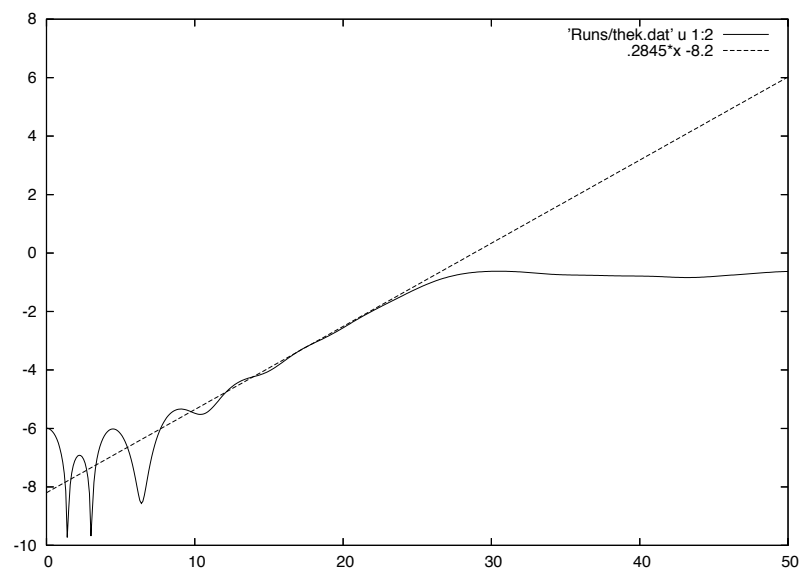
Pour des valeurs de k et de v_0 données $D(k, \omega)$ admet plusieurs racines en ω . On en donne quelques unes qui sont dominantes pour $k = 0.2$ et plusieurs valeurs de v_0 dans le tableau 4.1. En fonction de la valeur de v_0 l’instabilité est plus ou moins forte ou la configuration peut être stable.

v_0	ω	ω
1, 3	0, 02115 <i>i</i>	1, 1648 - 0, 00104 <i>i</i>
2, 4	0, 2258 <i>i</i>	1, 3390 - 0, 00242 <i>i</i>
3, 0	0, 2845 <i>i</i>	1, 446 - 0, 00299 <i>i</i>

TAB. 4.1 – Racines de la relation de dispersion pour l’instabilité double faisceau.

On remarque que les solutions stables sont oscillantes avec un très léger amortissement et que les solutions instables correspondent à des racines imaginaires pures et donc n’oscillent pas.

FIG. 4.10 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 1, 3$.FIG. 4.11 – L'instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 2, 4$.

FIG. 4.12 – L’instabilité double faisceau pour $k = 0, 2$ et $v_0 = 3$.

Annexe A

Rappels d'analyse complexe et transformée de Laplace

Nous rappelons ici les éléments essentiels nécessaires au calcul de la solution analytique de l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée. En ce qui concerne l'analyse complexe, le lecteur pourra se référer pour une description plus complète aux ouvrages d'Ahlfors [2] et de Cartan [10].

A.1 Fonctions analytiques

Définition 2 On dit qu'une fonction de $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique (ou holomorphe) si elle admet une dérivée sur tout son domaine de définition.

Proposition 7 (Propriétés des fonctions analytiques)

La somme et le produit de deux fonctions analytiques sont analytiques.

Le quotient f/g de deux fonctions analytiques f et g est analytique en tout point où g ne s'annule pas.

La composée de deux fonctions analytiques est analytique.

Proposition 8 (Caractérisation de fonctions analytiques) Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z) = u(z) + iv(z)$ avec $z = x + iy$, $u(z) = \Re(f(z))$ et $v(z) = \Im(f(z))$. Alors f est analytique si et seulement si $(u, v) \in C^1(\mathbb{C})^2$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (\text{A.1})$$

Les équations (A.1) sont appelées les équations de Cauchy-Riemann.

A.2 Intégration sur un contour

Soit γ un arc du plan complexe paramétré par $t \mapsto z(t)$ pour $t \in [a, b]$. On définit alors l'intégrale complexe le long de γ par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Exemple. On veut calculer

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

où γ est le cercle de centre a et de rayon R . Une paramétrisation de γ est donc donnée par $z(\theta) = a + Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. On a alors $z'(\theta) = iRe^{i\theta}$. Donc

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} = 2\pi.$$

Théorème 4 Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique dans le domaine Ω et γ est un contour de Ω , alors $\int_{\gamma} f(z) dz$ dépend uniquement des extrémités de γ .

Théorème 5 (Cauchy) Soit γ une courbe fermée et f une fonction analytique sur une région contenant γ et son intérieur. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Définition 3 Soit f une fonction de la forme

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z),$$

avec φ analytique au voisinage de a . Alors on appelle résidu de f en a , et on note $\text{Res}_{z=a} f(z)$, le terme c_{-1} .

Dans le cas fréquent où f admet un pôle simple en a , on a

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \varphi(z), \quad \text{et } \text{Res}_{z=a} f(z) = f(z)(z-a)|_{z=a}.$$

Définition 4 On définit l'indice du point a par rapport à la courbe fermée γ par

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$$

Remarque 11 L'indice de γ par rapport à a , $n(\gamma, a)$ correspond au nombre de tours que fait la courbe γ autour du point a .

DESSIN

Théorème 6 (Théorème des résidus) Soit Ω un ouvert simplement connexe du plan complexe et soit f une fonction analytique sur Ω en dehors de p singularités isolées notées a_j , $j = 1, \dots, p$. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j=1}^p n(\gamma, a_j) \text{Res}_{z=a_j} f(z) \quad (\text{A.2})$$

pour toute courbe fermée γ qui ne passe par aucune des singularités.

Remarque 12 En pratique, on va construire des contours qui tournent soit une fois, soit aucune autour d'un pôle donné, de sorte que $n(\gamma, a_j) = 1$ si a_j est à l'intérieur de γ et 0 sinon. La formule des résidus peut alors s'écrire de manière plus simple

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{j | a_j \text{ intérieur}} \text{Res}_{z=a_j} f(z).$$

La somme est faite uniquement sur les j tels que a_j est à l'intérieur de la courbe γ .

A.3 Transformée de Laplace

Pour une discussion détaillée de la transformée de Laplace on pourra consulter les ouvrages de Schwartz [22] ou de Bellman-Roth [6].

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ telle qu'il existe des constantes réelles a et b telles que $|f(t)| < ae^{bt}$. Alors

$$\int_0^{+\infty} |e^{st} f(t)| dt \leq a \int_0^{+\infty} |e^{(b-s)t}| dt < +\infty$$

pour $\Re(s) > b$. On définit dans ce cas pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > b$, la transformée de Laplace $\tilde{f}(s)$ de f par

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (\text{A.3})$$

Remarque 13 La transformée de Laplace d'une fonction réelle est à valeurs dans \mathbb{C} et est définie dans le demi-plan $\Re(s) > b$ qui peut-être \mathbb{C} tout entier ou l'ensemble vide selon le comportement pour les temps grands de f .

Le théorème suivant donne un cadre pratique dans lequel la transformée de Laplace peut être inversée.

Théorème 7 On suppose qu'il existe deux constantes réelles M et R telles que

- i) \tilde{f} est analytique dans le demi-plan $\Re(s) > R$,
- ii) $|s\tilde{f}(s)| \leq M$ pour tout s tel que $|s| > R$.

Alors, si on définit

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{u-i\infty}^{u+i\infty} \tilde{f}(s)e^{st} ds \quad \forall t > 0, u > R, \quad (\text{A.4})$$

$\tilde{f}(s)$ est la transformée de Laplace de f .

Exemple d'application. On va montrer sur un exemple comment résoudre une équation différentielle à l'aide de la transformée de Laplace. On considère l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} + y = 1, \quad y(0) = y_0.$$

On commence par appliquer la transformée de Laplace à l'équation différentielle en multipliant par e^{st} et en intégrant entre 0 et $+\infty$. En supposant $\Re(s) > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{dt} e^{-st} dt = [ye^{-st}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} ye^{-st} dt = -y_0 + s\tilde{y}.$$

D'autre part, $\int_0^{+\infty} ye^{-st} dt = \tilde{y}(s)$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

La transformée de Laplace de l'équation différentielle s'écrit donc

$$-y_0 + (s+1)\tilde{y} = \frac{1}{s},$$

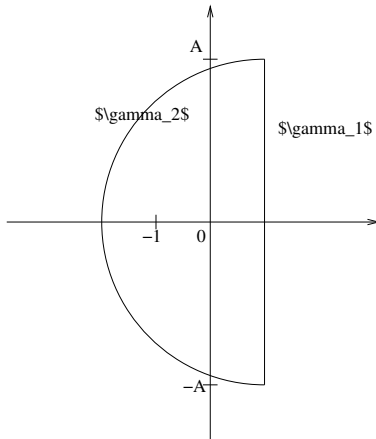


FIG. A.1 – Contour pour le calcul de l'intégrale.

et donc

$$\tilde{y}(s) = \frac{y_0 + \frac{1}{s}}{1 + s} = \frac{1 + sy_0}{s(s+1)}.$$

On remarque que \tilde{y} est analytique en dehors des deux pôles que sont 0 et -1 . Pour calculer la transformée de Laplace inverse à l'aide de la formule (A.4), il faut donc prendre $u > 0$ pour avoir

$$y(t) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{u-A}^{u+iA} \frac{1 + sy_0}{s(s+1)} e^{st} ds. \quad (\text{A.5})$$

on va noter $g(s) = \frac{1+sy_0}{s(s+1)} e^{st}$ la fonction à intégrer. On va calculer cette intégrale à l'aide d'un contour qui se referme vers la gauche pour que la partie additionnelle s'annule de sorte à pouvoir utiliser la formule des résidus (A.2). On paramétrise la droite γ_1 de partie réelle u par $\theta \mapsto u + i\theta$, $\theta \in [-A, A]$, et le demi-cercle γ_2 refermant le contour par la gauche par $\theta \mapsto u + Ae^{i\theta}$, $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, voir la figure A.1. On suppose que $A > u + 1$ de sorte que les deux pôles soient à l'intérieur du demi-cercle. On a alors

$$\int_{\gamma_2} g(s) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1 + (u + Ae^{i\theta})y_0 e^{u+ Ae^{i\theta}}}{(u + Ae^{i\theta})(u + 1 + Ae^{i\theta})} iAe^{i\theta} dt.$$

On peut majorer le membre de gauche par

$$Ce^u \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{A \cos t} dt$$

pour A assez grand, et ce terme tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$ car $\cos t < 0$ pour $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. D'autre part en appliquant le théorème des résidus, on a

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} g(s) = 2i\pi (\text{Res}_{s=0} g(s) + \text{Res}_{s=-1} g(s)) = 2i\pi (1 - (1 - y_0)e^{-t}).$$

Donc en prenant la limite quand A tend vers $+\infty$ dans (A.5), on obtient

$$y(t) = 1 - (1 - y_0)e^{-t}$$

qui est bien la solution de l'équation différentielle étudiée.

Bibliographie

- [1] S. J. Allfrey, R. Hatzky, A revised delta f algorithm for nonlinear PIC simulations, *Comp. Phys. Commun.* 154 (2) (2003) 98-104.
- [2] L. Ahlfors. *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.
- [3] H. Amman, *Ordinary differential equations*, De Gruyter, New-York 1990
- [4] W. B. Bateson, D. W. Hewett, *Grid and particle hydrodynamics : beyond hydrodynamics via fluid element particle-in-cell*. *J. Comput. Phys.* 144 (1998), no. 2, 358–378.
- [5] R. Barthelmé, Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell, thèse de l'Université Louis Pasteur, 2005, spécialité Mathématiques. <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2005/05014.shtml>
- [6] R.E. Bellman, R.S. Roth. *The Laplace Transform*. World Scientific, 1984.
- [7] C. K. Birdsall, A. B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, Institute of Physics, Bristol (1991) p. 359.
- [8] N. Besse, Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one-dimensional Vlasov-Poisson system. *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2004), no. 1, 350–382.
- [9] N. Besse, M. Mehrenberger, Convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system. *Math. Comp.* 77 (2008), no. 261, 93–123.
- [10] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, Paris, 1961.
- [11] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1997.
- [12] F. Chen, *Introduction to plasma physics and controlled fusion*, Springer New-York 1984.
- [13] C.Z. Cheng, G. Knorr, The integration of the Vlasov equation in configuration space, *J. Comput. Phys.* 22 (1976) 330-351.
- [14] Albert Cohen, *Numerical Analysis of Wavelet Methods*, North-Holland 2003.
- [15] G.-H. Cottet, P.-A. Raviart, *Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations*. *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), no. 1, 52–76.
- [16] F. Filbet, E. Sonnendrücker, P. Bertrand, Conservative numerical schemes for the Vlasov equation. *J. Comput. Phys.* 172 (2001), no. 1, 166–187.
- [17] B. D. Fried and S. D. Conte, *The Plasma Dispersion Function*. Academic, New York, 1961.
- [18] R. W. Hockney and J. W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. Adam Hilger, Philadelphia, 1988.

- [19] C.D. Munz, R. Schneider, E. Sonnendrücker, U. Voss, *Maxwell's equations when the charge conservation is not satisfied*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 328, Série I (1999) pp. 431-436.
- [20] C.-D. Munz, P. Omnes, R. Schneider, E. Sonnendrücker, U. Voss (2000) : *Divergence correction techniques for Maxwell solvers based on a hyperbolic model*, J. Comput. Phys. 161, no. 2, pp. 484-511.
- [21] H. Neunzert, J. Wick, *The convergence of simulation methods in plasma physics*. Mathematical methods of plasmaphysics (Oberwolfach, 1979), 271–286, Methoden Verfahren Math. Phys., 20, Lang, Frankfurt, 1980.
- [22] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1961.
- [23] T.H. Stix, *Waves in plasma*, American Institute of Physics, 1992.
- [24] H. D. Victory, Jr., Edward J. Allen, *The convergence theory of particle-in-cell methods for multidimensional Vlasov-Poisson systems*. SIAM J. Numer. Anal. 28 (1991), no. 5, 1207–1241.
- [25] J. Villasenor and O. Buneman, *Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers*, Comput. Phys. Commun. 69 (1992) pp. 306-316.
- [26] S. Wollman, *On the approximation of the Vlasov-Poisson system by particle methods*. SIAM J. Numer. Anal. **37** no. 4 (2000), pp. 1369–1398.