

ACTIVITÉ DE RECHERCHE

RAREȘ RĂSDEACONU

Les thèmes de ma recherche se situent à l'intersection de la géométrie algébrique avec la géométrie différentielle et la topologie symplectique. Le sujet principal est de comprendre comment les structures complexes sur une variété différentielle donnée sont liées à la structure \mathcal{C}^∞ sous-jacente. Une idée directrice de mon travail est la relation entre ces structures. Comme second thème de recherche, j'essaie d'apporter ma contribution à un domaine de recherche classique mais avec de nouvelles méthodes : la géométrie énumérative réelle. Mes contributions sont les suivantes :

(1) Structures exotiques (différentielles ou complexes) et applications :

- (a) J'ai utilisé des résultats de topologie algébrique pour construire des exemples de variétés de Kähler difféomorphes, mais avec des dimensions de Kodaira différentes (voir Section 1.1 et [Ra1]).
- (b) J'ai étudié l'interprétation dans le contexte algébrique du blow-down rationnel, une construction qui est spécifique aux variétés symplectiques de dimension quatre. J'ai obtenu des résultats à l'égard de l'existence d'exemples intéressants de surfaces complexes de type Kähler (voir Section 2.1 et [RS1, IRS, RS2]).

(2) Géométrie kählerienne et la théorie des modèles minimaux :

- (a) J'ai abordé des problèmes de géométrie kählerienne en utilisant la théorie des modèles minimaux et la théorie des variétés rationnellement connexes en dimension complexe trois. De la sorte, j'ai étudié l'existence et les propriétés des métriques de Kähler à courbure scalaire totale positive (voir Section 1.2 et [Ra2]).

(3) Géométrie énumérative réelle :

- (a) J'ai étudié le comportement asymptotique des invariants de Gromov-Witten- Welschinger pour un certain nombre de 4-variétés réelles algébriques, en présence d'un petit nombre de contraintes réelles (voir Section 2.2 et [RW]).
- (b) J'ai défini des invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs en dimension quatre (voir Section 2.2 et [RS0]).

Dans la section suivante je décrirai les résultats démontrés dans ma thèse, suivis dans la section 2 d'une description des résultats que j'ai obtenus plus récemment. Je finirai par une section sur mes projets de recherche.

1. RÉSULTATS OBTENUS PENDANT LA THÈSE

1.1. Topologie \mathcal{C}^∞ et dimension de Kodaira. Il s'agit d'étudier comment la dimension de Kodaira d'une structure presque complexe intégrable sur une variété lisse donnée est liée à la structure \mathcal{C}^∞ sous-jacente. J'ai donné des exemples de variétés de Kähler ayant le comportement suivant :

Théorème 1.1. [Ra1] *Pour tout $d, d' \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3\}$, $d \neq d'$ à l'exception de $(-\infty, 0)$ et $(0, 3)$, il y a un nombre infini de paires de 3-variétés Kähleriennes compactes, difféomorphes (M, M') , ayant le même nombre de Chern, mais des dimensions de Kodaira différentes : $Kod(M) = d$ et $Kod(M') = d'$.*

Pour les surfaces complexes la dimension de Kodaira est un invariant C^∞ [FQ]. Comme conséquence immédiate du théorème précédent, on obtient une réponse à la question de l'invariance C^∞ de la dimension de Kodaira en dimension complexe trois.

Corollaire 1.2. [Ra1] *Pour des variétés kähleriennes de dimension trois, la dimension de Kodaira n'est pas un invariant de la structure lisse.*

Les exemples que j'ai trouvés fournissent également des réponses à des questions concernant le type de déformation. Rapellons que des variétés équivalentes par déformation sont difféomorphes par un difféomorphisme qui préserve l'orientation. La question réciproque est connue sous le nom de problème $DIF \Rightarrow DEF$. Il existe des contre-exemples compliqués pour ce problème en dimension complexe deux ou plus. Puisqu'une propriété essentielle de la dimension de Kodaira est son invariance par petites déformations, le Théorème 1.1 fournit des contre-exemples simples au problème $DIF \Rightarrow DEF$ en dimension complexe trois.

Dans le même esprit, j'ai généralisé les résultats de Ruan [Ru] qui a trouvé des exemples de variétés kähleriennes de dimension complexe trois de dimension et de Kodaira négative qui sont difféomorphes, mais non équivalentes par déformation.

Théorème 1.3. [Ra1] *Pour tout $d \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3\}$, il existe un nombre infini de paires (M, M') de variétés Kähleriennes de dimension 3 compactes, difféomorphes, ayant le même nombre de Chern et la même dimension de Kodaira, $Kod(M) = Kod(M') = d$, mais qui ne sont pas équivalentes par déformation.*

1.2. Sur la courbure scalaire totale des variétés de Kähler de dimension trois. Une des conditions les plus faibles que l'on peut imposer à une métrique sur une variété riemannienne est la positivité de sa courbure scalaire totale. Toutefois, cette condition devient plus forte lorsque la métrique est kählerienne. Plus précisément, pour une variété complexe et compacte, l'existence d'une métrique kählerienne à courbure scalaire totale positive implique la négativité de la dimension de Kodaira. La question de savoir si cette condition est aussi suffisante est encore ouverte.

J'ai étudié l'existence et les propriétés des métriques de Kähler à courbure scalaire totale positive sur des variétés de dimension de Kodaira négative d'un point de vue algébrique. Dans ce cadre, les questions à explorer sont l'existence et les propriétés des fibrés en droites amples H qui satisfont $K_X \cdot H^2 < 0$, où K_X représente le fibré canonique de X . Les meilleurs résultats que j'ai obtenus s'appliquent à une classe de variétés qui a été étudiée de manière intensive dans les dernières années. Il s'agit des *variétés rationnellement connexes* [KMM], i.e. des variétés projectives lisses, sur lesquelles deux points quelconques peuvent toujours être joints par une courbe rationnelle. Il est important de souligner que, dans ce cas, il y a une équivalence entre chercher des métriques kähleriennes et chercher des fibrés amples. Un premier résultat que je voudrais mentionner est :

Théorème 1.4. [Ra2] *Pour des variétés rationnellement connexes l'existence de métriques Kähleriennes à courbure scalaire totale positive est une propriété ouverte.*

La question de l'existence est plus délicate ; elle peut être liée à des résultats profonds de Miyaoka et Mori. On connaît la réponse - affirmative - en dimensions 1 et 2, à l'aide des résultats de

classification bien connus. Comme dans le cas des surfaces complexes, l'idée est d'approcher ce problème à l'aide de la théorie des modèles minimaux¹. Cela demande de travailler avec des variétés singulières.

Dans le cas d'une variété projective donnée avec le diviseur canonique K_X \mathbb{Q} -Cartier, nous dirons que la propriété \mathcal{P}_X est vraie s'il existe un fibré en droites ample H sur X tel que $K_X \cdot H^2 < 0$.

Soit X une variété de dimension trois, localement \mathbb{Q} -factorielle de dimension Kodaira $\text{Kod}(X) = -\infty$, qui a au plus des singularités terminales. Dans ce cas il existe une variété localement \mathbb{Q} -factorielle X_{min} ayant au plus des singularités terminales, et une application birationnelle $\Phi : X \dashrightarrow X_{min}$, où X_{min} est une fibration del Pezzo, un fibré conique ou une variété \mathbb{Q} -Fano. On voit facilement que $\mathcal{P}_{X_{min}}$ est vraie, mais il est difficile de montrer que la propriété \mathcal{P} se relève à X .

Comme premier pas vers une meilleure compréhension du problème, j'ai prouvé la proposition suivante :

Proposition 1.5. [Ra2] *Soit $p : X' \rightarrow X$ une résolution de singularités d'une variété projective \mathbb{Q} -factorielle de dimension 3 à singularités terminales, qui est un isomorphisme en dehors du lieu singulier de X . Alors $\mathcal{P}_{X'}$ est vraie si et seulement si \mathcal{P}_X est vraie.*

Cela montre qu'il sera suffisant de montrer que \mathcal{P} est une propriété birationnelle. Nous pouvons utiliser maintenant le théorème de factorisation faible qui dit que toute application birationnelle entre deux variétés lisses (projectives) peut être décomposée en une suite finie d'éclatements et de blow-downs de variétés (projectives), avec des centres non-singuliers. J'ai démontré :

Théorème 1.6. [Ra2] *Pour toute variété projective lisse de dimension trois, la propriété \mathcal{P} a le comportement birationnel suivant :*

- 1) *Soit Y un éclatement de X en un point. Alors \mathcal{P}_X est vraie si et seulement si \mathcal{P}_Y est vraie.*
- 2) *Soit Y l'éclatement de X le long d'une courbe lisse. Si \mathcal{P}_X est vraie alors \mathcal{P}_Y est vraie aussi.*
- 3) *Soit Y l'éclatement de X le long d'une courbe lisse C vérifiant $K_X \cdot C < 0$. Si \mathcal{P}_Y est vraie alors \mathcal{P}_X l'est aussi.*

Remarque 1.7. *Dans le cas des éclatements le long des courbes, on obtient de plus : Si $K_X \cdot C = 0$, et \mathcal{P}_Y est vraie, alors \mathcal{P}_X est vraie à une exception possible près : $C \simeq \mathbb{P}_1$ et $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$.*

J'ai démontré [Ra2] que pour des variétés rationnellement connexes, les seules obstructions potentielles à l'existence de métriques kähleriennes à courbure scalaire totale positive sont essentiellement celles observées dans la Remarque 1.7 :

Théorème 1.8. [Ra2] *On suppose que pour toute variété rationnellement connexe lisse X , de dimension trois, la propriété \mathcal{P}_X est vraie si \mathcal{P}_Y est vraie pour un éclatement Y de X le long d'une courbe lisse et rationnelle C vérifiant $N_{C/X} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$. Alors pour toute variété lisse rationnellement connexe de dimension complexe trois la propriété \mathcal{P} est vraie.*

2. RÉSULTATS OBTENUS APRÈS LA THÈSE

2.1. Le blow-down rationnel algébrique. Pendant longtemps la seule source importante d'exemples de variétés symplectiques a été la classe des variétés de Kähler.

Plus récemment sont apparues deux techniques importantes qui permettent de construire des variétés symplectiques qui ne sont pas nécessairement kähleriennes. Il s'agit de la somme normale

¹pour les définitions et les résultats principaux du programme des modèles minimaux on renvoie à [KM].

connexe de Gompf et du blowdown rationnel symplectique de Fintushel et Stern. Le blowdown rationnel est une chirurgie spécifique au cas des 4-variétés qui consiste à enlever un voisinage d'une chaîne linéaire de sphères plongées et de recoller une boule rationnelle.

Toute variété symplectique admet des structures presque complexes compatibles. Il est connu qu'à partir d'une surface de Kähler, la variété ainsi obtenue n'admet pas en général de structure complexe intégrable. La question que nous étudions est de déterminer le cas où le *blow-down rationnel peut être effectué dans le cadre algébrique*. Dans un travail commun avec Ioana Şuvaina, nous établissons un critère suffisant pour l'existence de structures complexes intégrables sur un blow-down rationnel :

Théorème 2.1. [RS1] *Soit G un groupe fini qui admet une action à points fixes isolés sur une surface lisse compacte et complexe S avec $H^2(S, \Theta_S) = 0$. Si les singularités de S/G sont de classe T , alors le blowdown rationnel \tilde{S} de la résolution minimale de S/G admet des structures complexes intégrables. De plus, en tant que variété différentielle de dimension 4, \tilde{S} est difféomorphe, par un difféomorphisme qui préserve l'orientation, à un lissage \mathbb{Q} -Gorenstein à un paramètre de S/G .*

Pour utilité, rappelons que les singularités de classe T sont des singularités quotient qui admettent des lissages \mathbb{Q} -Gorenstein à un paramètre. Le diviseur exceptionnel de la résolution minimale de ces singularités est une chaîne linéaire de courbes rationnelles sur lesquelles on peut effectuer le blow-down rationnel.

Comme application, nous trouvons une structure complexe sur un exemple construit par Gompf. Pour rappeler brièvement l'exemple de Gompf, nous commençons avec une surface complexe elliptique simplement connexe et relativement minimale, sans fibres multiples et de caractéristique d'Euler $c_2 = 48$. Soit $W_{4,n}$ son blow-down rationnel par rapport à n sections d'auto-intersection -4 , $n = 1, \dots, 9$. Nous avons été en mesure de prouver que $W_{4,8}$ admet une structure complexe, répondant ainsi à une question posée dans [Go].

Théorème 2.2. [RS1] *La 4-variété symplectique $W_{4,8}$ admet une structure complexe intégrable compatible.*

La méthode que nous employons s'appuie sur l'interprétation [Ma] du blowdown rationnel dans le contexte algébrique, comme le lissage \mathbb{Q} -Gorenstein à un paramètre des singularités des surfaces de classe T .

Depuis que [RS1] a été posté, la technique du lissage \mathbb{Q} -Gorenstein à un paramètre a été employée avec succès dans [LP, PPS] pour construire des exemples de surfaces complexes, simplement connexes et de type général avec $p_g = 0$, et $K^2 = 2$ ou 3 . Dans [RS2] nous analysons les propriétés de ces surfaces et nous trouvons :

Théorème 2.3. [RS2] *Il existe des surfaces complexes, simplement connexes de type général avec $p_g = 0$, $K^2 = 2, 3$ ou 4 , dont le fibré canonique est ample.*

Cela nous permet de prouver un résultat intéressant concernant l'existence des métriques d'Einstein sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# k\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, pour $k = 5, 6, 7$.

Théorème 2.4. [RS2] *Chacune des variétés $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# k\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, pour $k \in \{5, 6, 7, 8\}$ admet une structure différentielle qui a une métrique d'Einstein de courbure scalaire $s > 0$, une structure différentielle qui a une métrique d'Einstein de courbure scalaire $s < 0$ et un nombre infini de structures différentielles non-difféomorphes qui n'admettent pas de métrique d'Einstein.*

En dimension $4k$, $k \geq 2$, Catanese et LeBrun ont trouvé un exemple qui admet des métriques d'Einstein de courbures scalaire tant négative que positive [LC]. Nous avons été en mesure de trouver de nouveaux exemples qui ont les mêmes propriétés :

Proposition 2.5. [RS2] *Soit $N_l = \mathbb{C}P^2 \# (l+4)\overline{\mathbb{C}P^2}$, où $l \in \{1, 2, 3, 4\}$. Alors la variété N obtenue en prenant le produit cartésien arbitraire de $k, k \geq 2$ variétés $N_i, i = 1, 2, 3$ ou 4 admet deux métriques d'Einstein, g_1, g_2 , de courbures scalaires $s_{g_1} = -1$, et $s_{g_2} = +1$. De plus, ces métriques sont Kähler-Einstein pour deux structures complexes distinctes J_1, J_2 .*

Nous avons découvert aussi des conséquences intéressantes de ces exemples à l'égard de l'équation d'évolution du flot de Ricci. Je décrirai par la suite les résultats que j'ai récemment obtenus dans cette direction dans un travail collectif avec M. Ishida et I. Şuvaina [IRS].

Je voudrais maintenant concentrer notre attention sur des variétés riemanniennes orientées, fermées de dimension quatre et sur un flot qui préserve le volume de la variété M [Ha] :

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\int_M s_{g(t)} d\mu_{g(t)}}{\int_M d\mu_{g(t)}} \right) g(t),$$

où $Ric_{g(t)}, s_{g(t)}$ sont les courbures de Ricci et scalaire de la métrique Riemannienne $g(t)$. Je me suis intéressé à des solutions pour lesquelles la courbure sectionnelle $Rm_{g(t)}$ est bornée : $\sup_{M \times [0, \infty)} |Rm_{g(t)}| < \infty$. Ces solutions ont été introduites et étudiées par Hamilton [Ha] et sont appelées *des solutions non-singulières*.

En étudiant cette situation, Fang, Zhang et Zhang ont démontré [FZZ] qu'une obstruction topologique empêche l'existence de telles solutions. En utilisant les estimations sur les composantes de courbure, produites selon les solutions non-banales des équations de Seiberg-Witten, Ishida a trouvé [Is] de nouvelles obstructions pour l'existence de solutions non-singulières selon le type de difféomorphisme. Dans un travail collectif avec M. Ishida et I. Şuvaina, nous avons été en mesure d'étendre son résultat aux variétés pour lesquelles $b_2^+ = 1$:

Théorème 2.6. [IRS] *Soit X une variété compacte, lisse et orientée de dimension quatre avec $b_2^+(X) \geq 1$, $2\chi(X) + 3\tau(X) > 0$ et d'invariant de Seiberg-Witten non-banal. Soit N une variété compacte, lisse et orientée de dimension quatre avec $b_1(N) = b_2^+(N) = 0$. Alors pour la variété $M := X \# N$ il n'y a aucune solution non-singulière du flot de Ricci normalisé dès que*

$$b_2(N) > \frac{1}{3} (2\chi(X) + 3\tau(X)).$$

Nous pouvons utiliser cette obstruction pour étudier les variétés à topologie simple. Nous avons exposé comment le changement de la structure lisse se traduit par des invariants différentiels distincts et des comportements différents des solutions du flot de Ricci normalisé :

Théorème 2.7. [IRS] *Pour chaque $5 \leq \ell \leq 8$, les variétés topologiques de dimension quatre de la forme $M := \mathbb{C}P^2 \# \ell \overline{\mathbb{C}P^2}$ possèdent les propriétés suivantes :*

1. *La structure lisse canonique sur M a l'invariant de Yamabe positif et il existe une solution non-singulière du flot de Ricci normalisé sur M .*
2. *M admet une structure lisse d'invariant de Yamabe négatif pour laquelle il existe des solutions non-singulières du flot de Ricci normalisé.*
3. *M admet un nombre infini de structures lisses distinctes d'invariant de Yamabe négatif et sur lesquelles il n'y a aucune solution non-singulière du flot de Ricci normalisé pour chaque métrique initiale.*

2.2. Géométrie énumérative réelle. En tant que post-doc à l'IRMA, Université Louis Pasteur à Strasbourg, sous la direction de V. Kharlamov et J.-Y. Welschinger je me suis intéressé au domaine en pleine expansion de la géométrie énumérative réelle. C'est le thème de ma recherche actuelle.

Soit (X, ω, ϕ) une variété symplectique compacte de dimension quatre munie d'une forme symplectique ω et d'une involution ϕ qui satisfait $\phi^*\omega = -\omega$. Soit $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ une classe de cohomologie qui vérifie $c_1(X)d > 0$ et $\phi_*d = -d$. Nous supposons que l'ensemble des points fixes de ϕ est connexe et nous fixons des collections de r points génériques réels et de m paires génériques de points conjugués de X , où $r + 2m = c_1(X)d - 1$. Dans son article fondateur [We1], Welschinger définit des invariants pour les déformations des variétés symplectiques réelles, une sorte d'analogue aux invariants de Gromov-Witten. Ces invariants donnent des bornes inférieures pour le nombre de courbes J -rationnelles dans une classe de cohomologie donnée et qui passent par une configuration réelle donnée de points génériques. Nous notons par $W_r^d(X)$ l'invariant de Gromov-Witten-Welschinger associé.

À la différence de la théorie Gromov-Witten qui est bien établie, l'étude des invariants de Gromov-Witten-Welschinger est encore dans sa première enfance. Beaucoup de questions intéressantes apparaissent par analogie avec les invariants de Gromov-Witten. Jusqu'à maintenant, j'ai abordé les sujets suivants :

A : Le comportement asymptotique des invariants de Gromov-Witten-Welschinger.

Une direction intéressante à explorer est proposée dans [IKS1] et consiste à la comprendre la conduite asymptotique des invariants de Gromov-Witten-Welschinger, et sa relation avec la conduite asymptotique des invariants de Gromov-Witten. Avec les méthodes spécifiques de la théorie symplectique des champs, j'ai étudié le comportement asymptotique des invariants de Gromov-Witten-Welschinger pour de petites valeurs de r . J'ai obtenu le résultat suivant, qui complète de ceux de [IKS1] :

Théorème 2.8. [RW] *Soit (X, ω, ϕ) une variété symplectique réelle de dimension 4, symplectomorphe à l'espace projectif complexe et r, m, d des entiers positifs tels que $r + 2m = 3d - 1$. Pour $r = 0$ ou $r = 1$ on a :*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log |W_r^d(X)|}{d \log d} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log GW_d(X)}{d \log d}.$$

Dans le cas de la quadrique ellipsoïde, i.e. $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et $Fix(\phi) = S^2$, dans un travail en commun avec J.-Y. Welschinger [RW] nous avons obtenu des résultats similaires :

Théorème 2.9. [RW] *Soit (X, ω, ϕ) une variété symplectique réelle de dimension 4, symplectomorphe au quadrique ellipsoïde, soit h la classe d'une section hyperplane réelle de bidegré $(1, 1)$. On a :*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log |W_r^d(X)|}{d \log d} = 2 = \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log GW_d(X)}{d \log d}.$$

B : Les invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs. Par analogie avec la théorie Gromov-Witten, j'essaie de combler une lacune importante en développant une théorie des *invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs*. Dans un travail collectif avec J. Solomon [RSo], nous avons été en mesure à définir des invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs à des sous-variétés symplectiques réelles de codimension deux quand l'espace ambiant est une variété symplectique de dimension quatre munie d'une structure réelle compatible avec la forme symplectique.

Du point de vue de [So], les invariants de Gromov-Witten-Welschinger peuvent être vus comme comptant avec signe le nombre de disques J -holomorphe au bord lagrangien, où la lagrangienne est la partie invariante d'une structure réelle. C'est le même point de vue que nous avons adopté dans [RSo].

Soit (X, ω, ϕ) une variété symplectique réelle de dimension quatre, $V \subset X$ une sous-variété symplectique réelle de codimension 2, $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ une classe telle que $\phi_*d = -d$ et $c_1(X)d > 0$. Soit $\mathbb{R}X = \text{Fix}(\phi)$ et $\mathbb{R}V = \text{Fix}(\phi|_V) \subset \mathbb{R}X$, qui sont supposés être non-vides et connexes. Nous notons par $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ et $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_t)$ les vecteurs de multiplicité aux points qui marquent les conditions de tangence prescrites au bord ou à l'intérieur, respectivement. De même, nous notons par $\mathbf{b} = (b_1, a_2, \dots, b_r)$, et $\mathbf{B} = (B_1, B_2, \dots, B_u)$, les vecteurs de multiplicité aux points qui marquent les conditions de tangence non-prescrites au bord ou à l'intérieur, respectivement. Ces vecteurs enregistrent tous les points de contact de courbes J -holomorphe réelles réalisant la classe d avec V . Nous avons défini des invariants de *Gromov-Witten ouverts* $OGW_k^l(X, V, \phi, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B})$ relatifs à V , qui comptent les courbes J -holomorphe réelles avec les signes appropriés, qui traversent une collection générique de k points réels et l paires de points imaginaires, et avec des conditions de tangence avec V décrites par les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B}$.

Théorème 2.10. [RSo] *Soit (X, ω, ϕ) une variété symplectique réelle de dimension quatre, $V \subset X$ une sous-variété symplectique réelle de codimension 2, et $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ une classe telle que $\phi_*d = -d$ et $c_1(X)d > 0$. Supposons que $\mathbb{R}X$ est relativement Pin^\pm et fixons des structures de Pin^\pm relatives sur $(X, \mathbb{R}X)$ et sur $(V, \mathbb{R}V)$. Soit $k, l, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B}$ comme ci-dessus, satisfaisant*

$$\mu(d) - 1 = k + 2l + \sum_{i=1}^s a_i + \sum_{i=1}^r b_i + 2 \sum_{i=1}^t A_i + \sum_{i=1}^u 2B_i - r - 2u,$$

où μ est l'indice de Maslov. Si $\mathbb{R}X$ est orientable, on fixe une orientation. Sinon, on suppose que $w_1(d) = k + s + 1 \pmod{2}$ et que toutes les multiplicités a_i et b_i sont impaires. Alors, les entiers $OGW_k^l(X, V, \phi, \mathbf{a}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{B})$ ne dépendent ni du choix de la structure presque complexe, ni du choix des contraintes génériques.

Nous devrions remarquer qu'un résultat semblable a été découvert auparavant dans le contexte des invariants de Welschinger tropicaux [IKS2] par Itenberg, Kharlamov et Shustin. Notre résultat étend ceci aux invariants relatifs [We2].

3. PROJETS DE RECHERCHE

Mes projets de recherche principaux, qui font objet de mes travaux en cours, ont pour objet l'étude des invariants de Gromov-Witten-Welschinger. Ils sont des analogues naturels des invariants de Gromov-Witten qui ont été largement étudiés. Toutefois, la théorie des invariants de Gromov-Witten-Welschinger est encore à ses débuts et il y a beaucoup de questions naturelles venant de la théorie de Gromov-Witten qui n'ont pas encore trouvé de réponse.

A. Je voudrais continuer à étudier le comportement asymptotique des invariants de Gromov-Witten-Welschinger :

1. Dans un travail commun avec J.-Y. Welschinger, nous avons commencé l'étude d'une extension du Théorème 2.9 au cas d'une 4-variété symplectique réelle arbitraire, où la partie fixe de la structure réelle est S^2 .
2. La méthode que nous avons employée dans la preuve du Théorème 2.9 suggère que dès que la partie réelle de la variété est la sphère S^2 et le nombre de contraintes réelles r est fixé, le résultat plus fort suivant devrait être vrai

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log |W_r^d(X)|}{d \log d} = 2 = \frac{1}{2} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\log GW_d(X)}{d \log d}.$$

J'ai l'intention d'explorer cette direction dans un avenir proche.

B. En ce qui concerne les invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs, je voudrais continuer à travailler sur les projets suivants :

1. Dans un travail commun avec J. Solomon, nous analysons une extension du Théorème 2.10. Notre but est de définir des invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs pour des variétés symplectiques réelles de dimension six, par rapport à une sous-variété symplectique réelle quelconque. Puisque les invariants de Gromov-Witten-Welschinger absolus sont définis dans [So] jusqu'à la dimension six, c'est la dernière dimension où les invariants de Gromov-Witten-Welschinger pourrait être définis.
2. Dans une partie de ce travail commun avec J. Solomon, nous essayons d'établir une formule de recollement pour les invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs, dans l'esprit de la formule de recollement pour les invariants de Gromov-Witten. En particulier, on prévoit d'obtenir une formule de type Caporaso-Harris pour ces invariants. Une telle formule devrait expliquer et généraliser au contexte symplectique les résultats obtenus via la géométrie tropicale par Itenberg, Kharlamov et Shustin [IKS2].
3. En géométrie algébrique réelle, une bonne compréhension des nombres de Hurwitz manque toujours. Avec l'aide des invariants de Gromov-Witten-Welschinger relatifs, nous avons l'intention de définir correctement des nombres Hurwitz en genre zéro et de trouver une formule récursive les produisant.

RÉFÉRENCES

- [LC] F. CATANESE, C. LEBRUN, *On the scalar curvature of Einstein manifolds*, Math. Res. Lett. 4 (1997), no. 6, 843–854.
- [DPS] J. P. DEMAILLY, T. PETERNELL, M. SCHNEIDER, *Holomorphic line bundles with partially vanishing cohomology*, in Proceedings of Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), Israel Math. Conf. Proc., Vol. 9, Bar-Ilan Univ. Ramat Gan, 1996, pp. 165–198.
- [FZZ] F. FANG, Y. ZHANG AND Z. ZHANG, *Non-singular solutions to the normalized Ricci flow equation*, Math. Ann, 340 (2008), 647–674.
- [FQ] R. FRIEDMAN, Z. QIN, *The smooth invariance of the Kodaira dimension of a complex surface*, Math. Res. Lett., 1 (1994), pp. 369–376.
- [Go] R. E. GOMPF, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. of Math. (2) 142 (1995), no. 3, 527–595.
- [Ha] R. HAMILTON, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds*, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), pp. 695–729.
- [Is] M. ISHIDA, *The Normalized Ricci Flow on Four-Manifolds and Exotic Smooth Structures* arXiv :0807.2169
- [IRS] M. ISHIDA, I. ŞUVAINA *On Normalized Ricci Flow and Smooth Structures on Four-Manifolds with $b^+ = 1$* , à paraître dans Archiv der Mathematik, arXiv :0810.2465v1 [math.DG].
- [IKS1] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV, E. SHUSTIN, *Logarithmic equivalence of Welschinger and Gromov-Witten invariants*, Russian Math. Surveys 59 (2004), no. 6, 1093 - 1116.
- [IKS2] I. ITENBERG, V. KHARLAMOV, E. SHUSTIN, *A Caporaso-Harris type formula for Welschinger invariants of real toric Del Pezzo surfaces*, math.AG/0608549
- [KMM] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA, S. MORI, *Rationally connected varieties*, J. Algebraic Geom. 1 (1992), no. 3, 429–448.
- [KM] J. KOLLÁR, S. MORI, *Birational Geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, 134, Cambridge university Press, Cambridge, 1998.
- [Ma] M. MANETTI, *On the moduli space of diffeomorphic algebraic surfaces*, Invent. Math. 143 (2001), no. 1, 29–76.

- [LP] Y. LEE, J. PARK, *A simply connected surface of general type with $p_g = 0$ and $K^2 = 2$* , Invent. Math. 170 (2007), no. 3, 483–505.
- [PPS] H. PARK, J. PARK, D. SHIN, *A simply connected surface of general type with $p_g = 0$ and $K^2 = 3$* , math.AG/0708.0273.
- [Ra2] R. RĂSDEACONU, *On rationally connected threefolds*, preprint
- [Ra1] R. RĂSDEACONU, *On the Kodaira dimension of diffeomorphic Kähler 3-folds*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 3543–3553.
- [RS1] R. RĂSDEACONU, I. ŞUVAINA, *The algebraic rational blowdown*, math.SG/0601270
- [RS2] R. RĂSDEACONU, I. ŞUVAINA, *Smooth structures and Einstein metrics on $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# 5, 6, 7, 8\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$* , à paraître dans Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, arXiv :0806.1424v1 [math.DG].
- [RSo] R. RĂSDEACONU, J. SOLOMON, *Relative open Gromov-Witten invariants*, en préparation
- [RW] R. RĂSDEACONU, J.-Y. WELSCHINGER, en préparation
- [Ru] Y. RUAN, *Symplectic topology on algebraic 3-folds*, J. of Diff. Geom. 39 (1994), pp. 215–227.
- [So] J. SOLOMON, *Intersection Theory on the Moduli Space of Holomorphic Curves with Lagrangian Boundary Conditions*, arXiv :math.SG/0606429v1.
- [We1] J.-Y. WELSCHINGER, *Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry*, Invent. Math. 162 (2005), no. 1, 195–234.
- [We2] J.-Y. WELSCHINGER, *Towards relative invariants of real symplectic 4-manifolds*, GAFA, 16 (2006), no.5, 1157–1182