Université de Strasbourg
Techniques d'analyse numérique L3S6
Année 2016 - 2017

TP 5 : Résolution Numérique des Equations Différentielles

Méthodes d'Euler, de Runge-Kutta et de Heun.

On souhaite résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) = f(u), \qquad u(0) = u_0,$$

par la méthode d'Euler explicite et la méthode de Heun sur l'intervalle de temps $[0, T]$. Pour cela, nous calculons :

$$\text{[Méthode d'Euler explicite]} \qquad u_{n+1} = u_n + h \cdot f(u_n)$$

$$\text{[Méthode de Heun]} \qquad u_{n+1} = u_n + h/2 \cdot [f(u_n) + f(u_n + h \cdot f(u_n))],$$

avec $0 \leq n < N$ et u_n est une approximation de $u(t_n)$, $[t_0, t_1, \ldots, t_N]$ est une subdivision uniforme de $[0, T]$ avec N est le plus grand entier inférieur ou égal à T, $t_n = n \cdot h$.

1. Ecrire une fonction Scilab `Euler` prenant en entrée une fonction f, l'instant final T, la donnée initiale u_0 et un pas de temps h et qui retourne le vecteur des temps $[t_0, t_1, \ldots, t_N]$ et le vecteur des solutions approchées $[u_0, u_1, \ldots, u_N]$.
2. Définir les fonctions $f_1 : x \mapsto 3x$, $f_2 : x \mapsto x^{1/3}$.
3. Représenter sur un même graphe la solution approchée et la solution exacte du problème considéré en prenant $f = f_1$ puis $f = f_2$. Ajouter un titre et une légende.
4. **Ordre de convergence.**
   - Calculer l'erreur $E = |u(t_N) - u_N|$ entre la solution exacte et la solution approchée au temps t_N pour $h = 1/2^k$ avec $k = 1, 2, \ldots, 10$. On mettra les résultats dans un vecteur E.
   - Tracer en échelle logarithmique l'erreur E en fonction de h. Sur le même graphique représenter les courbes $h \mapsto h$, $h \mapsto h^2$, $h \mapsto h^3$. En déduire l'ordre de convergence numérique de la méthode d'Euler.
5. De quelle méthode d'intégration numérique est issue la méthode de Heun ?
6. Recommencer les questions précédentes pour la méthode de Heun (on écrira une fonction `Heun`). Quel est son ordre de convergence numérique ?
7. Recommencer les questions précédentes pour résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

   $$u'(t) = f(u, t), \qquad u(0) = u_0,$$

   avec $f(u, t) = u(t) - t$ et $u(0) = 0$.

8. Programmer la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et de Runge-Kutta d'ordre 4. Tester votre programme.