

Polynômes

1 Remarques générales

Un **polynôme** se définit comme une expression.

```
>p:=x**3-x+2;
```

Pour **évaluer un polynôme en un point** on utilise de préférence `eval`.

```
>eval(p,x=2);
```

La commande `expand` permet de **réduire et ordonner le polynôme** suivant les puissances de x .

```
>q:=(3*x+4)**3; expand(q);
```

Les commandes `degree` et `lcoeff` permettent de donner **le degré et le coefficient dominant d'un polynôme**.

```
>degree(q,x); lcoeff(q,x);
```

Exercice 1 Vérifier que les expressions suivantes définissent des polynômes :

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}; \quad \sin(5 \arcsin(x)); \quad \sinh(5 \operatorname{arcsinh}(x));$$

La commande `solve` permet de donner les **racines d'un polynôme** :

```
>solve(x**4+2*x**3+2*x**2+2*x+1,x);
```

On remarque que lorsque l'on donne une expression (au lieu d'une égalité) comme argument pour la commande `solve`, Maple résout par défaut `<expression>=0`.

Maple cherche toutes les solutions réelles et complexes avec leurs multiplicités, donc pour un polynôme de degré n , il renverra en général n racines.

Exercice 2 Donner les racines des polynômes suivants :

$$x^3 - 1; \quad x^5 - 1; \quad x^3 - 2x + 1;$$

Il arrivera assez souvent que Maple retourne des choses absolument illisibles comme solutions.

```
>solve(x**3-30*x+1);
```

Dans ce cas, il est parfois utile de faire une étude approchée en traçant le polynôme et en cherchant les racines numériquement à l'aide de la commande `fsolve` :

```
>plot(x**3-30*x+1);
```

```
>fsolve(x**3-30*x+1);
```

On constate d'ailleurs que le polynôme possède 3 racines réelles alors que la résolution exacte donne l'impression qu'il possède des racines complexes.

Exercice 3 On considère le polynôme

$$P(x) = x^3 - 3x - 1;$$

1. Chercher les racines de P . Calculer une évaluation de ses racines à l'aide de la commande `evalf`.
2. Tracer $P(x)$ sur l'intervalle $[-3; 3]$.
3. Chercher des valeurs approchées des racines.
4. Que constate-t-on par rapport à l'approximation des solutions exactes ?
5. Vérifier que les nombres

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{9}\right); 2 \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right); 2 \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right);$$

sont les racines du polynôme.

2 L'espace $\mathbb{R}_n[X]$

On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des fonctions polynômes sur \mathbb{R} à une indéterminée de degré inférieur ou égal à n . On rappelle que E_n est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension $n+1$ et que les polynômes

$$1; X; X^2; \dots; X^n$$

forment une base de E_n .

3 Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes T_n en posant

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}; \quad x \in [-1; 1]:$$

puis on prolonge la fonction polynôme sur \mathbb{R} .

Exercice 4

1*. Montrer que l'on définit bien un polynôme sur $[-1; 1]$ par la formule précédente. Ces polynômes sont appelés **polynômes de Tchebychev**.

2. Ecrire une procédure qui prend comme argument un entier n et qui renvoie le polynôme de Tchebychev d'indice n .

3. A l'aide de votre procédure, calculer les 10 premiers polynômes de Tchebychev.

4. Tracer et superposer les graphes des 5 premiers polynômes de Tchebychev.

5. Quels sont les racines du polynômes T_n dans l'intervalle $[-1; 1]$? En déduire toutes les racines de T_n .

6. On définit une suite de polynômes U_n par la formule de récurrence suivante :

$$U_0(x) = 1; \quad U_1(x) = x; \quad U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x) \quad \text{pour } n \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}: \quad (1)$$

Ecrire une procédure qui prend en argument un entier n et qui renvoie le polynôme U_n .

7. A l'aide de la procédure, calculer U_n pour $n < 10$. Que constate-t-on?

8. Montrer que T_n vérifie la relation de récurrence (1). En déduire que $T_n = U_n$.

9. Quels sont les coefficients dominants et les degrés des polynômes T_n ? En déduire une factorisation du polynôme T_n .

10. Montrer que $\{T_0; T_1; \dots; T_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1; 1]$ dans \mathbb{R} . En particulier, puisqu'une fonction polynomiale est continue, $E_n \subset E$ pour tout n .

On définit l'application $\langle ; ; \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\langle f; g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Exercice 5 *

1. Montrer que cette application est bilinéaire et symétrique.

2. Montrer également que l'application est non dégénérée : pour tout $h \in E$:

$$\langle h; h \rangle = 0 \Rightarrow h \equiv 0:$$

On dit que l'application $\langle ; ; \rangle$ est un **produit scalaire** sur E .

Exercice 6

1. Ecrire une procédure qui prend en argument deux fonctions et qui renvoie le produit scalaire associé de ces deux fonctions.

2. Calculer $\langle T_i; T_j \rangle$ pour $i; j \leq 4$. Que constate-t-on?

On dit que les T_n sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle ; ; \rangle$.

Soit f un élément quelconque de E , on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f; T_k \rangle}{\langle T_k; T_k \rangle} T_k(x):$$

On peut montrer que $\langle f - t_n(f); f - t_n(f) \rangle$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

1. Expliquer pourquoi $t_n(f)$ est un élément de E_n .
2. Ecrire une procédure qui prend en argument une fonction f un entier n et qui renvoie le polynôme $t_n(f)$.
3. Ecrire une procédure qui prend en argument un nombre réel et qui renvoie le premier entier n tel que $\langle f - t_n(f); f - t_n(f) \rangle$ soit inférieur à , (le polynôme $t_n(f)$ est une approximation quadratique de f sur l'intervalle $[-1; 1]$).
4. Pour $\epsilon = \frac{1}{100000}$, testez votre procédure avec les fonctions suivantes (donnez les valeurs de n associées) :

$$\sin(x); \quad \cos(x); \quad \tan(x); \quad \ln(x+2); \quad e^x:$$

5. Superposer les courbes et leurs approximations.

L'approximation est parfois très lente, notamment quand la fonction oscille beaucoup.

Exercice 8 On pose $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x+1.1}\right)$.

Tracer la fonction et son approximation polynomiale pour quelques valeurs de n .

4 Analogie $\mathbb{R}^{n+1} - \mathbb{R}_n(x)$.

Espace vectoriel	\mathbb{R}^{n+1}	$\mathbb{R}_n(x)$
Eléments	Vecteurs : $x = (x_0; \dots; x_n)$, $y = (y_0; \dots; y_n)$.	Polynômes : $P; Q$ de degrés inférieurs ou égal à n .
Exemple de base	$\{e_0; \dots; e_n\}$ avec $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$	$1; x; x^2; \dots; x^n$.
Exemple de produit scalaire	$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$	$\langle P; Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$
Vecteurs orthogonaux	$a \cdot b = 0$	$\langle f; g \rangle = 0$
Exemples de base orthogonale pour le produit scalaire	$\{e_0; \dots; e_n\}$ avec $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$	les polynômes de Tchebychev