Un peu d'analyse

1 Expressions, Fonctions.

Une **expression** en maple est l'assignement a une variable d'une valeur dependant d'une ou plusieurs autres variables. Par exemple,
```
> expr:=x**3+45*x+1;
```
On peut evidemment effectuer toutes les operations usuelles (addition, multiplication, ...) entre les expressions. Il peut être utile d'evaluer une expression en une valeur, c'est a dire de remplacer la variable par une valeur, pour cela on utilise la commande `eval` ou bien `subs`, :
```
> eval(expr, x=2);
> subs(x=2, expr);
```
La syntaxe pour une **fonction** est la suivante:
```
> fonct :=y->sin(y);
```
Dans la syntaxe precedente la variable `y` est muette, c'est a dire qu'on peut la remplacer par n'importe quel autre nom de variable.
Pour evaluer la fonction, on fait
```
> fonct(Pi);
```
On peut transformer une fonction en expression en appliquant un nom de variable qui n'est pas encore affecte a la fonction:
```
> exprfonct:=fonct(z);
```
l'expression `exprfonct` depend alors de la variable `z`.
On peut egalement transformer une expression en fonction en utilisant la commande `unapply`:
```
> g:=unapply(exprfonct,z);
```
DANS LA SUITE, IL SERA ESSENTIEL DE FAIRE LA DIFFERENCE ENTRE UNE EXPRESSION ET UNE FONCTION. Bien qu'il puisse être plus commode de travailler avec une expression, les fonctions peuvent egalement être utiles, notamment si on veut eviter d'avoir a contreôler la variable parametre.
On peut egalement remarquer que toutes les procedures qui sont crees sont des fonctions. Beaucoup de fonctions usuelles sont deja implementdes dans Maple: (`sin`, `ln`,...).

2 Limites, Sommes.

En Maple il existent des commandes pour calculer les limites des suites et les sommes infinies. Par exemple `limit(sin(1/n), n=infinity)` calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 1. *Calculer les limites des suites suivantes:*

$$\frac{n!}{n^n},\ \frac{n^6}{e^n},\ \frac{4n^3+16n}{5n^2+7},\ \frac{4n^3+2n^2+3}{5n^3+17},\ n^2\left(\cos\frac{1}{n}-1\right),\ n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2. *Calculer les limites des suites suivantes:*

$$\sin n,\ \cos(n\pi),\ \cos^2 n,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right).$$

Que donne Maple comme résultat?

Pour calculer la somme d'une serie numerique entre deux bornes numeriques finies, on utilise `add`. Par exemple
```
> add(1/n, n=1..6);
```
calcule

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

Exercice 3. *Calculer les sommes suivantes:*

$$\sum_{k=0}^{5} xk, \quad \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k},$$

Lorsque les bornes sont des variables ou in nies, il faut utiliser la commande `sum`:

```
> sum(1/n,n=1.. 1 );
```

Exercice 4. *Calculer les sommes suivantes:*

$$\sum_{k=0} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0} \cos(kx), \quad \sum_{k=0} \sin(kx).$$

On peut calculer la limite d'une expression en un point `p`,
la syntaxe utilisee est `> limit(expr, x=p);`

Exercice 5. *Calculer les limites des expressions suivantes:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to \pi/2} \tan(x), \quad \lim_{x\to 3} x^6, \quad \lim_{x\to\infty} \sin(x).$$

3 Dérivation et integration

Maple peut calculer la derivee d'une expression, on utilise pour cela la commande `diff`. `> restart;`

```
> expr:=x+sin(x);
> diff(expr,x);
```

ATTENTION, pour calucler la derivee d'une fonction, vous devrez d'abord la transformer en expression:

```
> f:=y->tan(y);
> diff(f(x),x);
```

Pour calculer la derivee k-eme on utilise `diff(expr, x$k);`
Pour le **calcul d'une primitive** on ecrit

```
> int(expr, x);
```

pour le **calcul de l'integrale** il faut speci er les bornes:

```
> int(expr, x=a..b);
```

les valeurs 1 sont admises pour les bornes. N'oubliez pas qu'il faut toujours calculer avec une expression, c'est a dire choisir une variable.

Exercice 6. *Calculer les dérivées des expressions suivantes*

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad \arcsin(x) + \arccos(x).$$

Calculer les intégrales suivantes

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}dx, \quad \int_0^{10\pi} x + \sin(x)dx.$$

Exercice 7. *Écrire une procédure prenant en argument un entier n et renvoyant le développement limité de* $\sin(x)$ *en* 0 *jusqu'à l'ordre n.*

4 Dessiner un graphe

La syntaxe pour tracer une expression est

```
> plot(expr, x=a..b);
```

ou `a` et `b` sont les extremites de l'intervalle sur lequel on veut tracer le graphe. Tracez le graphe de $\sin(x)$ de 2π a 2π. Maple est aussi capable de tracer plusieurs graphes superposes:

```
> plot([expr1, expr2], x=a..b);
```

On peut egalement tracer une fonction:

```
> plot(sin, -Pi..Pi);
```

Exercice 8. *Dessiner le graphe de* $\sin(x)$ *de* 1 *à* 1 *. Faire la même chose avec x^2. Que constate-t-on? Expliquer la forme apparente.*

Exercice 9. *Calculer le polynôme de Taylor de* $\sin(x)$ *en* 0 *jusqu'à l'ordre 10. Ensuite tracer les graphes superposés de* $\sin(x)$ *et du polynôme sur l'intervalle* $[\ 3\pi, 3\pi]$.

5 Résolution d'équations

Une equation en maple est une expression contenant le symbole =. Par exemple
`> eq:= x**4+7*x**2+1=-3;` On peut la **resoudre formellement** en utilisant la commande `solve`:
`> solve(eq, x);`
Il est aussi possible de resoudre des systemes d'equations. On considere le systeme

$$\begin{cases} 4x + 5y + 7z - 1 & = & 0 \\ 2x - 8y - z + 3 & = & 0 \\ 3x + 3y + z + 7 & = & 0. \end{cases}$$

Ecrivez les commandes suivantes sur votre feuille de travail:

```
> eq1:= 4*x+5*y+7*z-1=0;
> eq2:= 2*x-8*y-z+3=0;
> eq3:= 3*x+3*y+z+7=0;
> solve({eq1,eq2,eq3}, {x,y,z});
```

Pour **resoudre numeriquement** une equation on utilise la commande `fsolve`, la syntaxe correcte est
`fsolve(eq, x=a..b);`
ou `a` et `b` sont les extremites de l'intervalle.

Exercice 10. *Résoudre formellement l'équation* $x^4 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$.

Exercice 11. *Considerons l'équation* $\cos x = e^x$.

1. *Tracer sur un même graphique les courbes des deux fonction considerées, pour* $x \in [-10, 1]$.
2. *Résoudre formellement l'équation.*
3. *Calculer une valeur approchée de chacune des solutions qui apparaissent dans l'intervalle considéré.*

6 Méthode de Newton.

Pour approcher une solution d'une equation du type $f(x) = 0$ ou f est une fonction relle, on peut utiliser la methode de Newton.
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I et x_0 un point de I. On effectue le developpement limite de la fonction f a l'ordre 1 au voisinage de x_0:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + O((x - x_0)^2).$$

On peut alors remplacer approximativement la solution de $f(x) = 0$ par celle de

$$f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) = 0.$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, on note x_1 la solution de cette equation approchante. On construit ainsi une suite (x_n) en posant

$$f(x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1})f'(x_{n-1}).$$

Pour cela, il faut supposer que la derivee ne s'annule pas sur l'intervalle considere.

Exercice 12. *Ecrire une procédure qui prend en entreés une fonction* f, *un entier* x_0 *et qui renvoie la suite* (x_n) *associée. Testez votre procédure avec différentes fonctions.*