TD Maple 3

Construction de suites

Exercice 1. *Soit* $(u_n)_{n\geq 2}$ *la suite définie pour* $n \geq 2$ *par :*

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) .$$

1. *Écrire une procédure* `suite(n)` *qui renvoie* u_n*.*
2. *Deviner une formule pour* u_{2n} *et pour* u_{n+1}*.*
3. *Utiliser ces formules pour écrire une nouvelle procédure* `suite2(n)` *qui renvoie les mêmes résultats que la précédente. Comparer la vitesse d'exécution.*
4. *Que semble être le comportement de la suite (sens de variation, limite) ?*

Représentation graphique

Entrez `with(plots);`.
Consulter la documentation de la fonction `plot`, ou bien expérimenter à partir des exemples suivants :

```
> points:= plot([ seq([k, k^2], k=1..10) ]);
> display(points);
> fonction:= plot( x-> -x^2 +1, 1..10, color=red);
> display(fonction);
> display(points, fonction);
```

Exercice 2. *Représenter graphiquement la suite de l'exercice précédent. Puis, représenter les suites ci-dessous :*
– $u_n = (-1)^n/n$,
– $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)/n^3$,
– $u_n = 2n/(2n-1)$,
– $u_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,
– $u_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Exercice 3. *Étant donnée une fonction* f*, on peut considérer la suite définie par* $u_{n+1} = f(u_n)$*, la valeur* u_0 *étant fixée. Écrire une procédure* `affichesuite(N, u0, f, a, b)` *qui dessine les éléments suivants :*
– *le graphe de* f *sur* $[a, b]$ *en bleu,*
– *la droite d'équation* $y = x$ *sur* $[a, b]$ *en noir,*
– *reliés par des traits rouge, les points* $(u_0, u_0), (u_0, u_1), (u_1, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_N, u_N), (u_N, u_{N+1})$*.*
Essayer avec $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$*.*
Enfin, montrer que la suite converge vers $\sqrt{2}$*, et en déduire un certain nombre de décimales de* $\sqrt{2}$*.*

Exercice 4. *Écrire une procédure qui renvoie la représentation graphique d'une suite* u_n *et de* $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$ *sur un même graphique (c'est la* moyenne de Césaro*).*
Tester cette procédure avec des suites qui convergent, puis avec $u_n = (-1)^n$*.*