Université de Strasbourg
Techniques d'analyse numérique L3S6
Année 2013-2014

TP 3 : Intégration numérique

Méthodes de Newton-Cotes et Newton-Cotes composée.

On souhaite calculer l'intégrale d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Pour cela, considérons $p+1$ points équidistants : $x_i = a + h \cdot i$ pour $i \in \{0,\dots,p\}$ et $h = (b-a)/p$. Sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, nous calculons une valeur approchée de l'intégrale de f par une formule de Newton-Cotes (voir cours). Par exemple :

$$\text{[Méthode des rectangles]} \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1}-x_i)f(s_i), \quad \text{où} \quad s_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

pour les rectangles à gauche, on a $s_i = x_i$, à droite : $s_i = x_{i+1}$ et avec $s_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, on a la méthode du point milieu suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1}-x_i) \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$

Autres méthodes :

$$\text{[Méthode des trapèzes]} \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx (x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2},$$

$$\text{[Méthode de Simpson]} \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{(x_{i+1}-x_i)}{6} \cdot \left(f(x_{i+1}) + 4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right).$$

On obtient ensuite une valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \tag{1}$$

en sommant les intégrales calculées sur chaque sous-intervalle.

1. Ecrire une fonction Scilab `Trapeze` prenant en entrée une fonction f, les points a et b, un entier p et qui retourne la valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$ grâce à la méthode des trapèzes composée.

2. Vérifier numériquement que la méthode est exacte pour $f \in \mathbb{P}_1$.

3. **Ordre de convergence.** Considérons la fonction $g : x \in [0,1] \mapsto \exp(3x)$.

   (a) Calculer l'intégrale de g (à la main !).

   (b) Calculer l'erreur entre l'intégrale exacte et l'intégrale approchée pour $p = 2^k$ avec $k = \{1,2,\dots,10\}$. On mettra les résultats dans un vecteur E.

(c) On dit que la méthode est d'ordre s si $E(h) = O(h^s)$. Supposons que l'erreur est telle que $E(h) = Ch^s$, en prenant le logarithme, on a :

$$\log(E(h)) = s \cdot \log(h) + \log(C).$$

Tracer en échelle logarithmique l'erreur E en fonction de $h = (b-a)/p$. On pourra utiliser la commande `plot2d(...,logflag='ll')`. Sur le même graphique représenter les courbes $h \mapsto h$, $h \mapsto h^2$, $h \mapsto h^4$. En déduire l'ordre de convergence numérique de la méthode des trapèzes. Retrouve-t-on les résultats théoriques ?

(d) Reprenez l'étude de la vitesse de convergence avec les fonctions $g_2 : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$, $g_3 : x \in [0,1] \mapsto |x - \pi/4|$, et $g_4 : x \in [0,1] \mapsto \sin(1000x)$. Expliquez.

4. Recommencer les questions précédentes pour la méthode des rectangles (à gauche, à droite, au point milieu) et la méthode de Simpson composée (on écrira une fonction `rectangle` et `Simpson`). Quel est son ordre de convergence numérique ?

Méthode de Romberg (accélération de convergence).

On note $T_h(f)$ l'intégrale approchée obtenue par la méthode des trapèzes composée. La méthode de Romberg appliquée à la méthode des trapèzes consiste à considérer :

$$S_h(f) = \frac{4T_{h/2}(f) - T_h(f)}{3}.$$

Calculer $S_h(f)$ avec $f : x \in [0,1] \mapsto \exp(3x)$ pour $h = (b-a)/p$ avec $p = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Déterminer l'ordre de convergence. Commentez.