Approximation hyperbolique de l'²quation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Seignosse, le 27 mai 2013

Approximation hyperbolique de l'²quation de Vlasov uniquement en espace

Nhung PHAM
avec Philippe HELLUY et Laurent NAVORET

IRMA, Université de Strasbourg

Seignosse, le 27 mai 2013

Outline

1. Mod±le math²matique

2. R²soudre le syst±me de Vlasov-Poisson 1D

3. ’ tude de l'²quation de Vlasov-Poisson avec la transform²e de Fourier en vitesse

4. Cas test

I. MODÈLE MATHÉMATIQUE

Mod±le simplifi² de Vlasov-Poisson 1D

On consid±re l'²quation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \partial_x f + E \partial_v f = 0 \tag{1}$$

- $f(x, v, t)$: la fonction de distribution
- $E(x, t)$: le champ ²lectrique est donn² par l'²quation de Poisson

$$\partial_x E = -1 + \int_v f dv \tag{2}$$

On suppose que $x \in]0, L[$ et $v \in]-V, V[$, on peut consid²rer

- Les conditions aux limites p²riodiques

$$E(0, t) = E(L, t), \quad f(0, v, t) = f(L, v, t). \tag{3}$$

- Les conditions aux bords

$$E(x, t) > 0 \Rightarrow f(x, -V, t) = 0; \quad E(x, t) < 0 \Rightarrow f(x, V, t) = 0. \tag{4}$$

- La condition de moyenne nulle : $\int_x E = 0$.

Mod±le simplifi² de Vlasov-Poisson 1D

Le mod±le de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \partial_t f + v\partial_x f + E\partial_v f = 0 \\ \partial_x E = -1 + \int_v f dv \end{cases} \tag{5}$$

Avec les condition initiales

$$E(x,0) = E_0(x), \quad f(x,v,0) = f_0(x,v). \tag{6}$$

Mod±le de Vlasov-Poisson avec la transform²e de Fourier en vitesse

On consid±re la trasform² de Fourier en vitesse

$$\phi(x,\eta,t) = \int_{v=-\infty}^{+\infty} f(x,v,t)\exp(-I\eta v)dv, \tag{7}$$

où $I = \sqrt{-1}$.
L'²quation de Vlasov devient

$$\partial_t\phi + I\partial_x\partial_\eta\phi + IE\eta\phi = 0. \tag{8}$$

L'²quation de Poisson devient

$$\partial_x E(x,t) = -1 + \phi(x,0,t) \tag{9}$$

On consid±re un domaine assez grand en η, $]-\eta_{max},\eta_{max}[$ et on ²crit

$$\phi(-\eta_{max}) = \phi(\eta_{max}) = 0.$$

II. RÉSOUDRE LE SYSTÈME DE VLASOV-POISSON 1D

R²soudre le syst±me de Vlasov-Poisson 1D

On a fait dans 2 ²tapes suivantes

- Premi±re ²tape : Discr²tisation en vitesse de l'²quation de Vlasov
- Deuxi±me ²tape : R²soudre le syst±me hyperbolique avec la m²thode de volumes finis

On a test² le programme avec les trois cas tests suivants :

- L'²quation de transport
- Amortissement Landau
- Instabilit² double faiseau

(Voir : Helluy P., Pham N., Crestetto A. Space-only hyperbolic approximation of the Vlasov equation. 2012
http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00797974)

III. ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON AVEC LA TRANSFORMÉE DE FOURIER EN VITESSE

Discr²tisation en variable de l'²quation de Vlasov-Fourier

On consid±re l'²quation de Vlasov-Fourier

$$\partial_t\phi + I\partial_x\partial_\eta\phi + IE\eta\phi = 0. \tag{10}$$

La fonction $\phi(x,\eta,t)$ est approch²e par

$$\phi(x,v,t) = \sum_{j=1}^{P} w_j(x,t)\varphi_j(\eta) \tag{11}$$

L'²quation de Vlasov-Fourier devient

$$M\partial_t w + IA\partial_x w + IEBw = 0. \tag{12}$$

Les matrices M, A, B sont d²finies par

$$M_{ij} = \int_v \varphi_i\varphi_j,\; B_{ij} = \int_v v\varphi_i\varphi_j, \tag{13}$$

$$A_{ij} = \int_\eta (\varphi_i\varphi_j') - \frac{1}{2}\varphi_i(\eta_{max})\varphi_j(\eta_{max}) + \frac{1}{2}\varphi_i(-\eta_{max})\varphi_j(-\eta_{max}). \tag{14}$$

Discr²tisation en variable de l'²quation de Vlasov-Fourier

Propri²t²s du nouveau syst±me

- Le syst±me est ²crit dans l'espace de x et pas dans l'espace de (x, η)
  => On peut simplifier les calculs
  Appelons le nouveau syst±me : ²quation de Vlasov-Fourier r²duite.
- On a d²montr² que ce syst±me est hyperbolique
  => On peut utiliser les m²thodes num²riques pour les syst±mes hyperboliques pour r²soudre ce syst±me

On observe que :

- Les matrices M, A et B sont des matrices creuses si $\{\varphi_j\}_j$ est une base d'²l²ments finis.
- Les matrices M, A et B ont la m¶me structure.
  => On doit seulement calculer la structure pour une matrice.

R²soudre de l'²quation de Vlasov-Fourier r²duite

On consid±re l'²quation de Vlasov r²duite

$$\begin{aligned} M\partial_t w + IA\partial_x w + IEBw &= 0 \\ M\partial_t w &= I(-A\partial_x w - EBw) \\ M\partial_t w &= I(-A\partial_x w + S), \end{aligned} \tag{15}$$

où $S(w) = -EBw$ le terme source.
Le sch²ma semi-discret en espace s'²crit

$$M\partial_t w_i = I(-\frac{F(w_i, w_{i+1}) - F(w_{i-1}, w_i)}{\triangle x} + S(w_i)), \tag{16}$$

où

$$w_i(t) \simeq w(x,t), \quad x \in C_i$$

est l'approximation constante par morceaux de w dans la cellule C_i.

R²soudre de l'²quation de Vlasov-Fourier r²duite

On consid±re le sch²ma ordre 2 en temps

$$M\frac{w_i^{n+1/2}-w_i^n}{\triangle t/2}=I(-\frac{F(w_i^n,w_{i+1}^n)-F(w_{i-1}^n,w_i^n)}{\triangle x}+S(w_i^n)), \qquad (17)$$

$$M\frac{w_i^{n+1}-w_i^n}{\triangle t}=I(-\frac{F(w_i^{n+1/2},w_{i+1}^{n+1/2})-F(w_{i-1}^{n+1/2},w_i^{n+1/2})}{\triangle x}+S(w_i^{n+1/2})), \qquad (18)$$

où $F(w_L,w_R)$ est le flux centr²

$$F(w_L,w_R)=A\frac{w_L+w_R}{2} \qquad (19)$$

La fonction de distribution

La transform²e de Fourier inverse de la fonction ϕ s'²crit

$$f(x,v,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x,\eta,t)e^{I\eta v}d\eta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta_{max}}^{\eta_{max}}\phi(x,\eta,t)e^{I\eta v}d\eta. \quad (20)$$

La m²thode des rectangles consiste   approcher l'int²grale d²finie

$$\int_{-\eta_{max}}^{\eta_{max}}\phi(\eta)e^{I\eta v}d\eta \simeq \triangle_\eta \sum_{j=0}^{P-2}\phi(\eta_j)e^{I\eta_j v}. \quad (21)$$

On peut

- Calculer directement par la somme ; ou bien
- Utiliser l'algorithme de la transform²e de Fourier rapide

IV. CAS TEST

Amortissement Landau

Les conditions initiales sont

- La fonction de distribution

$$f_0(x,v) = (1+\varepsilon cos(kx))\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$$

donc on a

$$\phi_0(x,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x,v)e^{-I\eta v}dv = (1+\epsilon cos(kx))e^{-\frac{\eta^2}{2}}.$$

- Le champ ²lectrique

$$E_0(x) = \frac{\varepsilon}{k}sin(kx)$$

- Le domaine de x est $L = \frac{2\pi}{k}$
- $\eta \in]-20,20[$

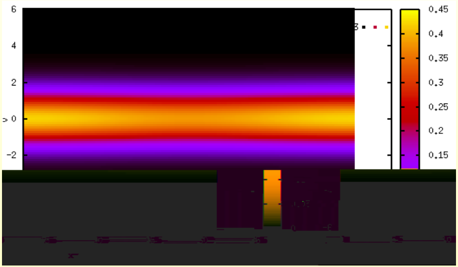
Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC

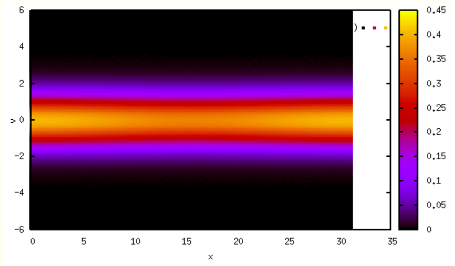
On choisit les param±tres $k = 0.2$ et $\varepsilon = 5 \times 10^{-2}$. On va comparer la m²thode de Vlasov-Fourier r²duite avec la m²thode PIC

- La fonction de distribution f.
- L'²nergie ²lectrique qui est d²finie par

$$\Xi(t) = \sqrt{\int_0^L E(x,t)^2 dx}.$$

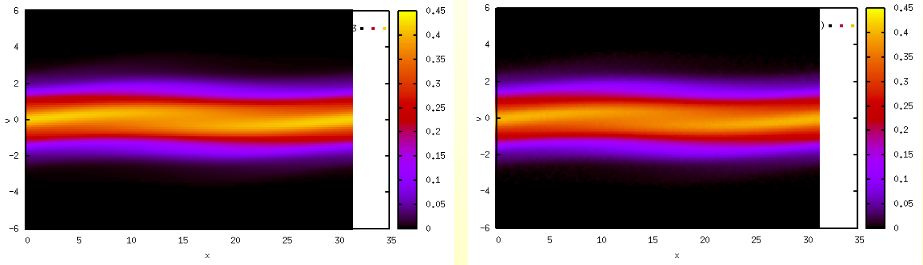
Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC





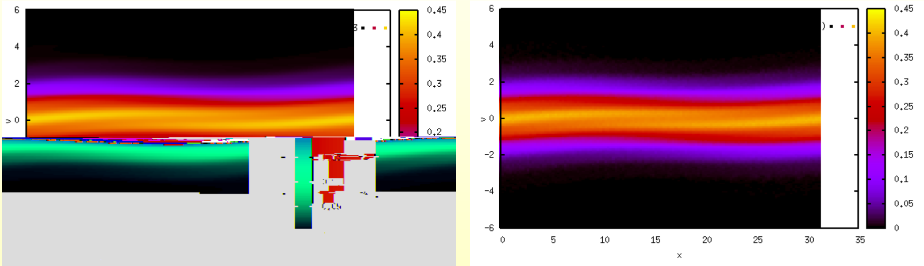
Amortissement Landau - Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 0$.

Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC



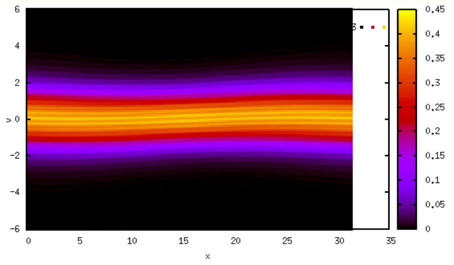
Amortissement Landau - Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 20$.

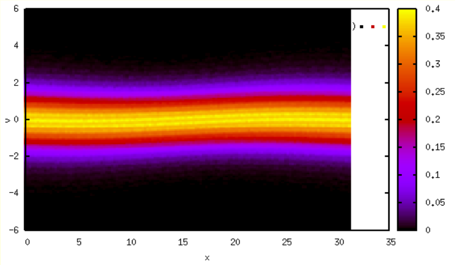
Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC



Amortissement Landau - Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 30$.

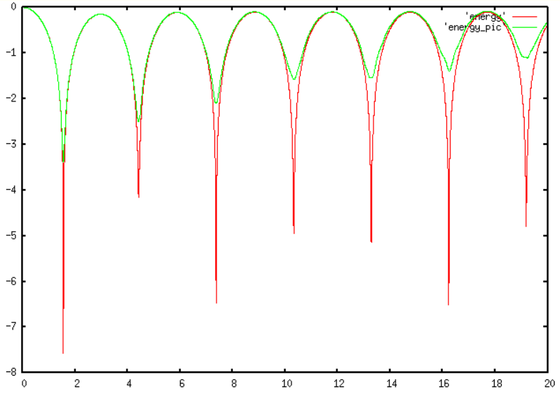
Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC





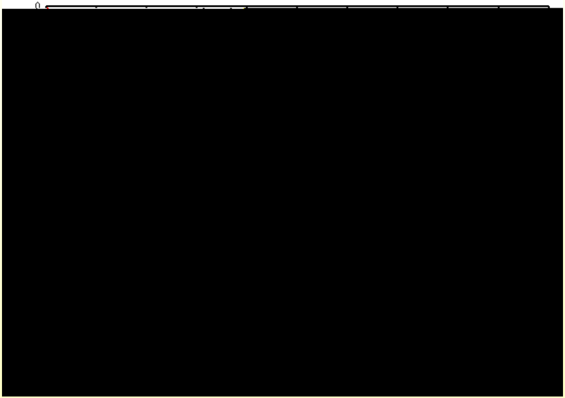
Amortissement Landau - Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar²   la m²thode PIC (droit) au temps $t = 100$.

Amortissement Landau : Comparer avec la m²thode PIC



Amortissement Landau - ’nergie ²lectrique au cours du temps : mod±le Vlasov-Fourier r²duit (en rouge) compar²   la m²thode PIC (en vert) apr±s un temps $t = 20$.

Amortissement Landau :



Amortissement Landau - ’nergie ²lectrique au cours du temps : mod±le Vlasov-Fourier r²duit (en rouge) compar² la solution analytique (en vert) apr±s un temps $t = 100$.

Instabilit² double faiseau

Dans ce cas test, la fonction de distribution initiale est

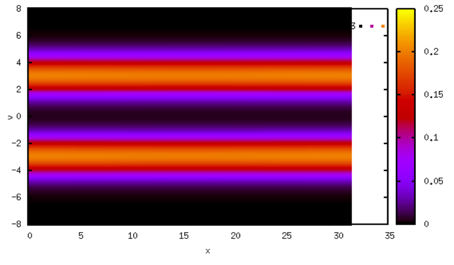
$$f_0(x,v) = (1+\epsilon cos(kx))\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(v+v_0)^2}{2}}\right),$$

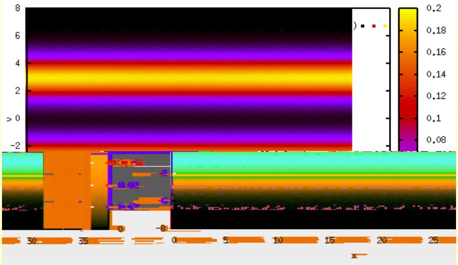
donc

$$\phi_0(x,\eta) = (1+\epsilon cos(kx))e^{-\frac{1}{2}\eta^2}cos(\eta v_0)$$

On choisit les param±tres $k = 0.2, \varepsilon = 5\times 10^{-3}$ et $v_0 = 3$ et le domaine d'²tude est $L = \frac{2\pi}{k}$.

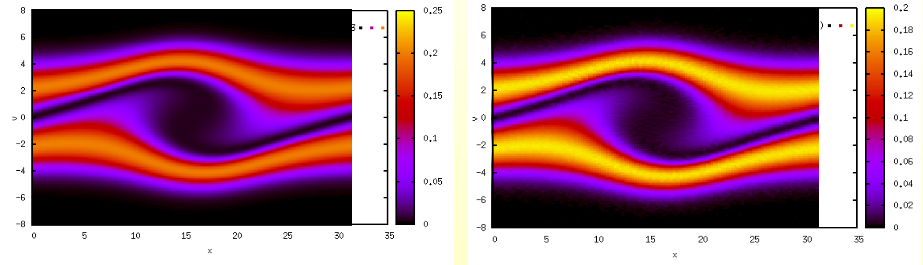
Instabilit² double faiseau : Comparer avec la m²thode PIC





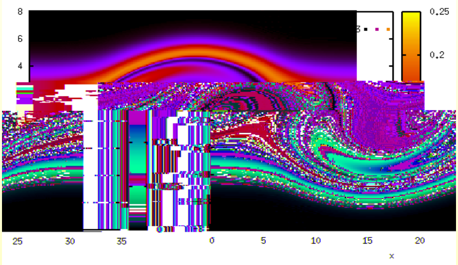
Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar²   la m²thode PIC (droite) au temps $t = 0$.

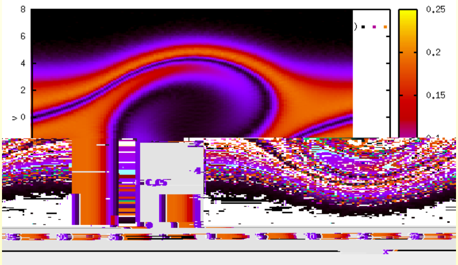
Instabilit² double faiseau : Comparer avec la m²thode PIC



Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Poisson r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 20$.

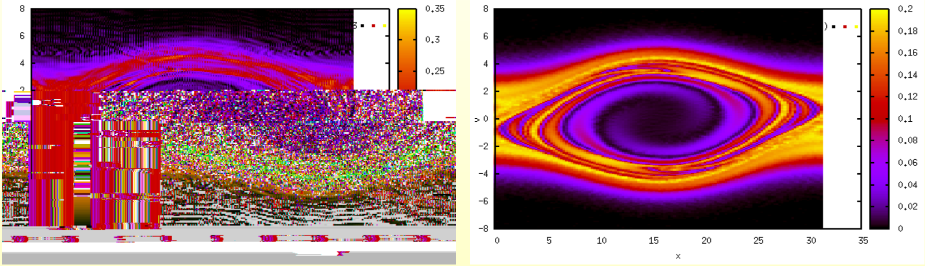
Instabilit² double faisceau : Comparer avec la m²thode PIC





Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 25$.

Instabilit² double faiseau : Comparer avec la m²thode PIC

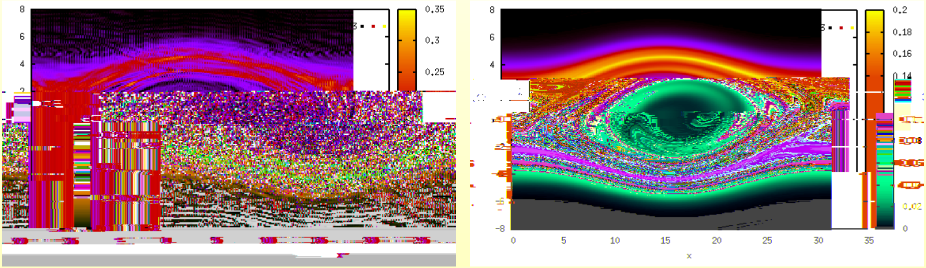


Fonction de distribution : mod±le Vlasov-Fourier r²duite (gauche) compar² la m²thode PIC (droite) au temps $t = 50$.

Instabilit² double faiseau : Le flux slightly upwinded

Dans le but d'enlever les oscillations dans le cas test, on va introduire un flux slightly upwinded :

$$F(w_L, w_R) = A\frac{w_L + w_R}{2} + I\frac{\varepsilon}{2}(w_R - w_L), \tag{22}$$



Fonction de distribution au temps $t = 50$. € gauche : avec le flux centr². € droite : avec le flux slightly upwinded ($\varepsilon = 0.05$).

Perspectives

- Passer le calcul en dimension 2
- Utiliser un sch²ma Galerkin Discontinu d'ordre ²lev².
- ’ tude d'un mod±le non-lin²aire
- ’ tude de l'²quation Vlasov-Poisson avec la transform²e de Fourier en vitesse et condition PML.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION !

A. Crestetto, Optimisation de méthodes numériques pour la physique des plasmas. Application aux faisceaux de particules chargées, her thesis, October 2012.

Eliasson, B. Outflow boundary conditions for the Fourier transformed one-dimensional Vlasov-Poisson system. J.Sci.Comput. 16 (2001).

F. Filbet, E. Sonnendrucker. Comparison of Eulerian Vlasov solvers Comput. Phys. Commun., 150 (2003).