Invariance des plurigenres

Théorème (Y.-T. Siu, 2002)

Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ *une famille de variétés projectives et* $(L, \tilde{h})$ *un fibré pseudo-effectif sur* $\mathcal{X}$ *avec* $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ *bien définie et* $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$ *et soit* $m \geq 1$ *un entier.*

Alors, toute section $s \in H^0(\mathcal{X}_0, mK_{\mathcal{X}_0} + L)$ *vérifiant :* $\|s\|_{\infty,\tilde{h}} < +\infty$ *s'étend en une section* $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{X}, mK_{\mathcal{X}} + L)$ *(c'est-à-dire :* $\tilde{s}_{\mathcal{X}_0} = s \wedge \pi^*(dt)$*).*

Invariance des plurigenres (cont.)

Théorème (M. Paun, 2005)

Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ *une famille de variétés projectives et* $(L, \tilde{h})$ *un fibré pseudo-effectif sur* $\mathcal{X}$ *avec* $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ *bien définie et soit* $m \geq 1$ *un entier.*

Alors, toute section $s \in H^0(\mathcal{X}_0, (mK_{\mathcal{X}_0} + L) \otimes \mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}))$ *s'étend en une section* $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{X}, mK_{\mathcal{X}} + L)$

Extension pour des sections de $m(K_X + L)$

Théorème

Soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ *une famille de variétés projectives et* $(L, \tilde{h})$ *un fibré pseudo-effectif sur* $\mathcal{X}$ *avec* $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ *bien définie et* $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$.

Alors, pour tout entier $m \geq 1$*, l'application de restriction :*

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L))$$

est surjective.

Extension pour des sections de $m(K_X + L)$ (cont.)

Théorème (S. Takayama, 2005)

Soit X une variété projective lisse, S une hypersurface (lisse, connexe) de X ; et $(L, \tilde{h})$ un fibré en droite muni d'une métrique singulière vérifiant :

(i) $i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega$[1] *avec $\epsilon > 0$ et ω une métrique hermitienne sur X*

(ii) $\tilde{h}_{|S}$ *est bien définie (i.e. non identiquement $-\infty$)*

(iii) *l'idéal multiplicateur de $\tilde{h}_{|S}$ est trivial : $\mathcal{I}(S, \tilde{h}_{|S}) = \mathcal{O}_S$*

Alors, pour tout entier $m \geq 1$, l'application de restriction :

$$H^0(X, m(K_X + L + S)) \longrightarrow H^0(S, m(K_S + L_S))$$

est surjective.

---

[1] cette condition est équivalente à $\kappa(X, L) = \dim(X)$

Pseudo-effectivité

Soit (L, h) un fibré en droite sur une variété X avec h une métrique singulière (*i.e.* si φ est un poids local de h, $\varphi \in L^1_{loc}$). Dans ce cas,

$$\imath\Theta_h(L) = \imath\partial\overline{\partial}\varphi$$

est bien défini comme $(1, 1)$-courant (fermé).

Définition

(L, h) est dit pseudo-effectif si $\imath\Theta_h(L)$ est un courant positif (ou, de façon équivalente, si les poids locaux de la métrique h sont des fonctions psh).

Pseudo-effectivité (cont.)

Exemple fondamental :

Si $(s_j)_{j=1..N} \in H^0(X, L)$ est une famille de sections de L, alors l'expression :

$$|\xi|_s^2 = \frac{|\xi|^2}{\sum_{j=1}^N |s_j(x)|^2} \quad (x \in X,\ \xi \in L_x)$$

définit (de manière intrinsèque) une métrique à courbure positive (au sens des courants) sur L.

Faisceaux d'idéaux multiplicateurs

Soit (L, h) un fibré en droite pseudo-effectif sur une variété X.

Définition

Pour $x \in X$ et φ un poids local de la métrique h sur un voisinage U de x, on pose :

$$\mathcal{I}(X, h)_x = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} | \int_U |f|^2 e^{-2\varphi} < +\infty \right\}$$

$\mathcal{I}(X, h)$ *est appelé faisceau d'idéaux multiplicateur de la métrique* h[1]

Théorème (A. Nadel, 89)

Si X est compacte et si (L, h) vérifie $i\Theta_h(L) \geq \epsilon\omega$ (avec $\epsilon > 0$) alors :

$$\forall\, k \geq 1,\ H^k(X, (K_X + L) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$$

[1] c'est un faisceau cohérent (Nadel)

Extension : cas $m = 1$

Théorème (T. Oshawa, K. Takegoshi, Y.-T. Siu)

Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ *une famille de variétés projectives et* (L, h) *un fibré pseudo-effectif sur* $\mathcal{X}$ *(avec* $h_{\mathcal{X}_0}$ *bien définie).*

Il existe une constante universelle C_0 *telle que toute section* $s \in H^0(\mathcal{X}_0, K_{\mathcal{X}_0} + L)$ *satisfaisant de plus :*

$$\int_{\mathcal{X}_0} \|s\|_h^2 < +\infty \, ,$$

admet un prolongement $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}} + L)$ *qui vérifie :*

$$\int_{\mathcal{X}} \|\tilde{s}\|_h^2 \leq C_0 \int_{\mathcal{X}_0} \|s\|_h^2$$

Extension : cas $m = 1$ (cont.)

Proposition

Soit (L, h) un fibré en droite sur X et S une hypersurface lisse (connexe) de X vérifiant :

(i) $i\Theta_h(L) \geq \epsilon\omega$ *(*$\epsilon > 0$*)*

(ii) h_S *bien définie.*

Toute section $s \in H^0(S, (K_S + L_S) \otimes \mathcal{I}(h_S))$ *admet alors une extension* $\tilde{s} \in H^0(X, (K_X + L + S))$.

Extension avec estimations L^2

Soit $s \in H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L))$ une section (non nulle) que l'on souhaite étendre à $\mathcal{X}$.

Il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections $s^k \otimes s_j^{(p)}$ (pour $1 \leq j \leq N_p$) en

$$\tilde{s}_j^{(km+p)} \in H^0(\mathcal{X}, (km+p)(K_{\mathcal{X}} + L) + A)$$

avec de plus les estimations suivantes :

Extension avec estimations L^2 (cont.)

(E1) si $1 \leq p \leq m-1$, on a

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_p} \left\| \widetilde{s}_j^{(km+p)} \right\|^2_{h_{km+p}}}{\sum_{j=1}^{N_{p-1}} \left\| \widetilde{s}_j^{(km+p-1)} \right\|^2_{h_{km+p-1}}} dV_\omega \leq C$$

(E2) pour $p = 0$ (et $k \geq 2$), l'estimation devient

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \left\| \widetilde{s}_j^{(km)} \right\|^2_{h_{km}}}{\sum_{j=1}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{s}_j^{((k-1)m+m-1)} \right\|^2_{h_{(k-1)m+m-1}}} dV_\omega \leq C$$

Extraction de racines

On considère les fonctions quasi-*psh* suivantes :

$$f_k = \frac{1}{2} \log \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \Big| \tilde{s}_j^{(km)} \Big|^2 \Big)$$

Elles vérifient (en utilisant (E1) et (E2)) :

$$\begin{cases} \imath\Theta(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + \imath\partial\overline{\partial}(\frac{1}{k} f_k) \geq -\frac{\imath}{k}\Theta(A) \\ \\ \frac{1}{k} f_k \leq C' \quad \text{(borne uniforme sur } \mathcal{X}) \\ \\ (\frac{1}{k} f_k)|_{\mathcal{X}_0} = \frac{1}{2}\log|s|^2 + \frac{1}{2k}\log\Big(\sum_{j=1}^{N_0}\Big|s_j^{(0)}\Big|^2\Big) \end{cases}$$

Extraction de racines (cont.)

Proposition

Soit $(\varphi_k)_k$ une suite de fonctions psh (sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$) ; on suppose cette suite (localement) uniformément majorée. On note

$$\varphi_\infty = \limsup_{k\to+\infty} \varphi$$

et φ_{reg} la limite régularisée, c'est-à-dire l'enveloppe semi-continue supérieurement de φ_∞. φ_{reg} est alors une fonction psh.

En particulier :

$$\begin{cases} \imath\Theta(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + \imath\partial\overline{\partial}(f_{reg}) \geq 0 \\ \\ f_{reg}|_{\mathcal{X}_0} \geq \frac{1}{2}\log|s|^2 \end{cases}$$

Extraction de racines (cont.)

La métrique suivante (sur $(m-1)(K_{\mathcal{X}}+L)+L$) :

$$h_\infty = e^{-\frac{m-1}{m}f_{reg}}h^{m-1}\otimes\tilde{h}$$

satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} \imath\Theta_{h_\infty}((m-1)(K_{\mathcal{X}}+L)+L)\geq 0 \\ \\ \int_{\mathcal{X}_0}|s|^2_{h_\infty}<+\infty \quad \text{(avec l'inégalité de Hölder)} \end{cases}$$

Conclusion : On peut donc appliquer une dernière fois le théorème d'Oshawa-Takegoshi (à $(m-1)(K_{\mathcal{X}}+L)+L$ et h_∞) et étendre la section s.$\square$