

# Thèse

présentée en vue de l'obtention du  
Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse  
Spécialité : Mathématiques Pures  
par  
**Emmanuel OPSHTEIN**

## APPROCHE DYNAMIQUE DU PROBLÈME DE L'INJECTIVITÉ DES APPLICATIONS HOLOMORPHES PROPRES

Soutenue le 1 Juillet 2005 devant le jury composé de :

<b>F. Berteloot</b>	Professeur, Université de Toulouse	Directeur
<b>D. Cerveau</b>	Professeur, Université de Rennes	Rapporteur
<b>J. Duval</b>	Professeur, Université de Toulouse	Examineur
<b>J.J. Loeb</b>	Professeur, Université d'Angers	Examineur
<b>J. Merker</b>	Chargé de recherche, Université de Marseille	Rapporteur
<b>A. Sukhov</b>	Professeur, Université de Lille	Rapporteur

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier  
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.



à mes grands-parents,



# Remerciements

François Berteloot a encadré cette thèse avec enthousiasme, disponibilité et son impressionnant sérieux. Travailler avec lui a été à la fois très instructif et vraiment plaisant. Sa bonne humeur, sa patience et sa capacité d'écoute ont eu raison des moments difficiles. Pour tout ceci, je tiens à lui exprimer ma sincère admiration et mes remerciements.

Je souhaite aussi remercier Joël Merker pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Il m'a spontanément fourni une aide précieuse pour aborder la théorie de Chern-Moser et la méthode de Cartan pour la résolution des  $G$ -structures. J'ai profité de sa gentillesse et de ses explications patientes lors de nombreuses discussions, et je suis très heureux qu'il ait accepté d'écrire un rapport. Dominique Cerveau et Alexandre Sukhov ont aussi rapporté ce travail, ils me font un grand honneur. Enfin, c'est un grand plaisir pour moi que Julien Duval et Jean-Jacques Loeb participent au Jury.

La formation mathématique dont j'ai bénéficié a été très peu solitaire. Je garde un excellent souvenir de mes années à Lyon, et des nombreuses soirées mathématico-festives du 218. Merci à Thierry, Djamel, Mathieu, Pierre . . . J'ai aussi une pensée particulière pour le bureau 31 et ses trois mousquetaires, pourfendeurs de théorèmes mal ajustés souvent faux et parfois vrais, unis dans l'adversité, la curiosité et la jovialité. Plus généralement, les doctorants de Picard m'ont beaucoup appris lors des séances du GDTE.

J'ai compté avec de très bons amis pendant toutes ces années. Joan, Nathalie, Guillaume, Guillaume, Guy, Julien, Mathieu . . . Ils méritent chacun bien plus qu'une petite place dans cette page de remerciements.

Ma maman, mon papa, ma p'tite soeur et Yoggi, par la confiance qu'ils ont placée en moi, l'amour, la chaleur et la joie dont ils m'ont entouré, m'ont permis de survivre en milieu hostile. Je leur suis infiniment reconnaissant et redevable.

Enfin, dernière mais pas deernière, je veux remercier Agnès, qui me donne sa tendresse et sa beauté.



# Introduction.

Cette thèse concerne principalement le problème de l’injectivité :

*Les auto-applications holomorphes propres d’un domaine régulier de  $\mathbb{C}^k$  ( $k > 1$ ) sont-elles nécessairement des automorphismes ?*

Cette question a fait l’objet de nombreux travaux depuis ceux d’Eisenman [40], Alexander [2] et Pinchuk [63] dans les années 70. La stratégie que nous proposons pour l’aborder est nouvelle. Elle s’appuie sur le contraste entre la dynamique de l’auto-application dans le domaine et celle de son prolongement différentiable au bord. En présence de degré, la dynamique du prolongement est riche car d’entropie positive tandis que la dynamique interne, gouvernée par l’alternative récurrence/non-récurrence, est triviale.

Notons qu’un simple prolongement au bord des propriétés dynamiques internes ne peut être espéré et qu’aucune contradiction ne peut probablement être obtenue ainsi. Nous montrons en effet, en perturbant un exemple classique de Yoccoz, que les variétés stables (dans le cas récurrent) peuvent subsister sur le bord ou au contraire toutes disparaître.

Notre méthode consiste à relier la dynamique interne aux propriétés d’expansivité de la trace de l’application sur les régions strictement pseudoconvexes. Plus généralement, nous établissons des estimations d’expansivité pour certaines familles de transformations CR. Celles-ci nous permettent de montrer que la dynamique interne n’est jamais récurrente dans un domaine à bord lisse, puis que l’ensemble non-errant évite les régions strictement pseudoconvexes. En particulier, l’entropie est toujours portée par le lieu de faible pseudoconvexité. Cette propriété de rigidité semble pouvoir forcer l’injectivité. Nous le vérifions pour la classe des domaines disques et strictement géométriquement convexes de  $\mathbb{C}^2$ . Ceci généralise un résultat de Coupet-Pan-Sukhov.

Ces résultats montrent que la dynamique d’une auto-application holomorphe propre et non-injective d’un domaine régulier est non-récurrente. Cela signifie essentiellement que le domaine est un bassin de type parabolique. Lorsque le “point à l’infini” est un point de stricte pseudoconvexité, l’étude précédente révèle le comportement contractant de la dynamique sur le lieu de stricte pseudoconvexité. Un théorème dû à Webster [73], Burns-Shnider [24], Beloshapka [13] et Loboda [58] assure alors que la partie strictement pseudoconvexe est sphérique (*i.e.* localement CR-difféomorphe à un ouvert de la sphère euclidienne). Sa preuve utilise pleinement la théorie de Chern-Moser. Nous nous sommes attachés à en fournir une démonstration élémentaire. Celle-ci repose sur les techniques de dilatations de coordonnées de Pinchuk ainsi que sur les propriétés d’expansivité des familles d’applications CR mentionnées ci-dessus.

## Problème de l'injectivité.

Dans le plan complexe, les travaux de Riemann et Carathéodory sur l'uniformisation des domaines aboutirent à des résultats très complets. Tout domaine simplement connexe  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$  est conformément équivalent au disque unité. Lorsqu'un morceau de  $b\Omega$  est régulier ( $\mathcal{C}^\alpha$ ), la représentation conforme s'y prolonge avec la même régularité. Si  $b\Omega$  est en outre analytique réel alors elle se prolonge à un voisinage de  $\overline{\Omega}$ . L'analyse des domaines simplement connexes de  $\mathbb{C}$  se résume ainsi à celle du disque. De plus, les automorphismes et plus généralement les auto-applications holomorphes propres du disque sont parfaitement identifiés. Ces dernières correspondent aux produits de Blaschke finis :

$$B(z) := e^{i\alpha} \prod_{i=1}^n \frac{z - a_i}{1 - \bar{a}_i z}, \quad |a_i| < 1, n \in \mathbb{N}.$$

En plusieurs variables, le théorème de représentation conforme est tragiquement faux. Poincaré prouva qu'il n'existe pas de biholomorphisme entre la boule et le polydisque en comparant leur groupe d'automorphisme. Une autre approche, très naturelle et moins factuelle, consiste à exploiter la présence (resp. l'absence) de disques holomorphes dans le bord du polydisque (resp. de la boule). Cette démarche a le mérite d'expliquer la différence frappante entre les théories d'une et plusieurs variables complexes par l'absence de géométrie CR en dimension 1. L'utilisation systématique de la géométrie CR dans les problèmes d'équivalence est cependant dépendante d'un "théorème de Carathéodory multidimensionnel", à savoir un théorème de prolongement lisse des biholomorphismes au bord.

Ce problème d'extension se révéla bien plus délicat que son analogue unidimensionnel et reste à ce jour partiellement ouvert. Le premier résultat général dans cette direction fut obtenu par C. Feffermann ([41], 1974) :

**Théorème.** *Tout biholomorphisme entre domaines strictement pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^k$  à bords  $\mathcal{C}^\infty$  se prolonge en un CR-difféomorphisme entre leur bord.*

La preuve de ce théorème exploite l'invariance de la métrique de Bergman sous biholomorphisme, par une étude soignée du comportement de ses géodésiques au voisinage du bord. Dans les années 80, la métrique de Bergman fut détrônée par la projection de Bergman, des outils de prolongements puissants furent développés et les méthodes furent spectaculairement simplifiées. Ainsi, Bell ([12], 1981) et Bell-Ligočka ([11], 1980) établirent l'existence d'un prolongement pour les biholomorphismes entre domaines vérifiant la condition (R). Ce résultat fut généralisé aux applications holomorphes propres par Bell-Catlin ([10], 1982) et Diederich-Fornæss ([35], 1982).

**Théorème.** *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des domaines pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses. Si  $\Omega_1$  vérifie la condition (R) alors toute application holomorphe propre entre  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  se prolonge à  $b\Omega_1$  en une application CR lisse.*

Sans entrer dans les détails, précisons qu'un domaine  $\Omega$  vérifie la condition (R) si sa projection de Bergmann  $L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  envoie  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  dans lui-même. La

condition (R) est une propriété assez générale des domaines, bien moins restrictive que la stricte pseudoconvexité ou le type fini. On a longtemps conjecturé qu'elle était vraie dans les domaines pseudoconvexes à bords lisses. Barret prouva que la condition (R) n'a pas d'obstruction locale dans ces domaines ([3], 1986). M.Christ montra pourtant que les Worm domains de Diederich-Fornæss ne satisfont pas cette condition ([30], 1996). Le problème du prolongement au bord, même continu, reste quant à lui ouvert. Dans les domaines à bords réels anaytiques, il convient de citer les travaux de Diederich-Pinchuk ([38, 37], 1995 et 2003). Les techniques reposent sur le principe de réflexion.

**Théorème (Diederich-Pinchuk).** *Soit  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  une application holomorphe propre entre des domaines à bords analytiques réels. Si  $F \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  alors  $F$  s'étend holomorphiquement à un voisinage de  $\Omega$ . En dimension 2, l'hypothèse de continuité jusqu'au bord de  $F$  est superflue.*

On pourra consulter l'article de revue de Forstnerič [44] pour des précisions. Le problème d'équivalence biholomorphe entre domaines se traduit donc en terme d'équivalence CR entre bords des domaines dans un grand nombre de cas. Or on sait depuis les travaux d'E.Cartan [25] et de Chern-Moser ([28], 1974) que la structure CR du bord, préservée par les prolongements des applications holomorphes, est très rigide. Deux germes d'hypersurface Lévi non-dégénérées génériques ne sont pas CR-difféomorphes. On s'attend donc à ce que le groupe des automorphismes d'un domaine soit en général trivial, avec des exceptions notables telles la boule ou des domaines symétriques.

Il avait été noté en 1974 par Pinchuk que les auto-applications holomorphes propres des domaines strictement pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$ , lorsqu'elles se prolongent de façon  $\mathcal{C}^2$ , sont des automorphismes. Le théorème suivant est une version légèrement plus précise du résultat établi par Pinchuk grâce à l'éclairage d'un article de Fornæss paru en 1978.

**Théorème (Pinchuk [63], Fornæss [42]).** *Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe borné à bord lisse et  $f$  une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$ . Si  $f$  est non-injective alors  $\text{Crit } f := \{ \text{Jac } f = 0 \}$  est non vide et n'accumule  $b\Omega$  qu'en des points de faible pseudoconvexité.*

On peut considérer ce théorème comme le premier d'une série visant à répondre à la question toujours ouverte à ce jour, même pour des applications lisses jusqu'au bord :

**Problème de l'injectivité.** Une auto-application holomorphe propre d'un domaine pseudoconvexe borné à bord lisse dans  $\mathbb{C}^k$  est-elle nécessairement un automorphisme lorsque  $k > 1$  ?

Les restrictions sur les domaines concernés par cette question méritent quelques éclaircissements. On s'attend en fait à une réponse positive même dans les domaines non-pseudoconvexe, nous manquons juste des moyens pour les prendre en considération (voir tout de même [51] pour les domaines à bords lisses réels analytiques). L'une des raisons pour lesquelles seuls les domaines bornés sont envisagés est l'existence

de contre exemple triviaux dans  $\mathbb{C}^k$  : les applications polynomiales. L'hypothèse de lissité du bord est quant à elle nécessaire comme le montre n'importe quel bassin d'attraction d'un point superattractif dans  $\mathbb{C}^k$ . L'exemple frappant des relevés polynomiaux à  $\mathbb{C}^{k+1}$  des endomorphismes de Lattès, étudié par Berteloot-Loeb [19] puis Dupont [39] fournit même des bassins bornés cerclés à bords lisses et sphériques sauf le long de la trace d'un ensemble algébrique. Signalons enfin que dans certaines variétés il existe des contre-exemples à la question 1. Ceux-ci sont dûs à Burns-Schneider [24] et Dupont [39].

Chaque résultat concernant le prolongement des biholomorphismes fut accompagné de réponses partielles à la question 1. En localisant le théorème d'extension de Feffermann, Alexander montra que les auto-applications holomorphes propres de la boule euclidienne de  $\mathbb{C}^k$  ( $k \geq 2$ ) sont des automorphismes ([2], 1977). Une première série de travaux s'inscrit dans la perspective ouverte par Alexander. Ainsi, Pinchuk ([64], 1978) montra comment ramener le cas strictement pseudoconvexe à celui de la boule par un argument de dilatations de coordonnées. Henkin et Tumanov ([72], 1982) puis Henkin et Novikov ([50], 1984) généralisèrent le résultat d'Alexander aux domaines symétriques bornés. Les progrès accomplis dans les années 80 sur le prolongement des applications holomorphes propres simplifièrent considérablement l'abord de cette question. En particulier, le théorème d'Alexander devint limpide car les applications se prolongent au voisinage de la frontière ([8], 1983). Dans ce contexte, une nouvelle vague de travaux aborda le cas des domaines faiblement pseudoconvexes. Citons les plus marquants. Bedford et Bell ([4], 1982) résolurent le cas où  $b\Omega$  est analytique réel. Diederich et Fornaess ([36], 1982) celui où le lieu de faible pseudoconvexité est petit (de mesure  $2k - 3$  dimensionnelle nulle). D'autres réponses concernent des domaines présentant des symétries. Citons Berteloot et Pinchuk ([20], 1994) pour les domaines de Reinhardt de  $\mathbb{C}^2$  bornés complets et distincts du bidisque ; Berteloot ([17], 1998) pour les domaines de Reinhardt de  $\mathbb{C}^k$  bornés à frontière  $\mathcal{C}^2$ . Coupet, Pan et Sukhov ([31], 2001) traitèrent le cas des domaines cerclés de type fini de  $\mathbb{C}^2$ . Enfin, dans un registre sensiblement différent, Tsai ([71], 1993) prolongea les résultats de Henkin-Novikov.

**La stratégie classique.** La plupart de ces travaux reposent sur une stratégie commune exploitant la compétition entre deux phénomènes : l'ensemble critique croît avec l'itération mais sa trace au bord reste limitée par le lieu de faible pseudoconvexité.

Le résultat de Bedford-Bell illustre très clairement ce point de vue, aussi en détaillons-nous la preuve.

**Théorème (Bedford-Bell).** *Si  $\Omega$  est un domaine pseudoconvexe borné dans  $\mathbb{C}^k$  à frontière lisse et réelle analytique alors toute auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  est un automorphisme.*

Preuve : Introduisons le type  $\tau(p)$  d'un point  $p \in b\Omega$ . Par définition, c'est l'ordre d'annulation en  $p$  du déterminant de Lévi  $\Lambda_r$  d'une fonction définissante locale de

$b\Omega$  en  $p$  :

$$\Lambda_r := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial r / \partial \bar{z}_j \\ \frac{\partial r}{\partial z_i} & \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \end{bmatrix}.$$

Le théorème repose sur la stratification de  $b\Omega$  en sous-variétés analytiques données par les sur-niveaux de la fonction  $\tau$ . Les ensembles  $S(i)$  des points de type supérieur à  $i$  sont des ensembles analytiques réels et il existe un entier  $d$  tel que

$$b\Omega = S(0) \supset S(1) \supset \cdots \supset S(d) \supset S(d+1) = \emptyset.$$

Etant donnée une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$ , on considère son prolongement à  $\bar{\Omega}$ , toujours noté  $f$  [10, 35]. Ce prolongement stabilise évidemment  $b\Omega$ . La preuve découle de l'observation cruciale :

$$(*) \begin{cases} \tau(f(p)) \leq \tau(p) & \forall p \in b\Omega, \\ \tau(f(p)) < \tau(p) \iff \text{Jac } f(p) = 0. \end{cases}$$

Soit  $d_{max}$  le type maximal des points en lesquels  $f'$  n'est pas inversible et  $C_1, \dots, C_n$  une partition de  $S_{d_{max}}$  en composantes connexes, le caractère analytique de  $b\Omega$  garantit que cette partition est finie. On peut supposer que  $f$  branche sur  $C_1$ . Il est clair que  $f$  ne branche en aucun point de  $f^{-i}(C_1)$ ,  $i \in \mathbb{N}$  d'après (\*). On en tire par un simple argument de connexité que  $f^{-i}(C_1) = \bigcup_{k \in I_i} C_k$  et que chaque  $C_k$ ,  $k \in I_i$  est envoyé surjectivement sur  $C_1$  par  $f^i$ . On peut trouver  $j \geq i$  tels que  $I_i \cap I_j \neq \emptyset$ . Il existe donc  $k \in I_i$  et  $k' \in I_j$  tels que  $C_k = C_{k'}$ . Alors  $C_1 = f^j(C_{k'}) = f^j(C_k) = f^{j-i}(C_1)$ . Ceci est impossible d'après (\*) car  $f$  branche sur  $C_1$ .  $\square$

Cette preuve fonctionne clairement pour les domaines dont le bord est lisse de type fini et tel que  $S(d)$  possède un nombre fini de composantes connexes pour tout  $d$ . Remarquons tout de même que tous les domaines de type fini ne vérifient pas cette propriété.

**Exemple :** Soit  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction lisse. Si  $f$  est suffisamment petite en norme  $C^4$  alors le domaine  $\Omega := \{|z|^4 + |w|^2 + f(w)|z|^2 \leq 1\} \subset \mathbb{C}^2$  est convexe de type fini. Sa partie de faible pseudoconvexité est  $\{(z, w) \mid |z| = 0, |w| = 1, f(w) = 0\}$ .

Si  $f$  a une infinité de zéros sur le cercle  $\{z = 0, |w| = 1\}$  alors le domaine  $\Omega$  est de type fini et possède une infinité de composantes de faible pseudoconvexité.

Preuve : Soit  $f$  une fonction réelle positive, lisse sur  $\mathbb{C}$ , avec  $\|f\|_{C^4} \ll 1$ . Le domaine  $\Omega$  est alors un domaine lisse, défini par la fonction  $r(z, w) := |z|^4 + |w|^2 + f(w)|z|^2 - 1$ . Il s'agit donc d'une perturbation du domaine  $|z|^4 + |w|^2 = 1$  qui est de type inférieur à 2 en tout point. Le type étant par définition l'ordre d'annulation du déterminant de Lévi, l'hypothèse  $\|f\|_{C^4} \ll 1$  garantit que le domaine perturbé reste de type inférieur à 2. Un calcul explicite montre que :

$$\begin{cases} \text{tr}(\partial\bar{\partial}r)(z, w) = 1 + f(w) + |z|^2(4 + O(\|f\|_{C^2})), \\ \det(\partial\bar{\partial}r)(z, w) = f(w) + |z|^2(4 + O(\|f\|_{C^2})). \end{cases}$$

Comme  $f$  est positive, la hessienne de  $r$  est donc positive et  $\Omega$  est convexe. De plus,  $\det(\partial\bar{\partial}r)(z, w)$  s'annule sur  $b\Omega$  exactement pour  $|z| = 0$ ,  $|w| = 1$  et  $f(w) = 0$ . En ces points, le noyau de  $\partial\bar{\partial}r$  et de  $\bar{\partial}r$  coïncident tous deux avec  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}\partial/\partial z$ .  $\square$

**Une nouvelle stratégie.** Dans cette thèse, nous adoptons un nouveau point de vue axé sur une approche plus dynamique. Nous montrons que l'entropie des prolongements au bord est toujours portée par le lieu de faible pseudoconvexité et confrontons cette contrainte à la richesse dynamique en présence de degré.

Dans cette perspective, nous étudions le lien entre la dynamique d'une application au bord et à l'intérieur d'un domaine. Comme on le voit assez facilement, cette dernière est gouvernée par une dichotomie remarquable. Elle est soit *non-récurrente*, ce qui signifie que toutes les limites sont à valeurs dans le bord, soit *récurrente* auquel cas l'orbite de tout compact reste relativement compacte. Dans le cas d'une dynamique récurrente, toutes les limites sont des automorphismes d'une même variété holomorphe obtenue par rétraction du domaine. Nous dirons que cette variété est le *rétract* de l'application.

Une partie fondamentale de notre étude consistera à établir les propriétés de dilatations au bord des itérées d'une auto-application holomorphe propre pour chaque type de dynamique envisagée. Ce travail sera effectué dans la partie 2.

Notre premier résultat montre que la régularité du bord est une obstruction à la récurrence :

**Théorème 1.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^k$  possédant une fonction *p.s.h* lisse et définissante globale. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une application holomorphe propre dont la dynamique est récurrente. Le rétract de  $f$  ne peut être ni un point ni une surface de Riemann. Si  $k = 2$  alors  $f$  est un automorphisme.*

Soulignons que l'essentiel de la démonstration de ce théorème est valable en toutes dimensions. De plus, elle s'adapte aux dynamiques non-récurrentes en se restreignant à une classe de domaines possédant de bonnes fonctions pics *p.s.h* : les domaines *LB-réguliers*. Cette classe englobe les domaines de type fini de  $\mathbb{C}^2$  et les domaines strictement géométriquement convexes. Nous montrons que l'entropie de  $f|_{b\Omega}$  est portée par le lieu de faible pseudoconvexité en contrôlant son ensemble non-errant  $NW(f|_{b\Omega})$  :

**Théorème 2.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse et *LB-régulier* dont le bord contient au moins deux points de faible pseudoconvexité. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  holomorphe propre se prolongeant différemmentiellement au bord et dont la dynamique est non-récurrente. Alors il existe au plus un point  $a \in SPC(b\Omega)$  tel que*

$$NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega) \cup \{a\}.$$

Plus précisément deux cas peuvent se présenter :

1.  $f^n$  converge localement uniformément sur  $\Omega$  et sur  $SPC(b\Omega)$  vers un point  $a \in SPC(b\Omega)$  et  $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega) \cup \{a\}$ ,

ou

2. les limites de  $f^n$  sur  $\Omega$  et sur  $SPC(b\Omega)$  coïncident et sont toutes des points de  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Alors  $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$ .

Enfin, nous faisons aboutir notre stratégie pour la classe des domaines disqués de  $\mathbb{C}^2$ . Nous obtenons une généralisation du résultat de Coupet-Pan-Sukhov [31] :

**Théorème 3.** *Soit  $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$  un domaine pseudoconvexe disqué, LB-régulier et dont la fonction de jauge est lisse. Alors toute application holomorphe propre de  $\Omega$  dans lui-même est un automorphisme de  $\Omega$ .*

La démonstration de ce théorème épouse parfaitement le point de vue développé ici. Lorsque  $f$  n'est pas injective on voit, en utilisant les théorèmes 1 et 2 ainsi que la géométrie du domaine, que toute la dynamique de  $f|_{b\Omega}$  se concentre sur un unique cercle de faible pseudoconvexité. Des estimations standards d'entropie topologique montrent que ceci est impossible.

**Une situation modèle : le bassin d'un point attractif.** Afin d'illustrer les liens entre dynamique à l'intérieur et au bord, considérons la situation dynamique la plus simple : celle où le domaine est le bassin d'attraction d'un point fixe.

**Théorème.** *Un domaine borné de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse possédant une fonction p.s.h définissante globale  $\chi$  ne peut être le bassin d'attraction de l'un de ses points pour une transformation holomorphe.*

La démonstration permet d'illustrer les méthodes utilisées dans cette thèse tout en évitant les difficultés techniques liées au cas général. En voici le principe. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une application holomorphe propre telle que  $(f^n)_n$  converge localement uniformément vers  $a \in \Omega$ . Il suffit pour aboutir à une contradiction de montrer que  $f$  est injective car alors  $f$  doit préserver la métrique de Kobayashi de  $\Omega$ . On voit dans un premier temps que la suite  $f^n$  présente un "défaut" d'équicontinuité dans la direction normale au voisinage de  $b\Omega$ . On en déduit que les dérivées de  $f^n$  évaluées sur les directions tangentielles complexes explosent sur  $S\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$ . En raison de la non-intégrabilité de la distribution complexe, il s'ensuit que  $b\Omega = S\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$  et donc que  $f$  est injective. Voyons cela plus en détail.

Introduisons quelques notations. Soit  $U$  un ouvert de  $b\Omega$  relativement compact dans  $S\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$ . Un théorème de prolongement dû à Boas et Straube [21] garantit que  $f$  se prolonge en une application lisse de  $\overline{\Omega}$  (théorème 1.3.4). Pour  $q \in b\Omega$ , nous notons  $T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$  le plan tangent complexe à  $b\Omega$  en  $q$  et

$$n_q(f^n) := \langle f^{n'}(q)\vec{N}(q), \vec{N}(f^n(q)) \rangle.$$

Cette quantité mesure le "taux d'échappement dans la direction normale" de  $f^n$ .

**Fait 1 :** *La suite  $n_q(f^n)$  tend vers l'infini uniformément sur  $b\Omega$ .*

Considérons l'ensemble  $\Omega_\epsilon := \{z \in \Omega \mid d(z, b\Omega) \geq \epsilon\}$ . Pour  $n \geq n_\epsilon \gg 1$ , on a  $f^n(\Omega_\epsilon) \subset \{\chi \leq \chi(a)/2\}$ . Le lemme de Hopf appliqué à  $\chi \circ f^n$  montre que  $\chi \circ f^n$  est une nouvelle fonction p.s.h définissante globale pour  $\Omega$  et que  $\|\vec{\nabla}\chi \circ f^n\| \gtrsim 1/\epsilon$  pour  $n \geq n_\epsilon$  (voir lemme 2.2.1). Ceci suffit car  $n_q(f^n) \simeq \|\vec{\nabla}\chi \circ f^n(q)\|$  :

$$\|\vec{\nabla}\chi \circ f^n(q)\| = \langle \vec{\nabla}\chi \circ f^n(q), \vec{N}(q) \rangle = \langle \vec{\nabla}\chi(f^n(q)), f^{n'}(q)\vec{N}(q) \rangle \simeq n_q(f^n).$$

**Fait 2 :** *Il existe une constante  $c > 0$  telle que l'estimation*

$$\|F'(q)u\| \geq cn_q(F)^{1/2}\|u\| \quad \forall q \in U, \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$$

ait lieu pour toute auto-application holomorphe propre  $F$  de  $\Omega$ .

Comme  $U \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ , il existe une constante  $\kappa$  telle que pour toute fonction *p.s.h* définissante globale  $\psi$  de  $\Omega$ ,

$$\mathcal{L}(\psi, q, u) \geq \kappa \|\vec{\nabla}\psi(q)\| \|u\|^2 \quad \forall q \in U, \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega.$$

Nous avons remarqué que  $\|\vec{\nabla}\chi \circ F\| \simeq n_q(F)$  lorsque  $F$  est une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$ . Ainsi,  $\mathcal{L}(\chi \circ F, q, u) \gtrsim n_q(F)\|u\|^2$ . Or  $\mathcal{L}(\chi \circ F, q, u) = \mathcal{L}(\chi, F(q), F'(q)u) \lesssim \|F'(q)u\|^2$  puisque  $b\Omega$  est lisse. On obtient donc finalement :

$$\|F'(q)u\| \gtrsim n_q(F)^{1/2}\|u\|.$$

**Conclusion :** Fixons  $p \in U$ . On voit à l'aide des faits 1 et 2 que  $\|f^{n'}(q)u\|$  tend vers l'infini uniformément sur  $\{(q, u) \in U \times T_q^{\mathbb{C}}b\Omega, \|u\| = 1\}$ . Les chemins dans  $U$  dont la dérivée est tangente à la distribution complexe  $T^{\mathbb{C}}b\Omega$  sont donc dilatés par  $f^n$ . L'image de  $f^n$  contient donc tous les points pouvant être joints à  $f^n(p)$  par un chemin complexe de longueur  $R_n$  où  $R_n$  tend vers l'infini. Ceci est suffisant pour établir que  $f^n(U)$  contient  $b\Omega$  pour  $n$  assez grand au vu des propriétés de non-intégrabilité de la distribution complexe : la distance entre deux points du bord "le long de la distribution complexe" est bornée (voir la proposition 1.2.7). Les propriétés classiques des prolongements assurent alors que  $b\Omega = f^n(U)$  est strictement pseudoconvexe. D'après le théorème de Pinchuk cité ci-dessus,  $f$  est un biholomorphisme.  $\square$

## Contractibilité des hypersurfaces strictement pseudoconvexes.

En dimension 2 tout au moins, le théorème 1 prohibe tout comportement récurrent à l'intérieur du domaine. Le théorème 2 constitue quant à lui un point de départ pour l'étude des dynamiques non-récurrentes. Il assure par exemple qu'un point de stricte pseudoconvexité dans l'adhérence de la dynamique est un point fixe, qui attire les orbites des points de  $\Omega$  et  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Dans cette situation, les travaux de Chern-Moser ([28], 1974) permettent de compléter le tableau de façon frappante : l'ensemble  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  est sphérique, c'est-à-dire localement CR difféomorphe à un ouvert de la sphère. Rappelons que Chern et Moser établirent l'existence d'une liste complète d'invariants CR des hypersurfaces Levi non-dégénérées. Dans la situation contractante envisagée, ces invariants sont clairement constants sur  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . En suivant cette voie, Webster ([73], 1974), Burns-Shnider ([24], 1977), Beloshapka ([13], 1977) et Loboda ([58], 1979) prouvèrent le résultat suivant :

**Théorème 4.** *Soient  $S$  et  $S'$  deux hypersurfaces strictement pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^k$  (éventuellement à bord). S'il existe une suite de difféomorphismes CR  $(f_n)_n$  de  $S$  à valeurs dans  $S'$  telles que  $(f_n)_n$  converge uniformément vers un point de  $S'$  alors  $S$  est localement sphérique, i.e. localement CR-difféomorphe à un ouvert de la sphère euclidienne.*

La démarche de Webster et Burns-Shnider est la suivante. La résolution du problème de  $G$ -structure effectuée dans [28] produit un tenseur CR-invariant nul si et seulement si l'hypersurface est sphérique. Dans le cas non-sphérique, une normalisation de cet invariant conduit à la réduction du groupe structural de l'hypersurface à  $U(k-1)$ . Plus concrètement, ceci montre l'existence d'une distance CR-invariante sur les hypersurfaces non-sphériques, qui interdit tout comportement dynamiquement contractant. Beloshapka et Loboda déduisent quant à eux ce théorème d'une étude de l'action des difféomorphismes CR sur les chaînes, et plus précisément d'un résultat de linéarisation locale du groupe d'automorphismes CR de l'hypersurface ainsi qu'au théorème 4.

Un analogue du théorème 4 pour les biholomorphismes des domaines est le théorème de Wong-Rosay. En 1977, Wong [74] caractérisait la boule unité parmi les domaines strictement pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  comme étant le seul à posséder un groupe d'automorphismes non-compact. Rosay donna une version semi-locale de l'argument de Wong ([66], 1979), puis Pinchuk en donna une démonstration basée sur les techniques de dilatations de coordonnées ([63], 1991).

**Théorème (Wong-Rosay).** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  et  $(f_n)_n$  une suite d'automorphismes de  $\Omega$ . S'il existe un point  $z_0 \in \Omega$  dont l'orbite  $\{f_n(z_0)\}_n$  accumule un point au voisinage duquel  $b\Omega$  est lisse et strictement pseudoconvexe alors  $\Omega$  est biholomorphiquement équivalent à la boule unité de  $\mathbb{C}^k$ .*

Les techniques de dilatations ont également permis des généralisations de ce résultat au cas faiblement pseudoconvexe. Un théorème analogue a été obtenu par Berteloot [18] lorsque le point d'impact est de type fini dans  $\mathbb{C}^2$  et par Gaussier [46] dans le cas convexe de type fini en toutes dimensions. Bedford-Pinchuk avaient auparavant caractérisé les domaines dont la frontière est globalement de type fini dans  $\mathbb{C}^2$  ou convexe de type fini dans  $\mathbb{C}^k$  et dont le groupe d'automorphisme est non-compact ([6, 5, 7]).

Les techniques de dilatations de coordonnées, combinées aux propriétés de dilatation au bord des familles d'application holomorphes propres (partie 2) fournissent une preuve nettement plus simple du théorème 4, susceptible de s'adapter au cadre faiblement pseudoconvexe de type fini. Ce n'est très probablement pas le cas de l'approche de Chern-Moser.

Le principe de notre démonstration est le suivant. Nous considérons une suite de difféomorphismes CR  $f_n : S \hookrightarrow S'$  où  $S$  et  $S'$  sont des hypersurfaces strictement pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^k$ , qui contracte  $S$  sur un point  $a \in S'$ . Après les avoir prolongées en des applications holomorphes entre des domaines soutenus par  $S$  et  $S'$ , nous renormalisons la suite de ces applications en les composant au but par des remises à l'échelle bien choisies. Le problème est alors de voir que la suite renormalisée converge vers un biholomorphisme entre le domaine source et un ouvert de la boule soutenu par une portion de la sphère. La difficulté principale est de s'assurer de la non-dégénérescence de l'application limite. Ce problème ne se présente pas dans la situation de Wong-Rosay. Nous le surmontons en quantifiant la dilatation des applications CR.



# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>1</b>
Problème de l'injectivité. . . . .	2
Contractibilité des hypersurfaces strictement pseudoconvexes. . . . .	8
<b>Index des notations et conventions.</b>	<b>13</b>
<b>1 Préliminaires.</b>	<b>15</b>
1.1 Domaines hyperconvexes de $\mathbb{C}^k$ . . . . .	15
1.2 Bords des domaines de $\mathbb{C}^k$ . . . . .	18
1.2.1 Stricte pseudoconvexité, forme de Lévi. . . . .	18
1.2.2 Distance CR. . . . .	20
1.3 Structure des applications holomorphes propres. . . . .	24
1.3.1 Structure à l'intérieur. . . . .	24
1.3.2 Structure au bord. . . . .	25
1.4 Dynamique holomorphe dans les domaines : . . . . .	27
1.4.1 Distance de Kobayashi. . . . .	27
1.4.2 Dynamique dans les variétés taut. . . . .	28
1.4.3 Exemples de Lattès. . . . .	31
1.4.4 Exemple de Yoccoz et perturbation, évanescence des variétés stables. . . . .	33
1.5 Entropie topologique . . . . .	35
1.5.1 Définitions. . . . .	35
1.5.2 Support de l'entropie : théorème de Bowen. . . . .	36
1.5.3 Liens entropie-degré. . . . .	38
1.6 Méthodes de changement d'échelle. . . . .	41
1.6.1 Techniques de dilatations de coordonnées. . . . .	41
1.6.2 Propriétés des remises à l'échelle. . . . .	43
1.6.3 Applications. . . . .	44
<b>2 Expansivité au bord des applications holomorphes propres.</b>	<b>47</b>
2.1 Contrôle des dérivées tangentielles complexes par les dérivées normales. . . . .	47
2.2 Dérivées normales. . . . .	48
2.3 Applications CR <i>vs.</i> dilatations CR. . . . .	49

<b>3</b>	<b>Dynamique des applications holomorphes propres de domaines ré-</b>	
	<b>guliers et problème de l'injectivité.</b>	<b>55</b>
3.1	Existence de limites normales de $\rho$ en un point de stricte pseudocon-	
	vexité. . . . .	55
3.1.1	Lemmes préliminaires. . . . .	56
3.1.2	Preuve du lemme 3.1.1. . . . .	58
3.2	Dynamique récurrente et expansivité au bord. . . . .	59
3.2.1	Lemme des matriochkas. . . . .	59
3.2.2	Preuve du théorème 1. . . . .	60
3.2.3	Cas des rétracts de dimension quelconque. . . . .	61
3.3	Dynamique non-récurrente : transmission de la dynamique à $S\mathcal{PC}(b\Omega)$ . . . . .	61
3.4	Auto-applications holomorphes propres des domaines disqués. . . . .	63
3.4.1	Fibration de Hopf. . . . .	63
3.4.2	Deux lemmes. . . . .	64
3.4.3	Démonstration du théorème 3. . . . .	65
<b>4</b>	<b>Contractibilité et sphéricité des hypersurfaces strictement pseudo-</b>	
	<b>convexes</b>	<b>69</b>
4.1	Renormalisation de $f_n$ . . . . .	69
4.2	Réduction du problème. . . . .	71
4.3	Démonstration du théorème 4. . . . .	72
4.3.1	Preuve de " $\mathcal{K} \implies O$ ". . . . .	73
4.3.2	Preuve de $\mathcal{K}(F_n)$ . . . . .	73
4.3.3	Preuve de $\mathcal{K}(G_n)$ . . . . .	74
4.4	Applications. . . . .	75
4.4.1	Préliminaire. . . . .	75
4.4.2	Une version locale du théorème de Wong-Rosay. . . . .	78
4.4.3	Dynamique des applications holomorphes propres. . . . .	78

# Index des notations et conventions.

Les notations sont constantes tout au long de la thèse.

- Pour une hypersurface réelle lisse  $M$  de  $\mathbb{C}^k$ , on note
  - $\mathcal{SPC}(M)$  l'ensemble des points de stricte pseudoconvexité de  $M$ ,
  - $\mathcal{FPC}(M)$  l'ensemble des points de faible pseudoconvexité de  $M$ ,
  - $\mathcal{SPC}(x)$  la composante connexe d'un point  $x \in \mathcal{SPC}(M)$  dans  $\mathcal{SPC}(M)$ ,
  - $\mathcal{FPC}(x)$  la composante connexe d'un point  $x \in \mathcal{FPC}(M)$  dans  $\mathcal{FPC}(M)$ . Il s'agit d'un compact de  $M$ .
- Lorsque  $M$  est une hypersurface réelle lisse strictement convexe de  $\mathbb{C}^k$  ou le bord d'un domaine  $\Omega$ . Pour  $q \in M$ , on note :
  - $\vec{N}(q)$  le vecteur unitaire normal à  $M$  en  $q$  dirigé vers la partie convexe de  $\mathbb{C}^k \setminus M$  (ou vers  $\Omega$ ),
  - $\Lambda_q$  la forme linéaire  $\Lambda_q(\cdot) = \langle \vec{N}(q), \cdot \rangle$ ,
  - $q_\epsilon$  le point  $q + \epsilon \vec{N}(q)$ ,
  - $B_\epsilon(q)$  la boule centrée en  $q_\epsilon$  et de rayon  $\epsilon$  ; cette boule est tangente à  $M$  en  $q$ ,
  - $B_{\epsilon, \alpha}(q) := B_\epsilon(q) \cap \{\Lambda_q \geq \epsilon(1 + \cos \alpha)\}$ .
- $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$ .
- $d_{K_\Omega}$  (ou  $d_K$  en l'absence d'ambiguïté) est la distance de Kobayashi dans  $\Omega$ .

Nous utiliserons également des notations spécifiques pour le chapitre 4 :

- Pour  $z \in \mathbb{C}^k$  ( $k \geq 2$ ), nous noterons  $z = (z_1, z')$ , où  $z_1 \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}^{k-1}$
- Lorsque  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont des domaines de  $\mathbb{C}^k$  et que  $U$  est inclus dans  $b\Omega$ , nous dirons qu'une application  $F$  de  $\Omega$  dans  $\Omega'$  est propre relativement à  $U$  si  $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup U)$  et  $F(U) \subset b\Omega'$  (chapitre 4).
- Enfin, lorsque  $D$  est un domaine de  $\mathbb{C}^k$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous noterons

$$\begin{aligned}
 D_\lambda &:= D \cap \{\operatorname{Re} z_1 < \lambda\} & D_\lambda^+ &:= D \cap \{\operatorname{Re} z_1 \geq \lambda\} \\
 [bD]_\lambda &:= bD \cap \{\operatorname{Re} z_1 < \lambda\} & [bD]_\lambda^+ &:= bD \cap \{\operatorname{Re} z_1 \geq \lambda\}
 \end{aligned}$$



# Chapitre 1

## Préliminaires.

Dans ce chapitre, nous mettons en place le cadre de travail et les principaux outils de ce mémoire. Les cinq premières parties de ce chapitre de préliminaires concernent l'étude du problème de l'injectivité. L'étude du lien entre sphéricité et contractibilité des hypersurfaces strictement pseudoconvexes ne repose que sur les deuxième et sixième parties.

### 1.1 Domaines hyperconvexes de $\mathbb{C}^k$ .

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, les difficultés soulevées par le problème de l'injectivité sont très liées au choix du domaine. Notre approche repose sur la possibilité d'estimer les dérivées des applications holomorphes propres par l'intermédiaire de fonctions *p.s.h* possédant une régularité adaptée. Nous présentons ici les domaines concernés par notre étude. Ils seront toujours pseudoconvexes, bornés et à bords lisses.

**Domaines globalement définis par une fonction p.s.h.** Rappelons qu'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^k$  est dit pseudoconvexe s'il peut être muni d'une fonction *p.s.h*  $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  d'exhaustion c'est-à-dire telle que :

$$\chi^{-1}(\{t \leq c\}) \Subset \Omega \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Certains domaines supportent des fonctions *p.s.h* d'exhaustion bornées, ils sont dits *hyperconvexes*. Les domaines convexes de  $\mathbb{C}^k$  constituent une classe d'exemples de domaines hyperconvexes puisque leur fonction de jauge  $J(x) := \inf\{\frac{1}{\lambda}, \lambda x \in \Omega\}$  est convexe. Un résultat de Diederich-Fornaess affirme que tous les domaines pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses sont hyperconvexes.

**Théorème 1.1.1 (Diederich-Fornaess [34]).** *Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe à bord lisse. Il existe une fonction définissante  $\rho$  de  $\Omega$  telle que la fonction  $-(-\rho)^\eta$  est strictement p.s.h pour  $\eta > 0$  suffisamment petit.*

Nous étudierons les dynamiques récurrentes dans les domaines qui possèdent une fonction *p.s.h* définissante globale. Précisément, nous supposons qu'il existe une

fonction  $\psi \in PSH(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$  telle que :

$$\begin{cases} \psi \leq 0 \text{ sur } \Omega, & \psi = 0 \text{ sur } b\Omega, \\ \vec{\nabla}\psi \neq 0 \text{ sur } b\Omega. \end{cases}$$

Cette version ‘‘lisse’’ de l’hyperconvexit e suppose une rigidité particulière du domaine. Alors que les domaines pseudoconvexes à bords lisses sont hyperconvexes, tous ne possèdent pas de fonction *p.s.h* définissante globale. Un contre-exemple est fourni par le ‘‘worm domain’’ de Diederich-Fornaess [33].

**Domaines LB-réguliers.** La *B*-régularité a été introduite par Sibony dans [69] et concerne une grande variété de domaines pseudoconvexes.

**Définition 1.1.2.** *Un domaine pseudoconvexe born e  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse est *B*-régulier si pour tout  $p \in b\Omega$ , il existe une fonction  $\psi_p \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  vérifiant  $\psi_p(p) = 1$  et  $\psi_p(z) < 1$  pour  $z \neq p$ ,  $z \in \overline{\Omega}$ .*

**Remarque 1.1.3.** *Le bord d’un domaine LB-régulier ne contient pas de disque analytique.*

Sibony a prouv e dans [69] qu’il existe des fonctions *p.s.h* de trace au bord prescrite sur tout domaine *B*-régulier.

**Proposition 1.1.4.** *Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe born e et *B*-régulier de  $\mathbb{C}^k$ . Toute fonction  $u \in C^0(b\Omega, \mathbb{R})$  se prolonge en une fonction  $\tilde{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  avec  $\tilde{u}|_{b\Omega} = u$ .*

Preuve : On adapte la méthode de Perron-Bremmerman. A cet effet, définissons

$$\mathcal{F} := \{v \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \mid v(z) \leq u(z) \quad \forall z \in b\Omega\} \quad \text{et} \quad \tilde{u} := \sup_{\mathcal{F}} v.$$

Nous allons voir que  $\tilde{u} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  et  $\tilde{u}|_{b\Omega} = u$ . Commençons par prouver que  $\tilde{u} \in C^0(b\Omega)$  et  $\tilde{u}|_{b\Omega} = u$ , c’est-à-dire :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \tilde{u}(z) = u(z_0) \quad \forall z_0 \in b\Omega. \quad (1.1)$$

Modifions pour cela  $u$  en  $u_\epsilon \in C^0(b\Omega, \mathbb{R})$  de sorte que  $u_\epsilon \leq u$  et  $u_\epsilon = u(z_0) - \epsilon$  sur un petit voisinage de  $z_0$  dans  $b\Omega$ . Considérons une fonction pic  $\psi_{z_0}$  en  $z_0$  et posons :

$$v_{t,z_0}(z) := u_\epsilon(z_0) + t(\psi_{z_0}(z) - 1), \quad t > 0.$$

La fonction  $v_{t,z_0}$  est *p.s.h*, continue sur  $\overline{\Omega}$  et vérifie  $v_{t,z_0} \leq u_\epsilon \leq u$  sur  $b\Omega$  pour  $t$  suffisamment grand. Il s’agit d’un élément de  $\mathcal{F}$  donc  $\tilde{u} \geq v_{t,z_0}$ . On en déduit que  $\tilde{u} \geq u(z_0) - 2\epsilon$  sur un petit voisinage de  $z_0$ . Pour obtenir la majoration de  $\tilde{u}$ , introduisons

$$\overline{\mathcal{F}} := \{w \in P\overline{S}H(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \mid w(z) \geq u(z) \quad \forall z \in b\Omega\} \quad \text{et} \quad \bar{u} := \inf_{\overline{\mathcal{F}}} w,$$

où  $P\overline{S}H(\Omega)$  est l’ensemble des fonctions pluri-superharmoniques de  $\Omega$ . Pour  $v \in \mathcal{F}$  et  $w \in \overline{\mathcal{F}}$ , la fonction  $v - w$  est une fonction *p.s.h* négative sur  $b\Omega$  donc négative

sur  $\Omega$ . On en déduit que  $\tilde{u} = \sup_{\mathcal{F}} v \leq \inf_{\mathcal{F}} w = \bar{u}$  sur  $\Omega$ . De plus, le raisonnement précédent montre que  $-\bar{u}(z) = (-u)(z) \geq -u(z_0) - 2\epsilon$  sur un voisinage de  $z_0$ , donc  $\tilde{u}(z) \leq \bar{u}(z) \leq u(z_0) + 2\epsilon$  sur ce voisinage. Ceci conclut la preuve de (1.1).

Prouvons à présent que  $\tilde{u} \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ . Comme borne supérieure de fonctions continues,  $\tilde{u}$  est *s.c.i* sur  $\bar{\Omega}$ . De plus, sa régularisée *s.c.s*  $\tilde{u}^*$  est *p.s.h*. Il suffit donc de montrer que  $\tilde{u} = \tilde{u}^*$  pour obtenir le résultat souhaité. Lorsque  $\tilde{u}^*$  est continue, l'argument est direct : la fonction  $\tilde{u}^*$  est dans  $\mathcal{F}$  car elle est *p.s.h* continue sur  $\bar{\Omega}$  et elle coïncide avec  $u$  sur  $b\Omega$  en raison de (1.1). On a donc  $\tilde{u} \geq \tilde{u}^*$ . Lorsque ce n'est pas le cas, observons que  $\tilde{u}^* - \tilde{u}$  est *s.c.s* donc admet un maximum  $\alpha > 0$  sur  $\bar{\Omega}$ . L'ensemble  $E := \{x \in \bar{\Omega} \mid \tilde{u}^* - \tilde{u}(x) = \alpha\}$  est relativement compact dans  $\Omega$  en raison de (1.1). On vérifie alors que l'on peut trouver un recouvrement de  $b\Omega$  par des boules de  $\mathbb{C}^k$  centrées en des points  $z_i \in b\Omega$  de rayon  $r_i$ , et une fonction  $v \in \mathcal{F}$  tels que :

$$\begin{cases} \tilde{u}^*(z) \leq u(z_i) + \epsilon \text{ pour } z \in B(z_i, r_i), \\ v(z) \geq u(z_i) - \epsilon \text{ pour } z \in B(z_i, r_i), \\ \Omega_\epsilon := \Omega \setminus \bigcup B(z_i, r_i) \supset E \end{cases}$$

(la fonction  $v$  est obtenue comme un maximum de fonctions du type  $v_{\epsilon, z_i}$ ). On peut aussi trouver une suite de fonctions *p.s.h* continues  $\varphi_k$ , définies sur  $\Omega_\epsilon$  et qui décroissent vers  $\tilde{u}^*$ . Lorsque  $k$  est suffisamment grand (et  $\epsilon$  suffisamment petit), les fonctions

$$u_k := \begin{cases} \max\{\varphi_k - \alpha/2, v\} \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ v \text{ sur } \bar{\Omega} \setminus \Omega_\epsilon \end{cases}$$

sont des fonctions dans  $\mathcal{F}$  donc  $\tilde{u} \geq u_k$ . On a donc  $\tilde{u} \geq \tilde{u}^* - \alpha/2$  sur  $\Omega_\epsilon \supset E$ , ce qui est absurde.  $\square$

Les fonctions construites par ce procédé ne sont exploitables dans notre cadre de travail que lorsqu'elles sont lipschitziennes, ce dont on peut s'assurer en se restreignant à la classe de domaines suivante :

**Définition 1.1.5.** *Un domaine pseudoconvexe borné  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^k$  est dit *LB-régulier* si  $\Omega$  est *B-régulier* et si pour tout compact  $K$  de  $b\Omega$ , il existe une fonction localement bornée  $C_K \geq 0$  et, pour tout  $p \in b\Omega \setminus K$ , une fonction  $\psi_p$  telle que :*

- $\psi_p \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  et  $\psi_p < 1$  sur  $\bar{\Omega} \setminus \{p\}$ ,
- $\psi_p(p) = 1$  et  $\psi_p \leq 0$  sur  $K$ ,
- $\psi_p$  est  $C_K(p)$ -lipschitzienne en  $p$ .

Cette hypothèse est une restriction sur les domaines considérés. Rentrent cependant dans ce cadre les exemples suivants.

**Exemples :**

- Les domaines strictement géométriquement convexes sont *LB-réguliers*.
- Les domaines pseudoconvexes de type fini de  $\mathbb{C}^2$  sont *LB-réguliers* ([43]).

Il existe sur ces domaines des fonctions *p.s.h* pics particulières que nous utiliserons dans l'étude des dynamiques non-récurrentes.

**Proposition 1.1.6.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  un domaine *LB-régulier*. Pour des ouverts  $U$  et  $V$  de  $b\Omega$  tels que  $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ , il existe une constante  $C = C(U, V)$  et une fonction  $\chi_{U, V} \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  telle que :*

- i)  $\chi_{U,V} = -1$  sur  $U$
- ii)  $\chi_{U,V} = 0$  sur  $V$
- iii)  $\chi_{U,V} \leq 0$  sur  $\Omega$
- iv)  $\chi_{U,V}$  est  $C$ -lipschitzienne sur  $V$ .

Preuve : Soient  $U_1$  tel que  $U \Subset U_1 \Subset b\Omega \setminus V$  et  $C := \sup\{C_{\overline{U_1}}(p), p \in V\}$  où  $C_{\overline{U_1}}$  est la fonction donnée par la définition 1.1.5. Soit  $u \in C^0(b\Omega)$  telle que  $-1 \leq u \leq 0$ ,  $u = 0$  sur  $b\Omega \setminus U_1$ ,  $u = -1$  sur  $U$ . Un domaine  $LB$ -régulier étant en particulier  $B$ -régulier, la fonction

$$\chi := \sup\{v \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), v|_{b\Omega} \leq u\}$$

est une fonction *p.s.h* sur  $\Omega$  continue sur  $\overline{\Omega}$  qui vérifie évidemment i), ii) et iii) car elle coïncide avec  $u$  au bord. Montrons que  $\chi$  vérifie iv). Soit  $p \in V$  et  $\psi_p$  une fonction *p.s.h*  $C$ -Lipschitzienne associée à  $(p, \overline{U_1})$  par la définition 1.1.5. Par construction,  $u \geq (\psi_p - 1)|_{b\Omega}$ , donc  $0 \geq \chi \geq \psi_p - 1$ . Pour  $z \in \Omega$ ,

$$|\chi(z) - \chi(p)| = |\chi(z)| \leq |\psi_p(z) - 1| = |\psi_p(z) - \psi_p(p)| \leq C\|z - p\|$$

et  $\chi$  est bien  $C$ -lipschitzienne en  $p$ . □

## 1.2 Bords des domaines de $\mathbb{C}^k$ .

Lorsqu'il est lisse, le bord d'un domaine de  $\mathbb{C}^k$  est une sous-variété CR de dimension CR  $k - 1$ . Le prolongement des applications holomorphes propres préserve cette structure CR, et ceci a des conséquences métriques importantes dans notre étude. Cette partie est consacrée à la structure CR du bord des domaines.

### 1.2.1 Stricte pseudoconvexité, forme de Lévi.

La forme de Lévi d'une hypersurface réelle de  $\mathbb{C}^k$  est une forme hermitienne sur le plan tangent complexe qui quantifie sa pseudoconvexité et mesure le défaut d'intégrabilité de la distribution complexe. L'article de Chirka [29] consitue une excellente référence sur ce sujet.

A un point  $x$  du bord d'un domaine lisse  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^k$ , on associe le vecteur unitaire  $\vec{N}(x)$  normal à  $b\Omega$  en  $x$  et pointant vers l'intérieur de  $\Omega$ . Le plan tangent à  $b\Omega$  en  $x$  se décompose orthogonalement en  $T_x b\Omega = T_x^{\mathbb{C}} b\Omega \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(i\vec{N}(x))$ . Les plans  $T_x^{\mathbb{C}} b\Omega$  sont appelés les plans tangents complexes de  $b\Omega$ , et leur distribution fournit la structure CR de  $b\Omega$ . Nous définissons la forme de Lévi en  $x \in b\Omega$  d'une fonction définissante  $r$  de  $b\Omega$  comme la forme hermitienne sur  $T_x^{\mathbb{C}} b\Omega$  :

$$\mathcal{L}(r, x, u) := i\partial\bar{\partial}r(u, iu) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x) u_i \bar{u}_j, \quad \forall u \in T_x^{\mathbb{C}} b\Omega.$$

**Proposition-Définition 1.2.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse. Il existe des formes hermitiennes  $\mathcal{L}(x, \cdot)$  sur  $T_x^{\mathbb{C}}b\Omega$  en tout point  $x \in b\Omega$  telles que :*

$$\mathcal{L}(r, x, u) = \|\vec{\nabla}r(x)\| \mathcal{L}(x, u) \quad \forall x \in b\Omega, \forall u \in T_x^{\mathbb{C}}b\Omega$$

pour toute fonction définissante  $r$  au voisinage de  $x$ . Les fonctions  $\mathcal{L}(x, \cdot)$  sont appelées formes de Lévi de  $b\Omega$  en  $x$ .

Preuve : On vérifie aisément que si  $r$  et  $r'$  sont deux fonctions définissantes de  $b\Omega$  alors  $r' = \alpha r$  où  $\alpha$  est une fonction lisse et strictement positive sur  $\bar{\Omega}$ . On a :

$$\mathcal{L}(r', x, u) = \frac{\alpha(x)}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x) u_i \bar{u}_j + \frac{r(x)}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x) u_i \bar{u}_j + \operatorname{Re} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i} u_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}_i} \bar{u}_i \right).$$

Comme  $r(x) = 0$  et  $\sum_{i=1}^n \partial r / \partial z_i u_i = 0$  pour  $u \in T_x^{\mathbb{C}}b\Omega$ ,  $\mathcal{L}(r', x, u) = \alpha(x) \mathcal{L}(r, x, u)$ . De plus,  $\vec{\nabla} \alpha r(x) = \alpha(x) \vec{\nabla} r(x)$  donc

$$\mathcal{L}(r', x, u) = \frac{\|\vec{\nabla}r'(x)\|}{\|\vec{\nabla}r(x)\|} \mathcal{L}(r, x, u).$$

On définit alors  $\mathcal{L}(x, \cdot)$  comme la forme de Lévi en  $x$  d'une fonction définissante de  $b\Omega$  de gradient normé en  $x$ .  $\square$

Les formes de Lévi des fonctions définissantes de  $b\Omega$  ont donc toutes même signature en un point  $x \in b\Omega$ . La pseudoconvexité d'un domaine à bord lisse est en fait équivalente à la positivité de la forme de Lévi de son bord.

**Proposition 1.2.2.** *Un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  à bord lisse est pseudoconvexe si et seulement si sa forme de Lévi est positive (en tant que forme hermitienne) en tout point du bord.*

On définit respectivement les ensembles de stricte et de faible pseudoconvexité,  $S\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$  et  $\mathcal{F}\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$ , comme les ensembles des points en lesquels la forme de Lévi est définie positive (resp. positive non-définie). Les points de stricte pseudoconvexité sont stables : toute perturbation d'un domaine pseudoconvexe au voisinage d'un tel point, suffisamment petite en norme  $\mathcal{C}^2$ , reste pseudoconvexe. De plus, un calcul facile montre qu'il existe des coordonnées holomorphes locales attachées à ces points dans lesquelles le domaine est strictement *convexe*. La situation est différente pour les points de faible pseudoconvexité (exemple de Kohn-Nirenberg [56]). Ce "mauvais" ensemble est néanmoins petit dans une majorité de cas. Le théorème suivant, qui explique cette assertion, est dû à Michael Freeman dans le cas général des variétés CR [45].

**Théorème 1.2.3.** *Soit  $\Omega$  un domaine à bord lisse de  $\mathbb{C}^k$ . Si l'ensemble  $\mathcal{F}\mathcal{P}\mathcal{C}(b\Omega)$  contient un ouvert de  $b\Omega$ , alors celui-ci est feuilleté par des variétés holomorphes.*

Soulignons que le feuilletage peut présenter des singularités, qui proviennent de sauts de la dimension de  $\ker \mathcal{L}(x, \cdot)$  (voir [45, 70]). Avant de prouver ce théorème, introduisons une définition équivalente plus géométrique de la forme de Lévi.

**Lemme 1.2.4.** Soit  $\Omega$  un domaine à bord lisse dans  $\mathbb{C}^k$  et  $r$  une fonction définissante de  $b\Omega$  de gradient normé en  $x \in b\Omega$ . Pour  $u, v \in T_x^{\mathbb{C}}b\Omega$  et  $\tilde{u}, \tilde{v}$  des champs de vecteurs de  $T^{\mathbb{C}}b\Omega$  qui prolongent  $u, v$ , on a :

$$i\partial\bar{\partial}r(u, iv) = \langle [\tilde{u}, i\tilde{v}](x), i\vec{N}(x) \rangle.$$

En particulier la forme de Lévi de  $b\Omega$  en  $x$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(x, u) = \langle [\tilde{u}, i\tilde{u}](x), i\vec{N}(x) \rangle.$$

Preuve : Il s'agit d'une manipulation classique sur les formes différentielles :

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}r(u, iv) &= \langle i\bar{\partial}r, [\tilde{u}, i\tilde{v}] \rangle - \tilde{u} \cdot \langle i\bar{\partial}r, i\tilde{v} \rangle - i\tilde{v} \cdot \langle i\bar{\partial}r, \tilde{u} \rangle \\ &= \langle i\bar{\partial}r, [\tilde{u}, i\tilde{v}](x) \rangle = \langle i\vec{N}(x), [\tilde{u}, i\tilde{v}](x) \rangle. \end{aligned}$$

car  $\bar{\partial}r(x) = \vec{\nabla}r(x) = \vec{N}(x)$ . □

Ce lemme assure en particulier que  $\langle [\tilde{u}, i\tilde{v}](x), i\vec{N}(x) \rangle$  ne dépend que de  $\tilde{u}(x)$  et  $\tilde{v}(x)$ . Nous écrivons donc abusivement  $\mathcal{L}(x, u) = \langle [u, iu], i\vec{N}(x) \rangle$ .

Preuve du théorème 1.2.3 : Soit  $U$  un ouvert de  $b\Omega$  sur lequel la forme de Lévi est positive non-définie et  $\dim \ker \mathcal{L}(x, \cdot)$  est constante. Montrons que la distribution  $\mathcal{N}$  des espaces complexes  $N_x := \ker \mathcal{L}(x, \cdot)$ ,  $x \in U$  est intégrable. D'après le lemme précédent,  $u \in N_x$  si et seulement si

$$\langle [u, v], i\vec{N}(x) \rangle = 0 \quad \forall v \in T_x^{\mathbb{C}}b\Omega.$$

Si  $u_1, u_2$  sont deux champs de vecteurs de  $\mathcal{N}$ , on a d'après l'égalité de Jacobi :

$$\langle [[u_1, u_2], v], i\vec{N} \rangle = -\langle [[u_2, v], u_1] + [[v, u_1], u_2], i\vec{N} \rangle, \quad \forall v \in T^{\mathbb{C}}b\Omega.$$

Par définition de  $\mathcal{N}$ , les vecteurs  $[u_1, v]$  et  $[u_2, v]$  sont dans  $T^{\mathbb{C}}b\Omega$  et le membre de droite est nul pour tout  $v \in T^{\mathbb{C}}b\Omega$ . Ceci signifie que  $[u_1, u_2] \in \mathcal{N}$  donc que  $\mathcal{N}$  est intégrable. Il existe donc un feuilletage de  $U$  par des variétés dont les plans tangents sont des espaces complexes de  $\mathbb{C}^k$ . Ces variétés sont holomorphes d'après un théorème classique de Lévi-Civita (voir par exemple [27], partie II.6). □

## 1.2.2 Distance CR.

Nous introduisons à présent une distance sur le bord des domaines qui présente l'avantage d'être plus adaptée à la géométrie des applications CR tout en y définissant la même topologie que la distance euclidienne. Cette distance a été introduite par Nagel, Stein et Wainger [60].

Soit  $X$  une sous-variété lisse de  $\mathbb{C}^k$ ,  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ . On appelle chemin complexe entre  $x$  et  $y$  tout chemin  $\gamma : [0, l] \rightarrow X$  joignant  $x$  à  $y$ ,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, et tel que  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}}S$  là où cela fait sens. On note  $\ell(\gamma)$  la longueur euclidienne d'un tel chemin. Il est facile de prouver que deux points quelconques d'une hypersurface minimale (*i.e.* ne contenant pas de bout d'hypersurface holomorphe) sont reliés par un chemin complexe, voir la proposition 1.2.6. Notons que les hypersurfaces strictement pseudoconvexes (éventuellement à bord) sont minimales car elles possèdent des fonctions pics *p.s.h* en tout point.

Pour  $x, y \in X$ , on définit la distance CR entre  $x$  et  $y$  par :

$$d_X^{\text{CR}}(x, y) := \inf\{\ell(\gamma), \gamma \text{ chemin complexe entre } x \text{ et } y\}.$$

La boule correspondante de centre  $x$  et de rayon  $\delta$  est notée  $B_X^{\text{CR}}(x, \delta)$ . En l'absence d'ambiguïté, on ne précisera pas la dépendance en  $X$  de  $d^{\text{CR}}$ .

**Lemme d'intégration.** L'intérêt principal de cette distance est d'être dilatée par toute application CR dont l'application tangente est dilatante sur  $T^{\mathbb{C}}S$ . Précisément,

**Proposition 1.2.5.** *Soient  $S_1, S_2$  deux hypersurfaces lisses de  $\mathbb{C}^k$ . Soit  $F : S_1 \rightarrow S_2$  une application CR qui est un difféomorphisme local en tout point de  $S_1$ . Alors, pour toute boule  $B^{\text{CR}}(x, r)$  relativement compacte dans  $S_1$ , on a :*

$$(\|F'(q)u\| \geq C\|u\|, \forall q \in B^{\text{CR}}(x, r), \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}S_1) \implies F(B^{\text{CR}}(x, r)) \supset B^{\text{CR}}(F(x), Cr).$$

Preuve : Si  $F(B^{\text{CR}}(x, r)) = S_2$  la proposition est vraie, on peut donc supposer que  $F(B^{\text{CR}}(x, r)) \neq S_2$ . Comme  $F$  est un difféomorphisme local,  $F$  est ouverte et il suffit de voir :

$$d^{\text{CR}}(F(x), bF(B^{\text{CR}}(x, r))) \geq Cr.$$

Soit donc  $z \in bF(B^{\text{CR}}(x, r))$  un point à distance CR finie de  $F(x)$ . Soit  $\gamma$  un chemin complexe entre  $F(x)$  et  $z$  paramétré par la longueur d'arc, de longueur  $\ell(\gamma)$  inférieure à  $d^{\text{CR}}(F(x), z) + \epsilon$ . Comme  $F$  est un difféomorphisme CR local en tout point de  $S_1$ , on peut relèver  $\gamma$  en un chemin complexe  $\tilde{\gamma}$  tant que  $\tilde{\gamma}$  ne sort pas de  $B^{\text{CR}}(x, r)$ . Autrement dit, il existe  $\tilde{l} \leq \ell(\gamma)$  et  $\tilde{\gamma} : [0, \tilde{l}] \rightarrow \overline{B^{\text{CR}}(x, r)}$  joignant  $x$  à  $bB^{\text{CR}}(x, r)$  tels que  $F \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  pour tout  $t \in [0, \tilde{l}]$ . Alors

$$\begin{aligned} d^{\text{CR}}(F(x), z) + \epsilon &\geq \ell(\gamma) \geq \tilde{l} = \int_0^{\tilde{l}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{\tilde{l}} \|F'(\tilde{\gamma}(t))\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \\ &\geq C \int_0^{\tilde{l}} \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \geq C\ell(\tilde{\gamma}) \geq Cr \text{ puisque } \tilde{\gamma}(\tilde{l}) \in bB^{\text{CR}}(x, r). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient bien  $d^{\text{CR}}(F(x), z) \geq Cr$ .  $\square$

**Allure des grandes boules CR.** Bien que trivialement non-équivalentes, les distances euclidienne et CR sont fortement reliées dans les hypersurfaces minimales. En particulier, les grandes boules CR contiennent de grandes boules euclidiennes.

**Proposition 1.2.6.** *La topologie associée à la distance CR coïncide avec la topologie usuelle sur les hypersurfaces lisses minimales de  $\mathbb{C}^k$ . En particulier, tout ouvert borné d'une telle hypersurface est  $d^{\text{CR}}$ -borné.*

Preuve : Il est clair que la distance CR est supérieure à la distance euclidienne, ou encore que  $B^{\text{CR}}(x, \delta) \subset B(x, \delta)$ . Il suffit donc de trouver un réel  $\delta' > 0$  tel que  $B^{\text{CR}}(x, \delta) \supset B(x, \delta')$ . Si  $S$  est une hypersurface minimale de  $\mathbb{C}^k$ , la distribution d'hyperplans  $T^{\mathbb{C}}S$  dans  $TS$  n'est intégrable en aucun point. En effet, une hypersurface intégrale de cette distribution de plans serait une variété de  $\mathbb{C}^k$  dont les plans tangents sont complexes et serait holomorphe d'après le théorème de Levi-Civita déjà cité. La boule  $B^{\text{CR}}(x, \delta)$  est alors ouverte pour la topologie usuelle sur  $S$  et contient une boule  $B(x, \delta')$  si  $\delta'$  est suffisamment petit.

Pour comprendre cette dernière assertion, considérons  $2k - 2$  champs de vecteurs unitaires lisses de  $T^{\mathbb{C}}S$   $u_1, \dots, u_{2k-2}$  indépendants sur un voisinage d'un point  $x \in S$ . Les vecteurs  $u_1(p), \dots, u_{2k-2}(p), i\vec{N}(p)$  forment alors une base de  $T_pS$ . Soit  $\Phi_{u_i}^t$  le flot au temps  $t$  du champ de vecteur  $u_i$  et  $\Psi$  l'application définie par :

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{R}^{2n-1} &\longrightarrow S \\ (t, t_1, \dots, t_{2n-2}) &\longmapsto \Phi_{u_{2n-2}}^{t_{2n-2}} \circ \dots \circ \Phi_{u_1}^{t_1} \circ \Phi_{i\vec{N}}^t(x). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une application lisse dont la jacobienne est inversible en  $O$ . D'après le théorème d'inversion locale,  $\Psi$  est un difféomorphisme entre un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{2n-1}$  et un voisinage  $V$  de  $x$  dans  $S$ . Les hypersurfaces  $\mathcal{F}_c := \Psi(\{t = c\})$  définissent donc un feuilletage de  $S$  sur  $V$  avec  $x^c := \Psi(c, 0, \dots, 0) \in \mathcal{F}_c$ . Par définition de la distance CR,  $\mathcal{F}_{c,\delta} := \Psi(\{t = c\} \cap B(0, \delta)) \subset B^{\text{CR}}(x^c, \delta)$  donc  $V_{\delta,\epsilon} := \bigcup_{|c| < \epsilon} \mathcal{F}_{c,\delta}$  est un voisinage de  $x$  dans  $S$  pour  $\epsilon > 0$ . La non-intégrabilité de  $T^{\mathbb{C}}S$  implique l'existence d'un point  $y \in \mathcal{F}_{0,\delta}$  et d'un vecteur  $u_i(y)$  transverse à  $T_y\mathcal{F}_0$ . On a alors  $\Phi_{u_i}^s(y) \in \mathcal{F}_{h(s)}$  avec  $h'(0) \neq 0$  et  $\Phi_{u_i}^s(y) \in B^{\text{CR}}(x, 2\delta) \cap B^{\text{CR}}(x^{h(s)}, 2\delta)$  pour  $s < s_0$  suffisamment petit. Ceci prouve que  $x^{h(s)} \in B^{\text{CR}}(x, 4\delta)$  donc  $V_{\delta,h(s)} \subset B^{\text{CR}}(x, 5\delta)$  pour  $s \leq s_0$  et conclut la preuve de cette proposition.  $\square$

Nous utiliserons aussi une version plus sophistiquée de cette proposition<sup>1</sup> (voir [15]) :

**Proposition 1.2.7.** *Toute hypersurface  $S$  de  $\mathbb{C}^k$  compacte connexe sans bord est  $d^{\text{CR}}$ -bornée.*

Idée de preuve : Nous appelons orbite CR d'un point  $y \in S$  la classe d'équivalence de  $z$  sous la relation  $z \sim z'$  si  $d^{\text{CR}}(z, z')$  est finie :

$$O_{\text{CR}}(y) := \bigcup_{t>0} B^{\text{CR}}(y, t).$$

L'hypersurface  $S$  étant compacte sans bord, il existe un point  $p \in \mathcal{SPC}(S)$ . La proposition précédente assure que l'orbite CR de  $p$  contient un ouvert, et que  $d^{\text{CR}}(p, \cdot)$  est bornée sur un voisinage de  $p$ . Cela permet de voir, en utilisant la continuité de la distribution  $T^{\mathbb{C}}S$ , que la fonction  $d^{\text{CR}}(p, \cdot)$  est *s.c.s*. Il suffit donc d'établir que  $O_{\text{CR}}(p) = S$ . Supposons que  $O_{\text{CR}}(p) \neq S$ , alors le bord de  $O_{\text{CR}}(p)$  est non vide. Par continuité de  $T^{\mathbb{C}}S$ , si  $y_0 \in bO_{\text{CR}}(p)$  alors  $O_{\text{CR}}(y_0) \subset bO_{\text{CR}}(p)$ . L'orbite CR de  $y_0$  est donc en particulier d'intérieur vide. Nous allons voir que ceci est impossible.

Définissons l'ensemble  $X := \overline{O_{\text{CR}}(y_0)}$ . Prouvons dans un premier temps :

par tout point  $y \in X$  passe une hypersurface holomorphe incluse dans  $X$ . (\*)

Considérons pour cela l'application  $\Psi$  de la preuve précédente définie sur  $[-\epsilon, \epsilon]^{2k-1}$  et d'image centrée en  $y$

$$\begin{aligned} \Psi : \quad [-\epsilon, \epsilon]^{2k-1} &\longrightarrow V \subset S \\ (t, t_1, \dots, t_{2n-2}) &\longmapsto \Phi_{u_{2n-2}}^{t_{2n-2}} \circ \dots \circ \Phi_{u_1}^{t_1} \circ \Phi_{i\vec{N}}^t(y), \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Joël Merker m'a informé de ce résultat et me l'a expliqué. Je l'en remercie.

ainsi que le feuilletage  $\mathcal{F}$  associé ( $\mathcal{F}_c := \Psi(\{t = c\})$ ). Il est clair d'après la preuve de la proposition précédente qu'il existe un ensemble  $T \subset \mathbb{R}$  tel que

$$O_{\text{CR}}(y_0) \cap V = \bigcup_{c \in T} \mathcal{F}_c$$

et les feuilles  $\mathcal{F}_c$  sont des variétés holomorphes pour  $c \in T$ . Comme  $y \in \overline{O_{\text{CR}}(y_0)}$ , il s'ensuit que  $\mathcal{F}_0$  est accumulée par des variétés holomorphes. Ses plans tangents coïncident donc avec  $T^{\mathbb{C}}S$  et  $\mathcal{F}_0$  est une variété holomorphe. Ceci conclut la preuve de (\*) (voir figure 1.1).

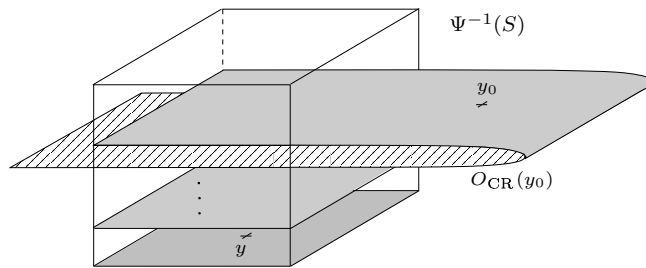


FIG. 1.1 – Orbite CR dans la carte  $\Psi$ .

L'ensemble  $X$  étant compact, la fonction  $|z_1|$  atteint son maximum en un point  $y \in X$ . Ce point est alors inclus dans une hypersurface holomorphe sur laquelle  $z_1$  est une fonction constante  $c$ . L'ensemble  $S \cap \{z_1 = c\}$  est fermé dans  $\{z_1 = c\}$  par compacité de  $S$  et ouvert d'après (\*). Donc  $S \supset \{z_1 = c\}$ , c'est absurde.  $\square$

**Allure des petites boules CR.** Concluons cette partie en précisant l'allure des petites boules CR d'une hypersurface strictement pseudoconvexe. La proposition suivante est un cas particulier très simple du théorème 4 de [60]. Nous en donnerons une démonstration par dilatations de coordonnées dans la partie 1.6.

**Proposition 1.2.8.** *Soit  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Il existe deux fonctions positives  $\tau_1, \tau_2$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et deux constantes  $\tau_0, \epsilon_0 > 0$  telles que*

$$\forall \tau < \tau_0, \forall \epsilon \leq \epsilon_0, U_{\epsilon, \tau_1(\tau)} \subset B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \subset U_{\epsilon, \tau_2(\tau)}.$$

De plus, on peut prendre  $\tau_2$  tendant vers 0 avec  $\tau$ .

Cet énoncé permet de substituer aux boules CR des objets plus maniables que nous allons décrire précisément.

Rappelons que pour  $p \in b\Omega$ ,  $\vec{N}(p)$  désigne la normale rentrante à  $b\Omega$  en  $p$ . Quitte à changer de coordonnées, le domaine  $\Omega$  est strictement convexe sur un voisinage  $O$  de  $p$ . On peut alors définir une projection "orthogonale" sur  $b\Omega$  dans  $O$  :

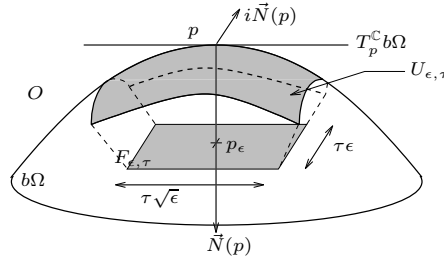
$$\begin{aligned} \pi : O \cap \Omega &\longrightarrow O \cap b\Omega \\ z &\longmapsto \pi(z) \text{ t.q. } d(z, \pi(z)) = \min\{d(z, q), q \in O \cap b\Omega\}. \end{aligned}$$

Rappelons que  $T_p b\Omega = T_p^{\mathbb{C}} b\Omega \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(i\vec{N}(p))$ . Nous notons  $B^{t, \mathbb{C}}(p, r)$  la boule de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $T_p^{\mathbb{C}} b\Omega$  et  $B^{t, \mathbb{R}}(p, r)$  le segment de centre 0 et de rayon  $r$  dans  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(i\vec{N}(p))$ . Ceci étant posé nous sommes en mesure de formuler la

**Définition 1.2.9.**

$$\begin{aligned}
p_\epsilon &:= p + \epsilon \vec{N}(p) \\
F_{\epsilon,\tau} &:= p_\epsilon + B^{t,\mathbb{C}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \times B^{t,\mathbb{R}}(p, \tau\epsilon) \\
U_{\epsilon,\tau} &:= \pi(F_{\epsilon,\tau}).
\end{aligned}$$

Signalons dès à présent que  $\epsilon$  est destiné à tendre vers 0 alors que  $\tau$  est un paramètre de contrôle qui sera fixé. Ces ensembles sont définis dès que  $\epsilon$  est suffisamment petit et  $\tau$  plus petit que 1.

**1.3 Structure des applications holomorphes propres.**

Dans cette partie, nous présentons quelques propriétés fondamentales des applications holomorphes propres entre domaines de  $\mathbb{C}^k$  ainsi que quelques propriétés de leurs prolongements au bord.

**1.3.1 Structure à l'intérieur.**

De manière très générale, *i.e.* sans hypothèse sur les domaines, une application holomorphe propre entre domaines de  $\mathbb{C}^k$  est toujours un revêtement analytique. Précisément :

**Théorème 1.3.1.** *Soient  $\Omega, \Omega'$  des domaines de  $\mathbb{C}^k$  et  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  une application holomorphe propre. Soit  $\text{Crit } F := \{ \text{Jac } F = 0 \}$  le lieu critique de  $F$ . Alors*

- i)**  *$\text{Crit } F$  et  $F(\text{Crit } F)$  sont des ensembles analytiques. Plus généralement, l'image directe par  $F$  d'un ensemble analytique est un ensemble analytique.*
- ii)**  *$F : \Omega \setminus F^{-1}(F(\text{Crit } F)) \rightarrow \Omega' \setminus F(\text{Crit } F)$  est un revêtement fini. On notera  $d$  son degré.*
- iii)**  *$\#F^{-1}(x) < d$  pour tout  $x \in F(\text{Crit } F)$ .*

La partie topologique de ce théorème (points ii et iii) assure que  $F$  est un revêtement ramifié fini. résulte du fait que le lieu critique d'une application holomorphe est petit, c'est-à-dire de codimension réelle égale à 2. Nous renvoyons au livre de Rudin [67] chap.15 pour une preuve de ce théorème.

Une application holomorphe propre qui est un difféomorphisme local est un revêtement. Lorsque l'espace d'arrivée est simplement connexe, une telle application est donc un biholomorphisme. Pour les auto-applications, la simple connexité peut être remplacée par une hypothèse de régularité du bord. C'est une remarque due à Pinchuk [63] :

**Lemme 1.3.2.** *Si  $F : \Omega \longrightarrow \Omega$  est une auto-application holomorphe propre d'un domaine borné à bord lisse alors  $F$  est un automorphisme de  $\Omega$  si et seulement si  $\text{Crit } F = \emptyset$ .*

Preuve : Si  $\text{Crit } F = \emptyset$ , le théorème 1.3.1 implique que  $F$  est un revêtement. Alors l'action de  $F$  sur le groupe fondamental de  $\Omega$  est injective et  $F$  est un automorphisme si et seulement si  $F_* : \pi_1(\Omega) \longrightarrow \pi_1(\Omega)$  est surjective. Comme  $\Omega$  est borné, la suite  $F_n$  est normale et on peut en extraire une sous-suite  $F^{n_k}$  qui converge vers une application holomorphe  $g : \Omega \longrightarrow \overline{\Omega}$ . De plus, le bord de  $\Omega$  étant lisse,  $\pi_1(\Omega)$  est engendré par un nombre fini de générateurs, et la suite  $F_*^{n_k}$  est stationnaire (elle vaut  $g_*$  pour  $k$  assez grand). On a donc :

$$g_* = F_*^{n_{k+1}} = F_*^{n_k} \circ F_*^{n_{k+1}-n_k} = g_* \circ F_*^{n_{k+1}-n_k} \quad \text{pour } k \geq k_0.$$

Comme  $F_*^{n_k}$  est injective,  $g_*$  l'est aussi. Il vient alors  $F_*^{n_{k+1}-n_k} = \text{Id}_{\pi_1(\Omega)}$  et  $F_*$  est surjective.  $\square$

### 1.3.2 Structure au bord.

Dans la continuité du fameux théorème de Fefferman [41], des outils de prolongements puissants ont été mis en place pour les applications holomorphes propres entre domaines pseudoconvexes. Ainsi, toute application holomorphe propre entre des domaines qui vérifient une condition de régularité de leur noyau de Bergman, appelée condition (R), se prolonge de façon lisse au bord. Sans entrer dans les détails, précisons qu'un domaine  $\Omega$  vérifie la condition (R) si sa projection de Bergman  $L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  envoie  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  dans lui-même. On pourra consulter [65, 44] pour un exposé de ces problèmes. Nous utiliserons deux de ces résultats de prolongement :

**Théorème 1.3.3 (Bell [9]).** *Toute application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses se prolonge différemment à  $\text{SPC}(b\Omega_1)$ .*

**Théorème 1.3.4 (Boas-Straube [21]).** *Soit  $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  une application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses. Si  $\Omega_1$  possède une fonction p.s.h lisse et définissante globale alors  $F$  s'étend en une application lisse de  $\overline{\Omega_1}$ .*

Boas et Straube établissent le théorème 1.3.4 en prouvant qu'un domaine pseudoconvexe muni d'une fonction p.s.h définissante globale vérifie la condition (R). Le théorème 1.3.3 repose quant à lui sur une localisation des techniques de prolongement classiques.

Plaçons nous à présent dans le cas où  $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  est une application holomorphe propre qui se prolonge de façon lisse à  $\overline{\Omega_1}$ . La restriction de  $F$  à  $b\Omega_1$  hérite de certaines propriétés de l'application à l'intérieur (ouverture, surjectivité) et possède aussi des propriétés de rigidités propres aux applications CR. Ainsi par exemple, Diederich et Fornaess ont montré que la stricte pseudoconvexité est une obstruction au branchement ([36] lemme 4). Cette observation est fondamentale et conditionne l'étude des applications holomorphes propres.

**Proposition 1.3.5.** *Soit  $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  une application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses. Si  $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_1})$  alors :*

- i)  $F : b\Omega_1 \longrightarrow b\Omega_2$  est surjective,
- ii)  $F(\mathcal{SPC}(b\Omega_1)) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$  et  $\overline{V_F} \cap \mathcal{SPC}(b\Omega_1) = \emptyset$ .
- iii)  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega_1)$  et  $F(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2) \implies \text{Jac } F(\eta) = 0$ .

**Remarque 1.3.6.** *Sans l'hypothèse que  $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_1})$ , le théorème 1.3.3 assure que  $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{SPC}(\Omega_1))$ . Le point ii) du théorème précédent reste vrai dans ce cas.*

Ce théorème est classique, nous rappelons néanmoins sa preuve en suivant l'exposé de Bell [9].

Preuve : i) Soient  $y$  un point de  $b\Omega_2$  et  $(y_n)$  une suite de  $\Omega_2$  tendant vers  $y$ . D'après le théorème 1.3.1, il existe  $x_n \in \Omega_1$  tels que  $F(x_n) = y_n$ . Quitte à extraire, la suite  $x_n$  tend vers un point  $x \in b\Omega_1$ . Par continuité de  $F$ , on a  $F(x) = y$ .

Pour prouver les points ii) et iii), considérons un point  $\eta \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  ou un point  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  tel que  $F(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Introduisons une fonction définissante  $r_2$  de  $\Omega_2$  en  $F(p)$  et admettons pour le moment que la fonction  $r_1 := r_2 \circ F$  est une fonction définissante de  $\Omega_1$  en  $p$ . Considérons les déterminants de Lévi :

$$\Lambda_{r_\alpha}(x) := \det M_\alpha(x) := \det \begin{bmatrix} 0 & \partial r_\alpha / \partial \bar{z}_j \\ \partial r_\alpha / \partial z_i & \partial^2 r_\alpha / \partial z_i \partial \bar{z}_j \end{bmatrix}, \quad x \in b\Omega_\alpha.$$

Un calcul explicite montre la relation :

$$\Lambda_{r_1}(x) = |\det F'(x)|^2 \Lambda_{r_2}(F(x)) \quad \forall x \in b\Omega_1.$$

Ainsi, si  $\eta \in \{\Lambda_{r_1} \neq 0\}$  alors  $F(\eta) \in \{\Lambda_{r_2} \neq 0\}$ . De même, si  $\eta \in \{\Lambda_{r_1} = 0\}$  avec  $F(\eta) \in \{\Lambda_{r_2} \neq 0\}$  alors  $\text{Jac } F(\eta) = 0$ . Ceci permet de conclure car  $\Lambda_{r_\alpha}$  s'annule précisément sur le lieu de faible pseudoconvexité. Pour s'en convaincre, décrivons le noyau des matrices  $M_\alpha(x)$ ,  $x \in b\Omega_\alpha$ . On remarque tout d'abord qu'un élément  $w := {}^t(v, u_1, \dots, u_k) = {}^t(v, u) \in \mathbb{C}^{k+1}$  du noyau de  $M_\alpha(x)$  vérifie  $\sum u_j \partial r_\alpha / \partial \bar{z}_j(x) = 0$ , autrement dit  $u \in T_x^{\mathbb{C}} b\Omega_\alpha$ . Par ailleurs, la matrice  $M_\alpha(x)$  est hermitienne et un calcul simple montre que :

$$0 = w^* M_\alpha(x) w = 2\text{Re} \left( \frac{\partial r_\alpha}{\partial z_i} \bar{v} \bar{u}_i \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 r_\alpha}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} u_i \bar{u}_j.$$

Comme  $vu \in T_x^{\mathbb{C}} b\Omega_\alpha$ , le premier terme est nul et le second ne peut s'annuler que si  $x \in \mathcal{FPC}(b\Omega_\alpha)$ . Réciproquement, si  $x \in \mathcal{FPC}(b\Omega_\alpha)$  et  $u \in T_x^{\mathbb{C}} b\Omega_\alpha$  est une direction de faible pseudoconvexité, le vecteur  $(0, u)$  est dans le noyau de  $M_\alpha(x)$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $r_1 = r_2 \circ F$  est une fonction définissante au voisinage de  $\eta$ . Si  $F(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$  alors  $r_2$  peut être choisie *p.s.h.* La fonction  $r_1$  est également *p.s.h.* et il s'agit d'une fonction définissante en vertu du lemme de Hopf (2.2.1). Lorsque  $\eta \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ , nous allons prouver que  $F'(\eta) \cdot \vec{N}(\eta) \neq 0$  par un argument dû à Fornaess [42]. Une version locale plus précise que le théorème 1.1.1 est en fait énoncée dans [34] : il existe une fonction définissante  $\rho$  de  $\Omega_2$  au voisinage de  $F(\eta)$  qui est  $\mathcal{C}^2$  et telle que  $\sigma := -(-\rho)^{2/3}$  est *p.s.h.* La fonction  $\sigma \circ F$  est alors *p.s.h.* sur un voisinage de  $\eta$  dans  $\Omega_2$  et le lemme de Hopf montre que

$$\sigma \circ F(\eta + \epsilon \vec{N}(\eta)) \lesssim -\epsilon.$$

Ceci garantit que l'ordre de grandeur de  $-\rho \circ F(\eta + \epsilon \vec{N}(\eta))$  est au moins  $\epsilon^{3/2}$  et donc que la dérivée normale de  $F$  ne s'annule pas.  $\square$

## 1.4 Dynamique holomorphe dans les domaines :

Les rigidités des applications détaillées dans la partie précédente ne tiennent pas compte de l'hypothèse de travail  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ . Celle-ci, lorsque  $\Omega$  est borné produit une situation dynamique intéressante que révèle la théorie de Montel.

Dans cette partie, nous exposons une alternative remarquable (et facile à dégager) régissant la dynamique de ces applications. Celle-ci nous permet de distinguer deux grandes catégories - les dynamiques récurrentes et non-récurrentes - dont le traitement fera l'objet d'études relativement séparées. Nous décrivons ensuite quelques exemples de dynamiques récurrentes qui éclairent notre abord du problème de l'injectivité.

### 1.4.1 Distance de Kobayashi.

Une façon efficace d'envisager la théorie de Montel consiste à voir les applications holomorphes comme des contractions vis-à-vis de la distance de Kobayashi.

Par définition, la pseudo-métrie de Kobayashi d'une variété complexe  $\Omega$  est :

$$K_\Omega[x, u] := \inf \left\{ \frac{1}{r} \mid \exists \varphi \in \text{Hol}(\mathbb{D}_r, \Omega), \varphi(0) = x, \varphi'(0) = u \right\}, \quad x \in \Omega, u \in T_x\Omega.$$

La pseudo-distance de Kobayashi est la version intégrale de cette pseudo-métrie. Pour  $x, y \in \Omega$ , on pose :

$$d_{K_\Omega}(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 K_\Omega[\gamma(t), \dot{\gamma}(t)] dt, \gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], \Omega), \text{ avec } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

On ne précisera pas la dépendance en  $\Omega$  en l'absence d'ambiguïté.

Nous dirons qu'une variété est hyperbolique si  $d_{K_\Omega}$  est une distance (non-dégénérée). Un exemple important de variété hyperbolique est la boule euclidienne  $B$  de  $\mathbb{C}^k$  : la distance de Kobayashi entre deux points  $x, y$  y coïncide avec la distance de Poincaré

entre  $x$  et  $y$  dans le disque  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(x - y) \cap B$  ([55], partie IV.6). On en déduit que tout domaine borné de  $\mathbb{C}^k$  est hyperbolique car la pseudo-métrique de Kobayashi vérifie une propriété de monotonie :

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \implies K_{\Omega_1} \geq K_{\Omega_2}.$$

L'intérêt de la notion d'hyperbolicité réside dans la proposition suivante, qui est une généralisation du lemme de Schwartz :

**Proposition 1.4.1.** *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des variétés complexes et  $F : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$  une application holomorphe. Pour tout point  $x \in \Omega_1$  on a  $K_{\Omega_2}[F(x), F'(x)\cdot] \leq K_{\Omega_1}[x, \cdot]$ . De plus, l'égalité a lieu en un point de  $\Omega_1$  si et seulement si  $F$  est un revêtement.*

Cette proposition garantit en particulier que la famille des applications holomorphes  $\text{Hol}(\Omega_1, \Omega_2)$  entre deux variétés complexes est équicontinue dès que  $\Omega_2$  est hyperbolique.

### 1.4.2 Dynamique dans les variétés taut.

Nous décrivons ici la dynamique holomorphe sur des espaces complexes d'un type plus général que celui que nous considérons dans le reste de la thèse : celui des variétés taut. Ce paragraphe est principalement tiré du livre de M. Abate [1].

**Définition 1.4.2.** *Une variété complexe  $X$  est dite taut si l'espace des disques holomorphes de  $X$  est normal. Ceci signifie que toute suite de disques holomorphes  $\varphi_n : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  est soumise à l'alternative suivante :*

- Soit  $\varphi_n$  est compactement divergente :

$$\forall K \in \mathbb{D}, \forall K' \in \Omega, \quad \varphi_n(K) \cap K' = \emptyset \text{ pour } n \text{ assez grand},$$

- Soit on peut extraire de  $\varphi_n$  une sous-suite qui converge localement uniformément vers un disque holomorphe  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ .

Il est clair qu'une variété taut est hyperbolique car sa pseudo-métrique de Kobayashi est une métrique non-dénégée. En effet, si tel n'était pas le cas, on construirait une suite de disques holomorphes de centres fixés et de dérivées aussi grandes que voulues en 0. Ceci est en contradiction avec le caractère taut de la variété. Il est par ailleurs facile de s'assurer qu'une variété hyperbolique complète est taut. La propriété taut est une notion intermédiaire entre l'hyperbolicité et l'hyperbolicité complète.

**Proposition 1.4.3.** *Une variété  $X$  est taut si et seulement si pour toute variété complexe connexe  $Y$ , la famille  $\text{Hol}(Y, X)$  est normale.*

Preuve : Soit  $f_n : Y \longrightarrow X$  une suite d'application holomorphes non compactement divergente. Quitte à extraire on a donc une suite de points  $y_n$ , qu'on peut supposer converger vers  $y \in Y$ , telle que  $f_n(y_n)$  est relativement compacte. Comme  $X$  est hyperbolique, l'orbite d'un voisinage de  $y$  est relativement compact. L'hyperbolicité implique de même que l'ensemble des points à orbite compacte est ouvert. Cet

ensemble est également fermé. En effet, si  $z$  est limite de tels points  $z_k$ , il existe un disque holomorphe  $\Delta$  passant par  $z$  et  $z_{k_0}$  pour  $k_0$  assez grand. Par définition de taut,  $f_n|_{\Delta}$  est normale donc  $f_n(z)$  est relativement compacte dans  $X$ . Par connexité de  $Y$ , tout point a donc une orbite compacte. D'après le théorème d'Ascoli, on peut donc extraire de  $f_n$  une suite qui converge localement uniformément.  $\square$

**Remarque 1.4.4.** *Tout domaine hyperconvexe borné de  $\mathbb{C}^k$  est une variété taut [53].*

Preuve : Soit  $\Psi \in PSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  avec  $\Psi|_{b\Omega} = 0$ . L'espace  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \Omega)$  des disques holomorphes de  $\Omega$  est relativement compact dans  $\text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C}^k)$  car  $\Omega$  est borné. Il s'agit donc de prouver que tout disque holomorphe de  $\overline{\Omega}$ , limite de disques holomorphes de  $\Omega$  est tout entier dans  $\Omega$  ou tout entier dans  $b\Omega$ . Considérons une suite  $\varphi_j : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  convergeant vers  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \overline{\Omega}$ . La fonction  $\Psi \circ \varphi$  est *p.s.h* négative sur  $\mathbb{D}$  comme limite localement uniforme des fonctions *p.s.h*  $\Psi \circ \varphi_j$ . Si  $\varphi(\mathbb{D} \cap b\Omega) \neq \emptyset$  alors  $\Psi \circ \varphi$  s'annule sur  $\mathbb{D}$ , donc  $\Psi \circ \varphi \equiv 0$  d'après le principe du maximum. On en déduit que  $\varphi(\mathbb{D}) \subset b\Omega$ .  $\square$

Nous énonçons à présent l'alternative dynamique qui régit les auto-applications holomorphes des variétés taut :

**Théorème 1.4.5.** *Si  $\Omega$  est un domaine taut de  $\mathbb{C}^k$  et  $f$  est une application holomorphe de  $\Omega$  dans lui-même alors :*

1.  $d(f^n(z), b\Omega) \rightarrow 0$  localement uniformément

ou

2. *il existe une sous-variété holomorphe  $M$  de  $\Omega$  et, parmi les limites de  $(f^n)_n$ , une rétraction holomorphe  $\rho : \Omega \rightarrow M$  ( $\rho \circ \rho = \rho$ ). De plus,  $f|_M \in \text{Aut } M$  et toutes les limites de  $(f^n)_n$  sont de la forme  $\gamma \circ \rho$  où  $\gamma \in \text{Aut } M$ .*

**Définition 1.4.6.** *Dans le premier cas nous dirons que la dynamique de  $f$  est non-récurrente, dans le second qu'elle est récurrente.*

Expliquons l'énoncé de ce théorème avant d'en donner la preuve. Celui-ci regroupe en fait deux propriétés de la dynamique des applications holomorphes.

D'une part ce théorème prohibe tout mélange entre les situations récurrentes et non-récurrentes : si l'orbite d'un point de  $b\Omega$  sous  $(f^n)$  n'est pas compacte dans  $\Omega$  alors la suite  $f^n$  tend vers  $b\Omega$ . Lorsque  $b\Omega$  ne contient pas de disque analytique, notons que les limites d'une dynamique non-récurrente sont des points de  $b\Omega$  (*i.e.* des applications constantes).

D'autre part, dans la situation récurrente, le cœur du point 2 est l'existence d'une rétraction  $\rho$  parmi les limites des itérées. Lorsque  $\rho = \text{Id}_{\Omega}$ ,  $f$  est un automorphisme de  $\Omega$  dont la dynamique accumule l'identité, nous parlerons d'*automorphisme récurrent*. Par contre, lorsque  $\rho$  est dégénérée, le rétract associé à  $\rho$  est une variété holomorphe  $M$  (voir [26]) de dimension strictement inférieure à  $k$ . Les fibres de la rétraction sont alors des ensembles analytiques auxquels on peut penser comme à des variétés stables pour  $f$ ;  $f$  échange ces fibres ( $\rho \circ f = f \circ \rho$ ) et sa dynamique y est contractante. Pour  $c \in M$  et une sous-suite  $f^{p_k}$  convergeant vers  $\rho$  on a :

$$\{\rho = c\} = \{x \in \Omega \mid f^{p_k}(x) \rightarrow c\}.$$

Comme les automorphismes sont des isométries pour la distance de Kobayashi, ceci ne peut se produire que lorsque  $f$  est non-injective. C'est le sens de la remarque ci-dessous :

**Remarque 1.4.7.** *Si  $\dim M < k$  alors  $f$  n'est pas un automorphisme de  $\Omega$ .*

Preuve du théorème 1.4.5 : Si  $f^n$  ne converge pas localement uniformément vers  $b\Omega$  alors par définition des variétés taut, il existe une sous-suite  $f^{n_k}$  qui converge localement uniformément vers une application  $g \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . On peut de plus supposer que les sous-suites  $p_k := n_{k+1} - n_k$  et  $n_{k+1} - 2n_k$  sont strictement croissantes. Quitte à extraire de nouveau, on peut donc supposer :

$$\begin{cases} f^{n_k} \longrightarrow g \in \text{Hol}(\Omega, \Omega), \\ f^{p_k} = f^{n_{k+1} - n_k} \longrightarrow \rho \in \text{Hol}(\Omega, \overline{\Omega}), \\ f^{n_{k+1} - 2n_k} = f^{(n_{k+1} - n_k) - n_k} \longrightarrow h \in \text{Hol}(\Omega, \overline{\Omega}). \end{cases}$$

En vue du théorème, soulignons tout de suite que  $\rho$  est la rétraction cherchée, que  $g$  est un automorphisme de  $M$  (modulo la rétraction  $\rho$ ) et  $h$  son inverse. Voyons cela en détail. Notons que  $f^{p_k} \circ f^{n_k} = f^{n_{k+1}}$  donc  $\rho \circ g = g$ . Ceci suffit à assurer que  $\rho$  est à valeurs dans  $\Omega$  car  $\Omega$  est taut. De même,  $h \circ g = \rho$  et  $h \in \text{Hol}(\Omega, \Omega)$ . On a :

$$\begin{cases} f \circ \rho = \lim f \circ f^{p_k} = \lim f^{p_k} \circ f = \rho \circ f, \\ h \circ g = g \circ h = \lim f^{n_{k+1} - 2n_k + n_k} = \rho, \\ g \circ \rho = \rho \circ g = \lim f^{n_{k+1} - n_k + n_k} = g. \end{cases}$$

On a donc

$$\rho^2 = \rho \circ \rho = \rho \circ g \circ h = g \circ h = \rho.$$

L'application  $\rho$  est donc une rétraction holomorphe sur une variété holomorphe  $M$  [26]. L'application  $f|_M$  est un automorphisme de  $M$  car  $f|_M^{p_k}$  converge vers  $Id_M$ . Comme  $f$  et  $\rho$  commutent,  $f$  préserve la fibration induite par  $\rho$ , i.e.  $f(M) \subset M$  et  $f(\{\rho = c\}) \subset \{\rho = f(c)\}$ . Enfin,  $g$  et  $h$  sont à valeurs dans  $M$  et  $g|_M \circ h|_M = \rho|_M = Id_M$  donc  $\gamma := g|_M \in \text{Aut } M$  et on a trivialement  $g = \gamma \circ \rho$ .

Vérifions à présent que toutes les limites de  $(f^n)$  dans  $\text{Hol}(\Omega, \Omega)$  sont de cette forme. Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} \{\rho = c\} &= \{x \in \Omega \mid f^{p_k}(x) \longrightarrow c\} \\ &= \{x \in \Omega \mid d_K(f^k(x), f^k(c)) \longrightarrow 0\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

En effet, soit  $x \in \{\rho = c\}$ ,  $\epsilon \ll 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $f^{p_k}(x)$  et  $f^{p_k}(c)$  sont  $\epsilon$ -proches de  $c$  pour la distance de Kobayashi. Pour  $N \geq p_k$ , on a :

$$d_K(f^N(x), f^N(c)) \leq d_K(f^{p_k}(x), f^{p_k}(c)) \leq 2\epsilon.$$

L'identité  $\rho \circ f = f \circ \rho$  implique par ailleurs que  $f(M) \subset M$ . Au vu de (1.2) toutes les limites de  $(f^n)$  dans  $\text{Hol}(\Omega, \Omega)$  sont à valeurs dans  $M$ . Les rétracts obtenus pour différentes sous-suites sont donc inclus dans  $M$  et, par symétrie, coïncident avec  $M$ . Si  $\rho'$  est une autre rétraction limite,  $\rho$  et  $\rho'$  ont même rétract et mêmes fibres, car ces dernières sont définies par (1.2). On en conclut que  $\rho = \rho'$ .

Il reste finalement à voir que  $(f^n)$  est compacte dans  $\text{Hol}(\Omega, \Omega)$ , c'est-à-dire qu'aucune sous-suite de  $f^n$  ne tend vers  $b\Omega$ . Il suffit bien sur de montrer que  $(f^n|_M)$  est compacte dans  $\text{Hol}(M, M)$ . Il s'agit donc de montrer que les itérées d'un automorphisme récurrent d'une variété  $M$  forment une partie compacte de  $\text{Hol}(M, M)$ . Nous utiliserons uniquement pour cela que  $M$  est hyperbolique. Nous noterons à présent  $f$  au lieu de  $f|_M$ . Fixons un point  $z_0 \in M$  et montrons que son orbite  $A := \{f^n(z_0)\}$  est compacte dans  $M$ . Considérons un réel  $\eta > 0$  tel que  $B_K(z_0, \eta) \Subset M$ . Un argument de compacité montre qu'il existe des entiers  $k_1, \dots, k_r$  tels que

$$A \cap B_K(z_0, \eta) \subset \bigcup_{i=1}^r B_K(f^{k_i}(z_0), \eta/2).$$

Comme  $f^n$  accumule l'identité, il existe un entier  $k_0 > \max\{k_1, \dots, k_r\}$  tel que  $d_K(z_0, f^{k_0}(z_0)) < \eta/2$ . Montrons que

$$A \subset T := \bigcup_{0 \leq i \leq k_0} B_K(f^i(z_0), \eta). \quad (1.3)$$

La suite  $f^k(z_0)$  visitant une infinité de fois  $B_K(z_0, \eta/2)$ , il suffit de vérifier que  $f^j(z_0) \in T$  pour  $j \leq h$  dès que  $f^h(z_0) \in B_K(z_0, \eta/2)$ . Si  $h \leq k_0$ , c'est évident par définition de  $T$ . Sinon,  $d_K(f^{h-j}(z_0), f^{k_0-j}(z_0)) \leq \eta$  pour  $j \leq k_0$  (car  $f \in \text{Aut } M$ ). Donc

$$f^{h-j}(z_0) \in T \text{ pour } j \leq k_0.$$

De plus,  $f^{h-k_0}(z_0) \in B(z_0, \eta)$  donc  $d_K(f^{h-k_0}(z_0), f^{k_i}(z_0)) \leq \eta/2$  pour un certain  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Pour  $j \leq k_i$ , on a alors  $d_K(f^{h-k_0-j}(z_0), f^{k_i-j}(z_0)) \leq \eta/2$ , donc

$$f^{h-k_0-j}(z_0) \in T \text{ pour } j \leq k_i.$$

De plus,  $f^{h-k_0-k_i}(z_0) \in B(z_0, \eta/2)$ . On obtient le résultat souhaité en itérant ce procédé.  $\square$

### 1.4.3 Exemples de Lattès.

Dans la situation extrême où le rétract est de dimension nulle, la suite  $(f^n)_n$  converge localement uniformément vers un point de  $M$ . Tel est le cas des applications polynomiales homogènes et non-dégénérées de  $\mathbb{C}^k$  car elles possèdent un bassin d'attraction superattractif à l'origine. Parmi celles-ci, un exemple particulièrement frappant, étudié par C. Dupont est obtenu en relevant à  $\mathbb{C}^k$  un endomorphisme de Lattès de  $\mathbb{P}^{k-1}$ . Pour cet exemple, le bord du bassin superattractif est lisse et sphérique en dehors de la trace d'un ensemble algébrique [39].

L'application  $\mathcal{P}$  de Weierstrass définit un revêtement analytique de  $A := \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{P}^1$  ramifié au dessus d'un point. Elle permet de descendre une dilatation  $D$  de  $A$  en une auto-application holomorphe propre de  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d := \deg D$  :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & A \\ \downarrow \mathcal{P} & & \downarrow \mathcal{P} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

L'application  $f$  est appelée un exemple de Lattès [57]. Relevons  $f$  en une application polynomiale homogène  $F$  de degré  $d$  de  $\mathbb{C}^2$ . Notons  $G_F$  la fonction de Green de  $F$  et  $\Omega_F$  son bassin d'attraction de l'origine. Le domaine  $\Omega_F$  est pseudoconvexe, borné et disque (car  $\Omega_F = \{G_F < 0\}$ ). Pour étudier le bord de ce bassin, on commence par introduire  $O(-1)$  :

$$\begin{cases} O(-1) := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) / \sim \\ (z, v) \sim (z', v') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^*, z' = \lambda z, v' = \lambda^{-1} v. \end{cases}$$

Il s'agit d'un fibré en droites sur  $\mathbb{P}^1$  dont on notera  $[z, v]_{-1}$  les éléments. Il correspond en fait à  $\mathbb{C}^2$  éclaté en 0. L'application  $[z, v]_{-1} \mapsto zv$  fournit un biholomorphisme entre le complémentaire de la section nulle dans  $O(-1)$  et  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . L'intérêt de ce fibré est de présenter explicitement  $\mathbb{P}^1$  comme sa section nulle. On vérifie que l'application  $F$ , vue comme auto-application de  $O(-1)$  s'écrit :

$$\tilde{F}[z, v]_{-1} = [F(z), cv^d]_{-1}, \quad c \in \mathbb{C}^*.$$

Cette observation permet de décrire la dynamique de  $\tilde{F}$ , au moins au voisinage de  $\mathbb{P}^1$ . La section nulle de  $O(-1)$  est stabilisée par  $\tilde{F}$  à l'ordre  $d$ , elle possède donc un bassin d'attraction  $\Omega_{\tilde{F}}$ . Sur ce bassin,  $\tilde{F}$  induit  $f$  sur  $\mathbb{P}^1$ , échange les fibres et contracte le long de celles-ci. Notons que  $\Omega_{\tilde{F}}$  est l'éclaté en 0 de  $\Omega_F$ . Les bords de  $\Omega_{\tilde{F}}$  et  $\Omega_F$  sont donc biholomorphiquement équivalents.

Tirons à présent en arrière le fibré  $O(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1$  par  $\mathcal{P}$ . Ceci produit un fibré en droite sur le tore  $A$ , dont la section nulle s'identifie à  $A$ . L'application  $\tilde{F}$  se relève à son tour en une auto-application  $\mathcal{D}$  de ce fibré. Par construction celle-ci stabilise la section nulle à l'ordre  $d$  et y induit  $D$ . Elle possède donc un bassin d'attraction,  $\Omega_{\mathcal{D}}$ . Résumons nous :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{\mathcal{D}} & \xrightarrow{\mathcal{D}} & \Omega_{\mathcal{D}} & & \\ \downarrow \tilde{\mathcal{P}} & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & A & \xrightarrow{D} & A & \\ \downarrow \tilde{\mathcal{P}} & \downarrow \mathcal{P} & \downarrow \tilde{\mathcal{P}} & \downarrow \mathcal{P} & \\ \Omega_{\tilde{F}} & \xrightarrow{F} & \Omega_{\tilde{F}} & & \\ \downarrow \pi & \downarrow \mathcal{P} & \downarrow \pi & \downarrow \mathcal{P} & \\ & \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 & \end{array}$$

Le théorème d'Appel-Humbert précise la situation : le fibré  $\mathcal{P}^*(O(-1) \rightarrow \mathbb{P}^1)$  est un  $L(H, \alpha)$  [32]. Le couple  $(H, \alpha)$  est un type, il consiste d'une forme hermitienne  $H$  définie négative et d'une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{S}^1$  vérifiant  $\alpha(n+im) = (-1)^{nm} \xi_0^n \xi_1^m$ . De même que pour  $\tilde{F}$ , on a une expression de  $\mathcal{D}$  en fonction de  $D$  :

$$\mathcal{D}\{x, u\} = \{Dx, e^{\pi H(\tau, \vec{D}x)} u^d\}.$$

Cette remarque permet de décrire complètement le bord de  $\Omega_{\mathcal{D}}$  et de  $\Omega_{\tilde{F}}$  [39]. En effet, un calcul explicite montre que  $e^{G_F \circ \tilde{\mathcal{P}}} = q$  où  $q$  est une normalisation de la

métrique  $e^{-H(x,x)}|u|$  sur  $L(H, \alpha)$ . Ainsi,  $e^{G_{F^n} \circ \tilde{\mathcal{P}}} = q^n$  et  $\Omega_{\mathcal{D}} = \{q < 1\}$ . Pour un point de  $b\Omega_{\mathcal{D}}$  de coordonnées  $(x, u)$ , on peut considérer une détermination du logarithme autour de  $u$  car  $u \neq 0$ . Sur un voisinage  $O$  de  $(x, u)$ , on a alors :

$$\Omega_{\mathcal{D}} \cap O = \{\operatorname{Re} \log u + H(x, x) < 0\}.$$

Le bord de  $\Omega_{\mathcal{D}}$  est donc sphérique. L'hypersurface  $b\Omega_{\mathcal{D}}$  s'obtient en quotientant  $b\Omega_{\mathcal{D}}$  par un groupe de réflexion finie, elle est lisse et sphérique en dehors d'un ensemble algébrique.

En conclusion, cet exemple fournit :

- Une auto-application holomorphe propre non-injective d'un domaine relativement compact (dans  $L(H, \alpha)$ ) à bord lisse. Elle met donc la question 1 en défaut lorsqu'on y remplace  $\mathbb{C}^k$  par une variété complexe quelconque. Cette variété n'est évidemment pas hyperbolique car la suite des itérées  $(\mathcal{D}^n)$  n'est pas normale ( $(D^n)$  ne l'est pas). Notons tout de même que  $\mathcal{D}$  ne branche pas sur  $\Omega_{\mathcal{D}}$ .
- Une auto-application holomorphe propre non-injective d'un domaine pseudoconvexe borné de  $\mathbb{C}^2$ . Le bord de ce domaine est lisse et sphérique en dehors d'une union finie de cercles. Nous prouverons en fait que les bords des bassins d'attractions de points fixes attractifs ne sont jamais lisses.

#### 1.4.4 Exemple de Yoccoz et perturbation, évanescence des variétés stables.

Il est plus difficile de construire des exemples non-triviaux de dynamiques possédant des rétracts qui ne sont pas des points attractifs. Nous présentons ici deux exemples de dynamiques "fibrées sur le disque".

##### 1. Exemple de Yoccoz ; persistance des variétés stables.

L'application  $(w, z) \mapsto (w, wz + z^2)$  produit un rétract  $(\mathbb{D} \times \{0\})$  de dimension 1 dans  $\mathbb{C}^2$  et induit une auto-application propre sur le bassin d'attraction de celui-ci. Yoccoz montre par un argument élémentaire que, pour la plupart des  $\xi \in b\mathbb{D}$ , les variétés stables des  $(w, 0)$  ne disparaissent pas quand  $w$  tend radialement vers  $\xi$  et produisent une trace analytique dans le bord. Il établit ainsi très simplement l'existence de disques de Siegel ([75]).

Ce phénomène de persistance des variétés stables est remarquable et on peut se demander s'il est général. Ceci entraînerait que le bord d'un domaine soutenant une dynamique récurrente de rétract non-trivial contient des variétés analytiques. La famille que nous décrivons maintenant montre que ce phénomène de persistance n'a pas toujours lieu. Elle est obtenue en perturbant l'exemple de Yoccoz.

##### 2. La famille $f_{\alpha} = (we^{i2\pi\alpha}, wz + z^2)$ ; évanescence des variétés stables.

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , définissons

$$f_{\alpha} : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (w, z) \longmapsto (we^{i2\pi\alpha}, wz + z^2)$$

$$\text{et } B_{\alpha} = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid f_{\alpha,2}^n(w, z) \longrightarrow 0\} \text{ où } f_{\alpha}^n := (f_{\alpha,1}^n, f_{\alpha,2}^n).$$

Le domaine  $B_{\alpha}$  est pseudoconvexe et contenu dans  $\mathbb{D} \times \mathbb{D}_2$ . L'application  $f_{\alpha}$  induit une application propre de  $B_{\alpha}$  dans lui-même. On pourra observer que  $B_{\alpha}$  contient

le triangle  $T := \{|w| + |z| < 1\}$  et que  $f_\alpha(T) \subset T$ , si bien que  $B_\alpha = \cup f_\alpha^{-n}(T)$ . La dynamique de  $f_\alpha$  est récurrente sur  $B_\alpha$ , la rétraction est donnée par  $\rho(w, z) = (w, 0)$  et  $M = \mathbb{D} \times \{0\}$ . Pour tout  $w \in \mathbb{D}$ , nous noterons  $\mathcal{F}_w$  la fibre de  $\rho$  au dessus de  $(w, 0)$ .

Pour  $\alpha = 0$ , on retrouve l'exemple de Yoccoz et la fibre  $\mathcal{F}_w$  coïncide avec le bassin d'attraction de  $z \mapsto wz + z^2$  à l'origine.

Nous allons voir, par un argument de catégories de Baire, que ces fibres disparaissent pour certaines valeurs de  $\alpha$ . Plus précisément, *le rayon conforme*  $r(\alpha, w)$  de  $\mathcal{F}_w$  en  $(w, 0)$  tend vers 0 lorsque  $|w|$  tend vers 1. A cet effet, introduisons les fonctions intermédiaires suivantes.

$$r(\alpha, w) := \sup \left\{ r \mid \exists \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \{w\} \times \mathbb{C}) \text{ t.q. } \begin{cases} i) \psi(0) = (w, 0) \text{ et } |\psi'(0)| = 1 \\ ii) \psi(\mathbb{D}_r) \subset \overline{B_\alpha} \end{cases} \right\}.$$

On définit de même  $\tilde{r}(\alpha, w)$  en remplaçant ii) par une condition moins contraignante :

$$\tilde{r}(\alpha, w) := \sup \left\{ r \mid \exists \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \{w\} \times \mathbb{C}) \text{ t.q. } \begin{cases} i) \psi(0) = (w, 0) \text{ et } |\psi'(0)| = 1 \\ ii) f_\alpha^n(\psi(\mathbb{D}_r)) \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \right\}.$$

On pose ensuite

$$\begin{aligned} R(\alpha) &:= \inf_{w \in b\mathbb{D}} r(\alpha, w) \\ \tilde{R}(\alpha) &:= \inf_{w \in b\mathbb{D}} \tilde{r}(\alpha, w). \end{aligned}$$

On vérifie facilement le lemme suivant :

**Lemme 1.4.8.** *Les fonctions  $r(\alpha, \cdot)$ ,  $\tilde{r}$  et  $\tilde{R}$  sont semi-continues supérieurement sur  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{R} \times \mathbb{D}$  et  $\mathbb{R}$  respectivement.*

L'intérêt de la fonction  $\tilde{r}$  est d'être semi-continue supérieurement en les deux variables. Notons que  $r \leq \tilde{r}$  et  $R \leq \tilde{R}$ . Il s'agit d'exhiber des valeurs de  $\alpha \in \mathbb{R}$  telles que  $r(\alpha, e^{i\theta}) = 0$  pour toute valeur de  $\theta$ . Plus précisément,

**Proposition 1.4.9.** *Il existe un  $G_\delta$  dense  $E$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $r(\alpha, e^{i\theta}) = 0$  pour tout  $\alpha \in E$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .*

Preuve : Commençons par montrer que

$$\tilde{R} = 0 \text{ sur } \mathbb{Q}. \tag{1.4}$$

Soit  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$  et  $w_0 = e^{i2\pi\beta}$ ,  $\beta \in \mathbb{Q}$ . L'itérée  $q$ -ième de  $f_\alpha$  est de la forme  $\tilde{f}_\alpha(w, z) := f_\alpha^q(w, z) = (w, P_w(z))$  où  $P_w(z) = w^q z + \dots + z^{2^q}$ . L'origine étant dans le Julia du polynôme  $P_{w_0}$ , elle adhère à son bassin d'attraction de l'infini. Ceci implique que  $\tilde{r}(\alpha, w_0) = 0$  et donc que  $\tilde{R}(\alpha) = 0$ .

Vérifions maintenant que

$$r(\alpha, \cdot) \equiv R(\alpha) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{1.5}$$

Fixons pour cela  $w$  et  $w'$  dans  $b\mathbb{D}$  et posons  $w_n := w e^{i2\pi n\alpha}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ . Il est clair que

$$r(\alpha, w) \leq r(\alpha, w_n) \leq r(\alpha, w_{n+1}).$$

On en déduit, grâce à la semi-continuité supérieure de  $r(\alpha, \cdot)$  et en choisissant une sous-suite  $w_{n_k}$  tendant vers  $w'$ , que  $r(\alpha, w') \geq \overline{\lim} r(\alpha, w_{n_k}) \geq r(\alpha, w)$ . Ainsi  $r(\alpha, \cdot)$  est constante et coïncide avec  $R(\alpha)$ .

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'ensemble  $E$ . Puisque  $\tilde{R}$  est semi-continue supérieurement,  $\{\tilde{R} = 0\}$  est un  $G_\delta$  dont la densité résulte de (1.4). Par le théorème de Baire,  $E := \{\tilde{R} = 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  est également un  $G_\delta$  dense. D'après (1.5), on a  $r(\alpha, e^{i\theta}) = R(\alpha) \leq \tilde{R}(\alpha) = 0$  pour tout  $\alpha \in E$  et tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 1.5 Entropie topologique

Nous présentons dans cette partie des résultats classiques concernant l'entropie topologique dont nous nous servons dans la partie 3.4. Il s'agit d'un invariant topologique qui mesure la complexité du système dynamique. De façon heuristique, il estime le taux de croissance exponentiel (asymptotique) du nombre de  $n$ -orbites qui représentent des comportements différents.

Le but est d'exposer d'une part un résultat de localisation de l'entropie dû à Bowen, d'autre part le lien optimal entre entropie et degré obtenu par Gromov dans le cadre des applications holomorphes de  $\mathbb{P}^1$ .

### 1.5.1 Définitions.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Une façon de mesurer la complexité dynamique de  $f$  consiste à compter le nombre de trajectoires divergent l'une de l'autre. A cette fin, introduisons la distance dynamique qui mesure la distance entre les  $i$ -orbites :

$$d_i^f(x, y) := \max_{0 \leq k \leq i} d(f^k(x), f^k(y)) \quad (f^0 = Id \text{ par convention}).$$

Nous dirons qu'un ensemble  $E$  est  $(n, \delta)$ -représentatif si toute  $n$ -orbite de  $f$  est  $\delta$ -proche d'une orbite d'un point de  $E$ , ou encore :

$$\forall x \in X, \exists y \in E, d_n^f(x, y) \leq \delta.$$

Définissons  $S_d(n, \delta, f)$  le cardinal minimal d'un ensemble  $(n, \delta)$ -représentatif. Ce nombre mesure le nombre minimal d'orbites à considérer si on veut avoir un échantillon de chaque  $n$ -orbite à une erreur  $\delta$  près. On définit  $h_d(f, \delta)$  comme le taux de croissance exponentiel de la quantité  $S_d(n, \delta, f)$ , c'est à dire :

$$h_d(f, \delta) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log S_d(n, \delta, f),$$

puis  $h_d(f) := \sup_\delta h_d(f, \delta)$ . Il convient de remarquer que ce suprémum est en fait une limite car  $\delta \mapsto h_d(f, \delta)$  est décroissante. Enfin, on s'assure facilement que  $h_d(f)$  ne dépend de la distance  $d$  que par la topologie qu'elle définit. On appelle ce nombre **l'entropie topologique** de  $f$ , et on le note  $h_{top}(f)$ . Notons qu'une façon

parfaitement équivalente de définir l'entropie topologique consiste à considérer des ensembles  $(n, \delta)$ -séparés plutôt que des ensembles  $(n, \delta)$ -représentatifs. Un ensemble est dit  $(n, \delta)$ -séparé si les  $n$ -orbites de ses éléments sont toutes au moins distantes de  $\delta$ . Si  $N_d(n, \delta, f)$  est le cardinal maximal d'un ensemble  $(n, \delta)$ -séparé, on a :

$$h_{top}(f) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log N_d(n, \delta, f).$$

Pour prouver le théorème de Bowen, il s'avèrera agréable de se départir du formalisme de la distance dynamique pour adopter une définition plus intuitive. Considérons un recouvrement ouvert  $\mathcal{A} := (A_1, \dots, A_s)$  de  $X$ . On appelle  $(\mathcal{A}, n)$ -trajectoire de  $x$  toute  $n$ -chaîne  $(A_{i_0}, \dots, A_{i_n})$  telle que  $f^j(x) \in A_{i_j}$  pour tout entier  $j \leq n$ . Un ensemble de  $n$ -chaînes d'éléments de  $\mathcal{A}$  est dit  $(\mathcal{A}, n)$ -représentatif s'il contient au moins une  $(\mathcal{A}, n)$ -trajectoire de chaque point de  $X$ . La  $(\mathcal{A}, n)$ -complexité de  $f$  est le cardinal minimal d'un ensemble  $(\mathcal{A}, n)$ -représentatif, on la note  $C(f, \mathcal{A}, n)$ . On définit alors l'entropie du recouvrement  $\mathcal{A}$  par :

$$h(f, \mathcal{A}) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \log C(f, \mathcal{A}, n),$$

et l'entropie topologique de  $f$  comme le suprémum des entropies des recouvrements ouverts finis de  $X$ ,  $h_{top}(f) := \sup_{\mathcal{A}} h(f, \mathcal{A})$ . Cette notion d'entropie topologique coïncide bien avec la précédente.

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $X$  un espace métrique compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Si  $\mathcal{A}_m$  est une suite de recouvrements dont le diamètre tend vers 0 alors  $h(f, \mathcal{A}_m) \rightarrow h_{top}(f)$ .*

Cette définition de l'entropie rend limpide la proposition suivante.

**Proposition 1.5.2.** *Soit  $X$  un espace compact et  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Si  $M \subset X$  est un compact  $f$ -invariant alors  $h_{top}(f|_M) \leq h_{top}(f)$ .*

## 1.5.2 Support de l'entropie : théorème de Bowen.

L'entropie topologique mesure la complexité d'un système dynamique. On s'attend donc à ce que les régions ne possédant pas de propriétés de récurrence, donc ne supportant pas de dynamique, n'interviennent pas dans son calcul. Formalisons ceci :

**Définition 1.5.3.** *Soit  $X$  un espace topologique et  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Un point  $x \in X$  est dit récurrent si pour tout voisinage  $U$  de  $x$ , il existe un entier  $n > 0$  tel que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . L'ensemble des points récurrents est appelé l'ensemble non-errant de  $f$  et noté  $NW(f)$ .*

L'ensemble non-errant est un fermé totalement invariant par  $f$ . Le théorème suivant, dû à Bowen [23] assure que l'entropie topologique de  $f$  est portée par cet ensemble :

**Théorème 1.5.4.** *Soit  $X$  un espace métrique compact. Pour toute application continue  $f : X \rightarrow X$ , on a  $h_{\text{top}}(f) = h_{\text{top}}(f|_{NW(f)})$ .*

L'inégalité  $h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(f|_{NW(f)})$  provient de la proposition 1.5.2. La preuve de l'autre inégalité est typique des raisonnements sur l'entropie. Etant donné un recouvrement  $\mathcal{A}$  de l'ensemble non-errant et un ensemble  $(\mathcal{A}, n)$ -représentatif pour  $f|_{NW(f)}$ , on construit un recouvrement  $\mathcal{C}$  de  $X$  et on décrit les  $\mathcal{C}$ -trajectoires des points de  $X$ . Ces  $\mathcal{C}$ -trajectoires sont essentiellement des  $\mathcal{A}$ -trajectoires. Un calcul facile permet d'obtenir une majoration de  $h(f, \mathcal{C})$  par  $h(f|_{NW(f)}, \mathcal{A})$ .

Preuve : Afin d'alléger les notations, nous noterons  $M$  l'ensemble non-errant. Fixons un réel  $\epsilon > 0$ . Soit  $\tilde{\mathcal{A}} := (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_s)$  un recouvrement ouvert de  $M$  de diamètre inférieur à  $\epsilon$  ( $\tilde{A}_i \subset M$ ). Nous noterons  $C_n := C(f|_M, \tilde{\mathcal{A}}, n)$  la  $(\tilde{\mathcal{A}}, n)$ -complexité de  $f|_M$ . Fixons un entier  $N$  suffisamment grand pour que

$$\frac{1}{N+1} \log C_N \leq h(f|_M, \tilde{\mathcal{A}}) + \epsilon. \quad (1.6)$$

Soit  $\tilde{\mathcal{E}} := \{(\tilde{A}_{i_0}, \dots, \tilde{A}_{i_N})\}$  un ensemble  $(\tilde{\mathcal{A}}, N)$ -représentatif de cardinal  $C_N$ .

• *Construction du recouvrement  $\mathcal{C}$  de  $X$ .*

Soit  $\alpha$  le module de d'équicontinuité des applications  $(Id, f, \dots, f^N)$  associé à  $\epsilon$  :

$$d(x, y) \leq \alpha \implies d(f^k(x), f^k(y)) \leq \epsilon \quad \forall k \in [0, N].$$

Définissons  $U := \{y \in X \mid d(y, M) < \alpha\}$  puis  $\mathcal{B}$  la famille des ouverts  $B_i$  définis par

$$B_i := \{y \in U \mid d(y, \tilde{A}_i) < \epsilon\}.$$

On complète  $\mathcal{B}$  en un recouvrement ouvert de  $X$  de diamètre inférieur à  $3\epsilon$  en y adjoignant un recouvrement de  $X \setminus U$  par un ensemble d'ouverts  $\mathcal{N} := \{N_1, \dots, N_t\}$  vérifiant

$$f^n(N_i) \cap N_i = \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Nous noterons  $\mathcal{C}$  le recouvrement  $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$ .

• *Description des trajectoires.*

Remarquons dans un premier temps que par définition de  $\alpha$  tous les points de  $U$  ont une  $N$ -orbite qui est  $\epsilon$ -proche de celle d'un point de  $M$ . Ainsi, tout élément  $x \in X$  dont une  $(\mathcal{C}, N)$ -trajectoire est formée uniquement d'ouverts de  $\mathcal{B}$  possède une  $(\mathcal{C}, N)$ -trajectoire dans  $\mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est défini par :

$$\mathcal{E} := \{E_{(i_0, \dots, i_N)} := (B_{i_0}, \dots, B_{i_N}), \text{ t.q. } (\tilde{A}_{i_0}, \dots, \tilde{A}_{i_N}) \in \tilde{\mathcal{E}}\} \quad (\#\mathcal{E} = C_N).$$

Notons ensuite que l'orbite d'un point  $x \in X$  ne peut posséder deux éléments dans le même ouvert  $N_j$  en raison de (1.7). Une  $(\mathcal{C}, n)$ -trajectoire ne peut donc contenir plus de  $t$  termes parmi les  $N_j$ .

Une  $(\mathcal{C}, n)$ -trajectoire  $T$  est donc formée d'au plus  $t+1$  blocs d'éléments de  $\mathcal{B}$  séparés par des éléments de  $\mathcal{N}$  dont le nombre total n'excède pas  $t$  :

$$T = \underbrace{\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}}_{p_1}, \mathcal{N}, \underbrace{\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}}_{p_2}, \mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}, \underbrace{\mathcal{B}, \dots, \mathcal{B}}_{p_{k+1}}$$

où  $p_i \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq t$  et  $k + \sum p_i = n + 1$ .

D'après la remarque précédente, toutes les chaînes de longueur  $N + 1$  d'éléments de  $\mathcal{B}$  peuvent être remplacées par un élément de  $\mathcal{E}$ . Ecrivons  $p_i = (N + 1)q_i + r_i$  avec  $r_i \leq N$ . On a alors :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} T = E_{j_1^1}, \dots, E_{j_{q_1}^1}, B_{i_1^1}, \dots, B_{i_{r_1}^1}, N_{l_1}, \dots, \dots, E_{j_1^k}, \dots, E_{j_{q_k}^k}, B_{i_1^k}, \dots, B_{i_{r_k}^k} \\ \text{où } k + \sum_{i=1}^k q_i(N + 1) + r_i = n + 1 \text{ et } E_{j_m^l} \in \mathcal{E}, B_{i_m^n} \in \mathcal{B}, N_{l_m} \in \mathcal{N}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des  $(\mathcal{C}, n)$ -trajectoires du type  $(*)$  est  $(\mathcal{C}, n)$ -représentatif, on le note  $\mathcal{D}_n$ .

• *Estimation du cardinal de  $\mathcal{D}_n$ .*

Le nombre maximal d'éléments de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{N}$  dans  $(*)$  est  $t + N(t + 1) \leq 2Nt$ . Le nombre de possibilité de les choisir et de les placer est donc majoré pour  $n$  assez grand par  $P(n) := \binom{n+1}{2Nt} (2Nt)^{t+s}$ . Le cardinal de  $\mathcal{D}_n$  vérifie donc :

$$\#\mathcal{D}_n \leq P(n)(\#\mathcal{E})^{E(\frac{n+1}{N+1})} \leq P(n)C_N^{\frac{n+1}{N+1}}.$$

On a donc :

$$\frac{1}{n+1} \log \#\mathcal{D}_n \leq \frac{1}{n+1} \log P(n) + \frac{1}{N+1} \log C_N$$

Comme  $N, t, s$  sont des constantes,  $P(n)$  est un polynôme en  $n$  donc  $\frac{1}{n+1} \log P(n) \leq \epsilon$  pour  $n$  assez grand. En vertu de (1.6) nous obtenons finalement :

$$\frac{1}{n+1} \log \#\mathcal{D}_n \leq h(f|_M, \mathcal{A}) + 2\epsilon \quad \text{pour } N \gg 1.$$

Ainsi  $h(f, \mathcal{C}) \leq h(f|_M, \mathcal{A}) + 2\epsilon$ . On conclut en faisant ces construction pour  $\epsilon$  tendant vers 0 et en utilisant la proposition 1.5.1.  $\square$

Une autre preuve de ce théorème est basée sur le principe variationnel. L'idée est de profiter des mesures de probabilité invariantes que possède tout système dynamique  $(f^n)$  sur un espace métrique compact. A une telle mesure  $\mu$  est associé un invariant, l'entropie métrique de  $f$  noté  $h_\mu(f)$ , qui ne dépend clairement que de la dynamique de  $f$  sur le support de  $\mu$ . Ce support étant évidemment inclus dans l'ensemble non-errant,  $h_\mu(f) = h_\mu(f|_{NW(f)})$ . Le principe variationnel relie alors les notions d'entropie métrique et d'entropie topologique :

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f), \mu \text{ mesure de probabilité } f\text{-invariante}\}.$$

Le théorème 1.5.4 s'en déduit immédiatement.

### 1.5.3 Liens entropie-degré.

Un système dynamique associé à une application ayant un degré strictement supérieur à 1 possède toujours des propriétés de récurrence non-triviales. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, ces propriétés de récurrence sont à l'origine de l'entropie. Il est donc naturel de se demander si l'entropie topologique peut être nulle en présence de degré. Ceci est possible en régularité  $\mathcal{C}^0$  ([52], p.315). Par contre, en classe  $\mathcal{C}^1$ , Misiurewicz et Przytycki ont montré que l'entropie topologique est minorée par le logarithme du degré [59]. Rappelons que le degré d'une application  $\mathcal{C}^1$  est le cardinal des préimages des valeurs régulières.

**Théorème 1.5.5.** *Soit  $X$  une variété compacte orientable. Toute application  $f : X \rightarrow X$  de classe  $C^1$  et de degré  $d$  vérifie  $h_{\text{top}}(f) \geq \log d$ .*

Preuve : Soit  $\rho$  une distance définissant la topologie sur  $X$ ,  $\omega$  une forme volume et  $L := \sup_X |\text{Jac } f|$ . Pour  $\alpha < 1$  fixé, nous allons montrer que  $h_{\text{top}}(f) \geq \alpha \log d$  en construisant des ensembles  $(n, \delta)$ -séparés de cardinaux supérieurs à  $d^{\alpha n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Définissons  $\epsilon := L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$  et  $B := \{x \in X, |\text{Jac } f|(x) \geq \epsilon\}$ . Comme  $f$  est un difféomorphisme local de  $B$ , il existe un réel  $\delta > 0$  tel que  $f(x) \neq f(y)$  dès que  $x, y \in B$  et  $\rho(x, y) \leq \delta$  ( $x \neq y$ ). Pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé, considérons l'ensemble des points dont la proportion de la  $n$ -orbite dans  $B$  est inférieure à  $\alpha n$  :

$$A := \{y \in X, \#B \cap \{y, f(y), \dots, f^n(y)\} \leq \alpha n\}.$$

Si  $x \in A$ , on a :

$$|\text{Jac } f^n(x)| = \prod_{i=0}^{n-1} |\text{Jac } f(f^i(x))| < L^{\alpha n} \epsilon^{(1-\alpha)n} < 1.$$

Le volume de  $f^n(A)$  est donc strictement inférieur au volume de  $X$  et le théorème de Sard assure l'existence d'une valeur régulière  $y \in X \setminus f^n(A)$ . Nous allons mettre en évidence un ensemble  $(n, \delta)$ -séparé,  $E_{n, \delta}$ , inclus dans  $f^{-n}(\{y\})$ .

*Construction de l'ensemble  $E_{n, \delta}$ .*

On construit par récurrence sur  $i$  des ensembles  $(i, \delta)$ -séparés en itérant le processus suivant. Si  $z$  est une valeur régulière de  $f$  alors  $\#f^{-1}(\{z\}) = d$ . Lorsque  $f^{-1}(\{z\}) \subset B$ , on pose  $Q(z) = f^{-1}(\{z\})$  et on dit que  $z$  est une bonne transition ; sinon,  $Q(z)$  est l'une des préimages de  $z$  hors de  $B$  et la transition est dite mauvaise. Notons que  $Q(z)$  est toujours  $\delta$ -séparé par définition de  $\delta$ .

On définit alors  $Q_0 = y$  et  $Q_{i+1} = \bigcup_{z \in Q_i} Q(z)$ . Evidemment,  $Q_0$  est  $(0, \delta)$ -séparé. Supposons que  $Q_i$  est  $(i, \delta)$ -séparé. Soient  $z_1, z_2 \in Q_{i+1}$ ,  $f(z_1)$  et  $f(z_2)$  sont alors dans  $Q_i$ . Si  $f(z_1) = f(z_2)$  alors  $z_1, z_2 \in Q(z)$  donc  $\rho(z_1, z_2) \geq \delta$ . Si  $f(z_1) \neq f(z_2)$  alors  $d_i^f(f(z_1), f(z_2)) \geq \delta$  donc  $d_{i+1}^f(z_1, z_2) \geq \delta$ . Pour  $i = n$ , on obtient donc :

L'ensemble  $E_{n, \delta} := Q_n$  est  $(n, \delta)$ -séparé.

*Estimation du cardinal de  $E_{n, \delta}$  :  $\#E_{n, \delta} \geq d^{\alpha n}$  (Voir figure 1.2).*

Définissons le graphe orienté  $T = (S, F)$  par :

- l'ensemble de ses sommets  $S := \bigcup_{0 \leq i \leq n} Q_i = \bigcup \{f^i(x), i \in [0, n], x \in Q_n\}$ ,
- l'ensemble de ses flèches  $F := \{(f^i(x), f^{i-1}(x)), i \in [1, n], x \in Q_n\}$ . On dit que la flèche  $(f^i(x), f^{i-1}(x))$  sort de  $f^i(x)$ .

Il est clair que  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$  donc  $T$  est un arbre. Nous appelons  $y$  sa racine. La valence (sortante) d'un sommet  $s$  d'un graphe orienté est le nombre de flèches qui sort de  $s$ . Par construction de  $Q_i$ , tous les sommets de  $T$  sont de valence 0, 1 ou  $d$  selon que  $s \in Q_n$ ,  $s \notin B$  est une mauvaise transition ou  $s \in B$  est une bonne transition. Le cardinal de  $Q_n$  est donc le nombre d'extrémités de l'arbre. Pour l'estimer, contractons  $T$  en coupant les sommets qui représentent des mauvaises transitions (ceux de valence

1) et en fondant en une seule leurs flèches rentrante et sortante. On obtient de la sorte un arbre orienté  $T'$  possédant le même nombre d'extrémité mais dont tous les sommets sont  $d$ -valués. De plus, comme tout élément de  $Q_n$  appartient à  $X \setminus A$ , sa  $n$ -orbite possède au moins  $\alpha n$  bonnes transitions donc la distance d'une extrémité de l'arbre  $T'$  à sa racine est supérieure à  $\alpha n$ . On a donc :

$$\#Q_n = \#\{\text{extrémités de } T\} = \#\{\text{extrémités de } T'\} \geq d^{\alpha n}.$$

□

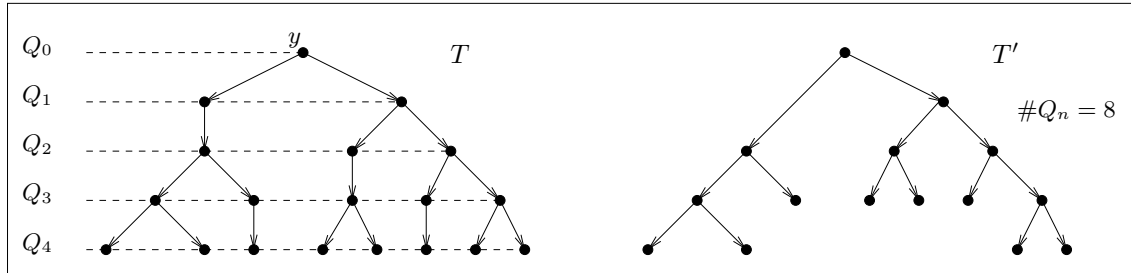


FIG. 1.2 – Contraction du graphe  $T$ .

Gromov a remarqué que la rigidité métrique des applications holomorphes sur les variétés kähleriennes force une majoration de leur entropie. Dans le cas de  $\mathbb{P}^m$ , il montre ([49]) :

**Théorème 1.5.6.** *Pour toute application holomorphe  $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  de degré  $d$ , on a :*

$$h_{top}(f) = \log d.$$

Preuve : En raison du théorème 1.5.5, il suffit de montrer l'inégalité  $h_{top}(f) \leq \log d$ . Nous noterons  $X$  la variété kählerienne  $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$  munie de sa forme kählerienne standard  $\omega$ . Définissons l'ensemble  $\Gamma^k \subset X^k$  :

$$\Gamma^k := \{(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)), x \in X\}.$$

Il s'agit d'une sous-variété holomorphe de  $X^k$  de dimension complexe  $m = \dim_{\mathbb{C}} X$ . Si  $B(x, \epsilon)$  désigne la boule de centre  $x$  et de rayon  $\epsilon$  dans  $K^k$  et  $B_{\epsilon}^m$  la boule de même rayon dans  $\mathbb{C}^m$ , le rapport

$$\frac{\text{Vol}_m(\Gamma_k \cap B(x, \epsilon))}{\text{Vol}_m(B_{\epsilon}^m)}, \quad x \in \Gamma_k$$

est une fonction décroissante de  $\epsilon$ , qui tend vers 1 (le nombre de Lelong de  $\Gamma_k$  au point  $x$ ) lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. On en déduit ainsi qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\text{Vol}_m(B_{\epsilon} \cap \Gamma^k) \geq C \epsilon^m \tag{1.8}$$

pour toute boule  $B_{\epsilon}$  de  $X^k$  de rayon  $\epsilon$  centrée en un point de  $\Gamma_k$ . Cette inégalité, et précisément l'indépendance de  $C$  vis-à-vis de  $k$  est le point fondamental sur lequel

repose l'argument : elle permet de relier l'entropie topologique à la croissance du volume  $m$ -dimensionnel de  $\Gamma^k$ .

Rappelons que l'entropie topologique est définie par

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log N_f(k, \epsilon),$$

où  $N_f(k, \epsilon)$  est le cardinal maximal d'un ensemble  $(k, \epsilon)$ -séparé pour la métrique kählerienne. De manière équivalente,  $N_f(k, \epsilon)$  représente le nombre maximal de  $\epsilon/2$ -boules disjointes de  $\Gamma^k$ . En vertu de (1.8), on a :

$$\text{Vol}_m(\Gamma^k) \gtrsim N_f(k, \epsilon) \epsilon^m,$$

donc

$$h_{top}(f) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \text{Vol}_m(\Gamma^k).$$

Il ne nous reste plus qu'à estimer la croissance du volume  $m$ -dimensionnel de  $\Gamma^k$ . On a :

$$\text{Vol}_m(\Gamma^k) = \text{Vol}_m(\{(x, f(x), \dots, f^k(x)), x \in X\}) = \int_X (\omega + f^*\omega + \dots + f^{k-1*}\omega)^m.$$

Pour  $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^m$  muni de sa structure kählerienne standard,  $f^{i*}\omega = d^{i/m}\omega$  (le degré topologique de  $f$  est  $d$ , *i.e.*  $f^*\omega^m = d\omega^m$ ). On obtient donc

$$\text{Vol}_m(\Gamma^k) = \left( \sum_{i=0}^{k-1} d^{i/m} \right)^m = \left( \frac{d^{k/m} - 1}{d^{1/m} - 1} \right)^m \sim d^k.$$

□

## 1.6 Méthodes de changement d'échelle.

Nous présentons ici des techniques de dilatation de coordonnées : la technique classique due à Pinchuk, ainsi qu'une légère modification de celle-ci dans le cas convexe. A titre d'illustration, nous exposons une preuve du théorème de Wong-Rosay, qui constitue un préliminaire logique au chapitre 4. Nous utilisons ensuite ces dilatations pour donner une preuve élémentaire de la proposition 1.2.8 concernant les boules CR et une estimation du diamètre de Kobayashi des  $F_{\epsilon, \tau}$  (voir définition 1.2.9).

Les applications des techniques de dilatations données dans cette partie nécessiteront l'emploi de la technique classique. Dans le chapitre 4 il sera plus agréable de raisonner avec sa modification.

### 1.6.1 Techniques de dilatations de coordonnées.

Pour  $z \in \mathbb{C}^k$ , nous poserons  $z = (z_1, z')$ ,  $z' \in \mathbb{C}^{k-1}$ . Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse et  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que

$b\Omega$  est strictement convexe autour de  $p$ , que  $p = 0$  et  $T_p b\Omega = \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}$ . Enfin, on peut imposer à  $\Omega$  d'être définie par la fonction  $\chi$  :

$$\chi(z) := -\operatorname{Re} z_1 + \|z\|^2 + a(z) \text{ où } a(z) \in \mathcal{O}(\|z\|^3).$$

Pour un point  $q \in b\Omega$  proche de  $p$ , l'opération de remise à l'échelle classique en  $q$  de paramètre  $\epsilon$ , notée  $\mathcal{R}'_{q,\epsilon}$ , consiste en une composition de deux biholomorphismes de  $\mathbb{C}^k$ ,  $\Psi_q$  et  $D_\epsilon$  :

$$\mathcal{R}'_{q,\epsilon} = D_\epsilon \circ \Psi_q.$$

- $\Psi_q$  est la composition d'une translation qui envoie  $q$  sur l'origine et d'une transformation unitaire de  $\mathbb{C}^k$  qui rend horizontal le plan tangent à  $b\Omega$  en  $q$  (i.e. défini par  $\operatorname{Re} z_1 = 0$ ). Dans ces coordonnées,  $\chi_q := \chi \circ \Psi_q^{-1}$  est de la forme :

$$\chi_q(z) = -\operatorname{Re} z_1 + Q_q(z) + a_q(z) \tag{1.9}$$

où  $Q_q$  est le hessien réel de  $\chi_q$  en 0. Il s'agit d'une forme quadratique réelle définie positive sur  $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^{2k}$  car  $b\Omega$  est strictement convexe. La fonction  $a_q(z)$  est majorée sur les compacts, indépendamment de  $q$  car  $b\Omega$  est  $\mathcal{C}^3$ . Remarquons que  $\Psi_p = Id$ ,  $Q_p = \|\cdot\|$  et que les applications  $q \mapsto \Psi_q$  et  $q \mapsto Q_q$  sont continues en raison du caractère lisse de  $b\Omega$ .

- $D_\epsilon$  est la dilatation anisotrope  $\mathbb{C}$ -linéaire

$$D_\epsilon : (z_1, z') \mapsto \left( \frac{z_1}{\epsilon}, \frac{z'}{\sqrt{\epsilon}} \right).$$

Il s'agit d'un changement d'échelle naturel associé à la stricte pseudoconvexité. Un calcul simple montre que la fonction définissante  $\chi_{q,\epsilon}$  de  $D_\epsilon \circ \Psi_q(b\Omega)$  définie par  $\chi_{q,\epsilon} := \frac{1}{\epsilon} \chi_q \circ D_\epsilon^{-1}$  s'écrit :

$$\chi_{q,\epsilon}(z_1, z') = -\operatorname{Re} z_1 + Q_q((0, z')) + O(\sqrt{\epsilon}).$$

Nous verrons que  $\mathcal{R}'_{q,\epsilon}(\Omega) = D_\epsilon \circ \Psi_q(\Omega)$  converge vers  $\Sigma := \{\operatorname{Re} z_1 > \|z'\|^2\}$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k$  quand  $(q, \epsilon) \rightarrow (p, 0)$ .

Lorsque  $\Omega$  est un domaine strictement convexe de  $\mathbb{C}^k$ , on peut compactifier la remise à l'échelle  $\mathcal{R}'_{q,\epsilon}$  en la composant par une transformation birationnelle  $\Phi$  de  $\mathbb{C}^k$  :

$$\mathcal{R}_{q,\epsilon} = \Phi \circ D_\epsilon \circ \Psi_q.$$

- $\Phi$  est la transformation de Cayley

$$\Phi : (z_1, z) \mapsto \left( \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}, \frac{2z'}{z_1 + 1} \right)$$

qui transforme  $\Sigma := \{\operatorname{Re} z_1 \geq \|z'\|^2\}$  en  $B := \{|z_1|^2 + \|z'\|^2 \leq 1\}$ . Remarquons que  $D_\epsilon \circ \Psi_q(\Omega)$  est inclus dans le demi-espace  $\{\operatorname{Re} z_1 > 0\}$  en raison de la convexité de  $\Omega$ . La transformation  $\mathcal{R}_{q,\epsilon} = \Phi \circ D_\epsilon \circ \Psi_q$  est par conséquent bien définie sur  $\Omega$ . Nous verrons que  $\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega)$  tend vers  $B$  au sens  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{C}^k \setminus \{(1, 0)\}$ .

### 1.6.2 Propriétés des remises à l'échelle.

Le but de ce paragraphe est d'établir les affirmations précédentes concernant les convergences des remises à l'échelle. Nous dirons qu'une suite de domaines  $D_n$  converge vers un domaine  $D$  au sens  $\mathcal{C}^2$  sur un compact  $K$  si  $K \cap \overline{D_n}$  tend vers  $K \cap \overline{D}$  au sens de la topologie de Hausdorff et si les fonctions définissantes  $\chi_{i,n}$  de  $D_n$  sur les ouverts  $U_i$  d'un recouvrement de  $D$  convergent en norme  $\mathcal{C}^2$  vers des fonctions définissantes  $\chi_i$  de  $D \cap U_i$ .

**Proposition 1.6.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse et  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Les domaines  $\mathcal{R}'_{q,\epsilon}(\Omega)$  convergent vers  $\Sigma$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k$  quand  $(q, \epsilon)$  tend vers  $(p, 0)$ .*

Preuve : Il s'agit de prouver que  $\chi_{q,\epsilon}$  tend vers  $-\operatorname{Re} z_1 + \|z'\|^2$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k$ . Un calcul simple montre que :

$$\begin{aligned} \chi_{q,\epsilon}(z_1, z') &= -\operatorname{Re} z_1 + \frac{1}{\epsilon} Q_q(\epsilon z_1, \sqrt{\epsilon} z') + \frac{1}{\epsilon} a_q(\epsilon z_1, \sqrt{\epsilon} z') \\ &= -\operatorname{Re} z_1 + Q_q(\sqrt{\epsilon} z_1, z') + \frac{1}{\epsilon} a_q(\epsilon z_1, \sqrt{\epsilon} z') \end{aligned}$$

Rappelons que la forme quadratique  $Q_q$  est le hessien réel de  $\chi$  en  $q$  donc converge au sens  $\mathcal{C}^\infty$  vers  $Q_0(z) = \|z\|^2$  quand  $q$  tend vers 0. Le terme  $z \mapsto Q_q(\sqrt{\epsilon} z_1, z')$  converge donc vers  $\|z'\|^2$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$ . Prouvons finalement que  $\epsilon^{-1} a_q \circ D_\epsilon^{-1} = \epsilon^{-1} a_q(\epsilon z_1, \sqrt{\epsilon} z')$  converge vers 0 au sens  $\mathcal{C}^\infty$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k$ . Fixons pour cela un compact  $K \subset \mathbb{C}^k$  et un réel  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $D_{\epsilon_0}^{-1}(K)$  est inclus dans un petit voisinage de 0 sur lequel  $a_q$  est lisse. Pour  $\epsilon < \epsilon_0$ , on a :

- $\epsilon^{-1} a_q \circ D_\epsilon^{-1} \in O(\epsilon^2)$  sur  $K$  car  $a_q \in O(\|z\|^3)$ ,
- $\epsilon^{-1} [\vec{\nabla} a_q \circ D_\epsilon^{-1}] = \epsilon^{-1} {}^t D_\epsilon^{-1} \cdot [\vec{\nabla} a_q] \circ D_\epsilon^{-1} \in O(\sqrt{\epsilon})$  sur  $K$  car  $\vec{\nabla} a_q \in O(\|z\|^2)$ ,
- De même,  $\epsilon^{-1} [\operatorname{Hess} a_q \circ D_\epsilon^{-1}] = \epsilon^{-1} {}^t D_\epsilon^{-1} \cdot [\operatorname{Hess} a_q] \circ D_\epsilon^{-1} \cdot D_\epsilon^{-1} \in O(\epsilon)$  sur  $K$ ,
- Les dérivées troisièmes ou supérieures de  $\epsilon^{-1} a_q \circ D_\epsilon^{-1}$  sont quand à elles majorées sur  $K$  par  $\sqrt{\epsilon} \|a_q\|_{\mathcal{C}^\infty}$  où  $\|a_q\|_{\mathcal{C}^\infty}$  est la norme  $\mathcal{C}^\infty$  de  $a_q$  sur  $D_{\epsilon_0}^{-1}(K)$ .  $\square$

Le lemme suivant assure qu'un domaine strictement convexe  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  est inclus dans toutes les paraboles tangentes à  $b\Omega$  de courbure assez petite.

**Lemme 1.6.2.** *Si  $\Omega$  un domaine strictement convexe borné de  $\mathbb{C}^k$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\Psi_q(\Omega) \subset \{\operatorname{Re} z_1 > c\|z\|^2\}$  pour tout  $q \in b\Omega$ .*

Preuve : Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de réels  $c_n$  qui tend vers 0 et des points distincts  $p_n, p'_n \in b\Omega$  tels que  $p'_n \in \mathcal{P}_n := \Psi_{p_n}^{-1}(\{\operatorname{Re} z_1 > c_n \|z\|^2\})$  ( $\mathcal{P}_n$  est une parabole tangente à  $b\Omega$  en  $p_n$ ). Comme  $b\Omega$  est compact, on peut supposer que  $p_n$  et  $p'_n$  convergent vers deux points  $p, p' \in b\Omega$ . Nous allons montrer que  $p \neq p'$ . Ceci contredira la stricte convexité de  $\Omega$  puisqu'alors  $p \neq p' \in T_p b\Omega \cap b\Omega$  (la suite de paraboles  $\mathcal{P}_n$  converge sur les compacts vers  $T_p b\Omega$  car  $c_n$  tend vers 0 et  $p_n$  tend vers  $p$ ).

On peut évidemment supposer que  $p = 0$ . Rappelons que (1.9) donne l'expression d'une fonction définissante de  $\Psi_q(S)$  pour  $q \in S$ . Pour  $q$  suffisamment proche de

l'origine, on peut supposer que  $Q_q(z) \geq 1/2\|z\|^2$ . Il existe donc un voisinage  $B$  de l'origine dans  $\mathbb{C}^k$  tel que

$$\Psi_q(\Omega \cap B) \subset \{\operatorname{Re} z_1 > \frac{\|z\|^2}{3}\}.$$

Comme  $c_n$  tend vers 0, le point  $p'_n$  est hors de  $B$  donc  $p' \neq p$ .  $\square$

**Proposition 1.6.3.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  un domaine strictement convexe borné et  $p \in b\Omega$ . Alors les domaines  $\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega)$  convergent vers  $B$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k \setminus \{(1,0)\}$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  lorsque  $(q, \epsilon)$  tend vers  $(p, 0)$ .*

Preuve : Les domaines  $\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega)$  sont de la forme

$$\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega) = \Phi \circ D_\epsilon \circ \Psi_q(\Omega')$$

La proposition 1.6.1 assure que la suite de domaines  $D_\epsilon \circ \Psi_q(\Omega)$  tend vers  $\Sigma$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k$ . Comme  $\Phi$  est une application projective qui envoie l'hyperplan à l'infini dans  $\mathbb{C}^k$  sur  $\{z_1 = 1\}$ ,  $\mathcal{R}_{q,\epsilon}$  tend vers  $B$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k \setminus \{z_1 = 1\}$ . Il suffit donc de vérifier qu'il existe une fonction  $r(\delta)$  tendant vers 0 avec  $\delta > 0$  telle que :

$$\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega) \cap \{|z_1 - 1| < \delta\} \subset B[(1,0), r(\delta)] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or ceci résulte du lemme 1.6.2. En effet, d'après ce lemme, il existe  $c > 0$  tel que  $\Psi_q(\Omega) \subset \{\operatorname{Re} z_1 > c\|z'\|^2\}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En outre, on vérifie aisément que  $\Phi \circ D_\epsilon(\{\operatorname{Re} z_1 > c\|z'\|^2\}) = E_c := \{|z_1|^2 + c\|z'\|^2 < 1\}$ . L'inclusion attendue résulte alors immédiatement de

$$\mathcal{R}_{q,\epsilon}(\Omega) \cap \{|z_1 - 1| < \delta\} \subset E_c \cap \{|z_1 - 1| < \delta\}.$$

$\square$

### 1.6.3 Applications.

#### Théorème de Wong-Rosay

**Théorème 1.6.4.** *Soit  $\Omega$  un domaine à bord lisse de  $\mathbb{C}^k$ . Supposons qu'il existe un point  $y_0 \in \Omega$  et une suite d'automorphismes  $\varphi_n$  de  $\Omega$  telle que  $\varphi_n(y_0)$  tend vers  $y \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Alors  $\Omega$  est biholomorphiquement équivalent à la boule euclidienne.*

Nous présentons la preuve dans le cas où  $\Omega$  est borné afin de concentrer notre attention sur la méthode de dilatation. On pourra consulter [18] pour le cas général. Preuve : Supposons  $\Omega$  borné et strictement convexe sur un voisinage de  $y$ . On renormalise la suite  $\varphi_n$  en la post-composant par des remises à l'échelle associées à  $y_n := \varphi_n(y_0)$ . Précisément, posons  $q_n := \pi(y_n)$  la projection orthogonale de  $y_n$  sur  $b\Omega$  et  $\epsilon_n := \operatorname{dist}(y_n, q_n)$ . On considère la suite  $f_n := \mathcal{R}'_{q_n, \epsilon_n} \circ \varphi_n : \Omega \rightarrow \mathcal{R}'_{q_n, \epsilon_n}(\Omega)$ . On vérifie que les suites  $(f_n)$  et  $(f_n^{-1})$  sont normales [18]. Elles peuvent donc être supposées convergente. Notons  $f$  la limite de  $f_n$  et  $g$  celle de  $f_n^{-1}$ . La remarque cruciale est que ce procédé de renormalisation produit une limite  $f$  à valeurs dans  $\Sigma$  et non

dans  $\bar{\Sigma}$ . En effet, par stricte pseudoconvexité,  $f$  est à valeurs dans  $\Sigma$  ou dans  $b\Sigma$ . Or  $f(y_0) = (1, 0) \in \Sigma$  par construction donc  $f(\Omega) \subset \Sigma$ . La situation est donc la suivante :

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f, & f \in \text{Hol}(\Omega, \Sigma) \\ f_n^{-1} \longrightarrow g, & g \in \text{Hol}(\Sigma, \bar{\Omega}) \end{cases}$$

Ceci suffit pour que  $f$  soit un biholomorphisme de  $\Omega$  dans  $\Sigma$ . En effet, comme  $f(\Omega) \subset \Sigma$ , on déduit de  $f_n^{-1} \circ f_n = Id$  et de  $(\text{Jac } f_n^{-1}) \circ f_n \cdot \text{Jac } f_n = 1$  que  $g \circ f = Id$  et que  $\text{Jac } g \circ f \cdot \text{Jac } f = 1$ . Ainsi  $f$  est ouverte puisque  $\text{Jac } f \neq 0$  et  $g$  l'est également (appliquer le lemme d'Hurwitz à  $\text{Jac } f_n^{-1}$ ). On a donc  $g(\Sigma) \subset \Omega$  et on déduit de  $f_n \circ f_n^{-1} = Id$  que  $f \circ g = Id$ .  $\square$

**Allure des boules CR : preuve de la proposition 1.2.8.** Rappelons les notations utilisées dans cette proposition. Ayant fixé des coordonnées dans lesquelles  $b\Omega$  est strictement convexe sur un voisinage  $O$  d'un point  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ ,  $\pi$  est la projection orthogonale de  $\Omega \cap O$  sur  $b\Omega$  et

$$\begin{aligned} p_\epsilon &:= p + \epsilon \vec{N}(p) \\ F_{\epsilon, \tau} &:= p_\epsilon + B^{t, \mathbb{C}}(p, \tau \sqrt{\epsilon}) \times B^{t, \mathbb{R}}(p, \tau \epsilon) \\ U_{\epsilon, \tau} &:= \pi(F_{\epsilon, \tau}). \end{aligned}$$

Quitte à effectuer une transformation unitaire et une translation, qui ne modifient pas la situation, le domaine  $\Omega$  est défini par :

$$\Omega \cap O = \{z = (z_1, z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k-1} \text{ t.q. } \text{Re } z_1 = a(\text{Im } z_1, z')\}$$

où  $a$  est une fonction strictement convexe. Si  $z_1 = u + iv$ , on a  $p = (0, 0)$  et  $\vec{N}(p) = \partial/\partial u$ .

Dans ces coordonnées, la projection  $\pi'$  de  $O$  sur  $O \cap b\Omega$  parallèlement à  $\vec{N}(p)$  est donnée par :

$$\pi'(u + iv, z') = (a(v, z') + iv, z').$$

Pour  $U'_{\epsilon, \tau} := \pi'(F_{\epsilon, \tau})$  et  $\theta_\epsilon := \max\{(\vec{N}(p), \vec{N}(q)), q \in U_{\epsilon, \tau}\}$ , un calcul élémentaire montre que :

$$U'_{\epsilon, \tau} \subset U_{\epsilon, \tau} \subset U'_{\epsilon, (1+\sin \theta_\epsilon)\tau}.$$

Il suffit donc de prouver l'existence de fonctions  $\tau'_1(\tau)$  et  $\tau'_2(\tau)$  tendant vers 0 avec  $\tau$  telles que

$$U'_{\epsilon, \tau'_1(\tau)} \subset B^{\text{CR}}(p, \tau) \subset U'_{\epsilon, \tau'_2(\tau)}$$

La remise à l'échelle  $\mathcal{R}'_{p, \epsilon}$  transforme  $\Omega$  en  $\Omega_\epsilon := \mathcal{R}'_{p, \epsilon}(\Omega)$ ,  $p_\epsilon$  en  $(0, 0)$ ,  $F_{\epsilon, \tau}$  en  $F_{1, \tau}$  et  $U'_{\epsilon, \tau}$  en  $U'_{1, \tau} = \pi'(F_{1, \tau})$ , où  $\pi'$  désigne encore la projection sur  $b\Omega_\epsilon$  parallèlement à  $\vec{N}(p) = \partial/\partial u$ . Nous allons montrer que pour  $\tau \leq \tau_0 < 1$  et  $\epsilon \ll 1$ ,

$$U'_{1, \tau'_1(\tau)} \underset{(1)}{\subset} \mathcal{R}'_{p, \epsilon}(B^{\text{CR}}_{b\Omega}(p, \tau \sqrt{\epsilon})) \underset{(2)}{\subset} U'_{1, \tau'_2(\tau)}$$

où  $\tau'_1$  et  $\tau'_2$  tendent vers 0 avec  $\tau$ .

• Comme  $\mathcal{R}'_{p, \epsilon} : b\Omega \rightarrow b\Omega_\epsilon$  est une application CR dont toutes les dérivées directionnelles sont supérieures à  $1/\sqrt{\epsilon}$ , la proposition 1.2.5 montre que  $\mathcal{R}'_{p, \epsilon}(B^{\text{CR}}_{b\Omega}(p, \tau \sqrt{\epsilon})) \supset$

$B_{b\Omega_\epsilon}^{\text{CR}}(p, \tau)$ . Ceci établit l'inclusion (1) puisque  $b\Omega_\epsilon$  converge vers  $b\Sigma$  au sens  $\mathcal{C}^\infty$  (proposition 1.6.1).

• Établissons l'inclusion (2). Pour cela, considérons un chemin complexe de  $B^{\text{CR}}(p, \tau)$  joignant  $p$  à un point  $z$ . On peut supposer que  $\gamma$  est  $\mathcal{C}^1$ , paramétré par la longueur d'arc et de longueur inférieure à  $\tau\sqrt{\epsilon}$ . Posons

$$\dot{\gamma}(t) = a(t)\vec{N}(p) + b(t)u \text{ où } u \in T_p^{\mathbb{C}}b\Omega, \|u\| = 1, a(t) \in \mathbb{C}, b(t) \in \mathbb{R}.$$

Comme  $B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \subset B(p, \tau\sqrt{\epsilon})$ , le caractère lisse de la distribution  $T^{\mathbb{C}}b\Omega$  implique l'existence d'une constante  $k > 0$  telle que  $|a(t)| \leq k\tau\sqrt{\epsilon}$ . Comme  $|b(t)| \leq 1$  par ailleurs, on a :

$$\|\overline{\mathcal{R}'_{p,\epsilon} \circ \gamma}(t)\| = \|\mathcal{R}'_{p,\epsilon} \dot{\gamma}(t)\| = \left\| \frac{a(t)}{\epsilon} \vec{N}(p) + \frac{b(t)}{\sqrt{\epsilon}} u \right\| \leq \frac{k\tau + 1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Ainsi,  $\ell(\mathcal{R}'_{p,\epsilon} \circ \gamma) \leq \tau\sqrt{k\tau + 1}$  donc  $\mathcal{R}'_{p,\epsilon}(z) \in U_{1,\tau'_2(\tau)}$  avec  $\tau'_2(\tau) = \tau\sqrt{k\tau + 1}$ .  $\square$

**Quelques estimations de métriques de Kobayashi.** Nous utiliserons les estimations usuelles suivantes :

**Lemme 1.6.5.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné à bord lisse de  $\mathbb{C}^k$  et  $p$  un point de stricte pseudoconvexité de  $b\Omega$ . On reprend les coordonnées et les notations introduites dans la partie 1.2.2.*

*Il existe  $\tau_0, \epsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\tau < \tau_0$  et  $\epsilon < \epsilon_0$  :*

- i) pour  $z \in F_{\epsilon,\tau}$ , la boule  $B(z, r_z)$  de centre  $z$  et de rayon  $r_z := \|z - \pi(z)\|$  est incluse dans  $\Omega$ ,*
- ii)  $\text{Diam}_{K_\Omega}(F_{\epsilon,\tau}) \leq \psi_1(\tau)$  où  $\psi_1(\tau)$  tend vers 0 avec  $\tau$ ,*
- iii) pour  $z \in F_{\epsilon,\tau}$ ,  $\text{Diam}_{K_\Omega}(B_{r_z,\alpha}(\pi(z))) \leq \psi_2(\alpha)$  où  $\psi_2(\alpha)$  tend vers 0 avec  $\alpha$ .*

Preuve :

- i) C'est évident car le bord de  $\Omega$  est lisse.
- ii) La remise à l'échelle  $\mathcal{R}'_{p,\epsilon}$  transforme  $F_{\epsilon,\tau}$  en  $F_{1,\tau} = \{(w, z) \in \mathbb{C}^k, \text{Re } w = 0, |\text{Im } w| \leq \tau, |z| \leq \tau\}$  et  $\Omega$  en  $\Omega_\epsilon \approx \Sigma$ . Comme  $B_{1/2} := B(0, 1/2) \Subset \Sigma$ , il s'ensuit que  $B_{1/2} \subset \Omega_\epsilon$  pour  $\epsilon \leq \epsilon_1$  lorsque  $\epsilon_1$  est suffisamment petit. Puis  $F_{1,\tau} \subset B_{1/2}$  pour  $\tau \leq \tau_2$  où  $\tau_2$  est assez petit. Ainsi, pour  $\tau < \tau_2$  et  $\epsilon < \epsilon_1$ , on a

$$\text{Diam}_{K_\Omega}(F_{\epsilon,\tau}) = \text{Diam}_{K_{\Omega_\epsilon}}(F_{1,\tau}) \leq \text{Diam}_{K_{B(0,1/2)}}(F_{1,\tau})$$

et il suffit de prendre  $\psi_1(\tau) := \text{Diam}_{K_{B(0,1/2)}}(F_{1,\tau})$ .

- iii) D'après i),  $B(z, r_z)$  est inclu dans  $\Omega$  pour  $\epsilon \leq \epsilon_1$ . Donc

$$\text{Diam}_{K_\Omega}(B_{r_z,\alpha}(\pi(z))) \leq \text{Diam}_{K_{B(z,r_z)}}(B_{r_z,\alpha}(\pi(z))) \leq \text{Diam}_{K_{B(0,1)}}(B(0, \alpha))$$

et il suffit de prendre  $\psi_2(\alpha) := \text{Diam}_{K_B}(B_\alpha)$ .

$\square$

# Chapitre 2

## Expansivité au bord des applications holomorphes propres.

L'objet de ce chapitre est d'établir des propriétés de dilatations pour les applications CR. Les propriétés de la distance CR que nous avons détaillées dans la partie 1.4.1 ramènent ce problème à une minoration des dérivées tangentielles complexes de ces applications. Sur le lieu de stricte pseudoconvexité, ces minoration découlent d'estimations similaires sur les dérivées normales. La minoration des dérivées normales d'une application CR s'obtiennent quant à elles grâce au lemme de Hopf. Décrivons précisément cette procédure.

### 2.1 Contrôle des dérivées tangentielles complexes par les dérivées normales.

La proposition suivante fournit un contrôle des dérivées tangentielles complexes d'une application CR  $F$  au moyen de ses dérivées normales, et plus précisément par

$$n_p(F) := \langle F'(p)i\vec{N}(p), i\vec{N}(F(p)) \rangle.$$

Lorsque  $F$  est la trace au bord d'une application holomorphe propre, cette quantité coïncide avec  $\langle F'(p)\vec{N}(p), \vec{N}(F(p)) \rangle$  et représente donc un "taux d'échappement de  $F$  dans la direction normale". Elle ne concerne que le comportement de  $F$  à l'intérieur du domaine.

**Proposition 2.1.1.** *Soient  $S, S'$  deux hypersurfaces réelles de  $\mathbb{C}^k$ . On note  $\kappa_+, \kappa_-$ ,  $\kappa'_+$  et  $\kappa'_-$  les valeurs propres maximales et minimales des formes de Lévi de  $S$  et  $S'$ . Pour toute application CR  $F$  entre  $S$  et  $S'$  on a :*

$$\left[ \frac{\kappa_-}{\kappa'_+} n_p(F) \right]^{\frac{1}{2}} \|u\| \leq \|F'(p)u\| \leq \left[ \frac{\kappa_+}{\kappa'_-} n_p(F) \right]^{\frac{1}{2}} \|u\| \quad \forall p \in S, \forall u \in T_p^{\mathbb{C}} S.$$

Preuve : Cette proposition est basée sur la functorialité de la forme de Lévi :

$$\mathcal{L}(F(p), F'(p)u) = n_p(F)\mathcal{L}(p, u) \quad \forall p \in S, \forall u \in T_p^{\mathbb{C}} S. \quad (2.1)$$

Pour voir cette égalité, on considère la définition de la forme de Lévi donnée par le lemme 1.2.4 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F(p), F'(p)u) &= \langle [F'(p)u, \overline{F'(p)u}], i\vec{N}(F(p)) \rangle = \langle F'(p)[u, \bar{u}], i\vec{N}(F(p)) \rangle \\ &= \langle [u, \bar{u}], {}^tF'(p)i\vec{N}(F(p)) \rangle = \langle [u, \bar{u}], n_p(F)i\vec{N}(p) \rangle = n_p(F)\mathcal{L}(p, u), \end{aligned}$$

l'égalité  ${}^tF'(p)i\vec{N}(F(p)) = n_p(F)i\vec{N}(p)$  provenant du fait que  $F'(p)$  transporte  $T_p^{\mathbb{C}}S = [i\vec{N}(p)]^{\perp}$  sur  $T_{F(p)}^{\mathbb{C}}S' = [i\vec{N}(F(p))]^{\perp}$ .

Comme la forme de Lévi est hermitienne, la définition des  $\kappa, \kappa'$  donne alors :

$$\begin{cases} \kappa_- \|u\|^2 \leq \mathcal{L}(p, u) \leq \kappa_+ \|u\|^2 \\ \kappa'_- \|F'(p)u\|^2 \leq \mathcal{L}(F(p), F'(p)u) \leq \kappa'_+ \|F'(p)u\|^2 \end{cases} \quad \forall u \in T_p^{\mathbb{C}}S.$$

La conclusion est immédiate.  $\square$

## 2.2 Dérivées normales.

Le lemme de Hopf classique assure que le gradient d'une fonction d'exhaustion bornée *p.s.h* qui est lisse jusqu'au bord est non nul, et dirigé selon la normale sortante. Les minoration des dérivées normales des applications holomorphes propres sont gouvernées par une version quantifiée du lemme de Hopf :

**Lemme 2.2.1 (Hopf).** *Soit  $D$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  et  $\chi \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$  une fonction *p.s.h* négative sur  $D$  et nulle en  $q \in bD$ . Soit  $\epsilon$  tel que  $B_{\epsilon}(q) \subset D$  et  $M := \min\{|\chi(z)|, z \in B_{\epsilon, \alpha}(q)\}$ . Alors  $\chi(q_t) \leq -\frac{M\alpha t}{4\pi\epsilon}$  pour  $t \leq \epsilon$  et donc  $\|\vec{\nabla}\chi(q)\| \geq \frac{M\alpha}{4\pi\epsilon}$ .*

Preuve : Soit  $\mathbb{D}_{\epsilon}$  le paramétrage unitaire du disque complexe de centre  $q_{\epsilon}$  passant par  $q$ , qui envoie  $q_{\epsilon}$  sur 0 et  $q$  sur  $-\epsilon$ . Dans ce paramétrage,  $B_{\epsilon, \alpha}(q) \cap \mathbb{D}_{\epsilon}$  correspond à  $\mathbb{D}_{\epsilon} \cap \{\operatorname{Re} z > \epsilon \cos \alpha\}$ . La restriction  $\tilde{\chi}$  de  $\chi$  à  $\mathbb{D}_{\epsilon}$  est une fonction sous-harmonique négative sur  $\mathbb{D}_{\epsilon}$  vérifiant  $\chi(q_t) = \tilde{\chi}(-\epsilon + t)$ ,  $\tilde{\chi}(\epsilon e^{i\theta}) \leq -M$  pour  $\theta \in [-\alpha, \alpha]$  et  $\chi(-\epsilon) = 0$ . Un calcul facile sur le noyau de Poisson donne donc :

$$\begin{aligned} \chi(q_t) = \tilde{\chi}(-\epsilon + t) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\epsilon^2 - (\epsilon - t)^2}{|-\epsilon + t - \epsilon e^{i\theta}|^2} \tilde{\chi}(\epsilon e^{i\theta}) d\theta \\ &\leq -\frac{M}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\epsilon^2 - (\epsilon - t)^2}{|-\epsilon + t - \epsilon e^{i\theta}|^2} d\theta \leq -\frac{M\alpha t(2\epsilon - t)}{\pi 4\epsilon^2} \leq -\frac{M\alpha t}{4\pi\epsilon}. \end{aligned}$$

$\square$

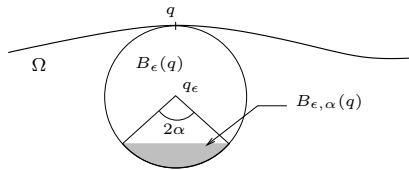


FIG. 2.1 – Notations dans le lemme de Hopf.

Ainsi, une application holomorphe propre entre des domaines  $\Omega$  et  $\Omega'$  possèdera des dérivées normales en  $p$  d'autant plus grandes qu'elle éloigne  $p$  de  $B_{\epsilon, \alpha}(p)$ , cet éloignement étant quantifié par une fonction *p.s.h* négative sur  $\Omega'$ . Précisément :

**Proposition 2.2.2.** Soient  $\Omega, \Omega'$  des domaines à bords lisses de  $\mathbb{C}^k$ . On suppose que  $\Omega'$  possède une fonction p.s.h négative lisse sur  $\overline{\Omega'}$ . Soit  $p \in b\Omega$ . Pour toute application holomorphe  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  lisse sur  $\overline{\Omega}$  qui vérifie  $\chi(F(p)) = 0$  et  $\chi \leq -M$  sur  $F(B_{\epsilon, \alpha}(p))$ , on a :

$$n_p(F) \geq \frac{M\alpha}{4\pi\epsilon\|\vec{\nabla}\chi(F(p))\|}.$$

Preuve : Le lemme de Hopf appliqué à  $\chi \circ F$  garantit que

$$\|\vec{\nabla}\chi \circ F(p)\| \geq \frac{M\alpha}{4\pi\epsilon}.$$

Comme  $\chi$  est négative sur  $\Omega'$  et nulle en  $F(p)$ ,  $\vec{\nabla}\chi(F(p))$  est non nul et dirigé par  $\vec{N}(F(p))$ . On a aussi  $\vec{\nabla}\chi \circ F(p) \in \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\vec{N}(p))$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} n_p(F) &= \langle F'(p)\vec{N}(p), \vec{N}(F(p)) \rangle = -\|\vec{\nabla}\chi(F(p))\|^{-1} \langle F'(p)\vec{N}(p), \vec{\nabla}\chi(F(p)) \rangle \\ &= -\|\vec{\nabla}\chi(F(p))\|^{-1} \langle \vec{\nabla}\chi \circ F(p), \vec{N}(p) \rangle = \|\vec{\nabla}\chi(F(p))\|^{-1} \|\vec{\nabla}\chi \circ F(p)\| \\ &\geq \frac{M\alpha}{4\pi\epsilon\|\vec{\nabla}\chi(F(p))\|}. \end{aligned}$$

□

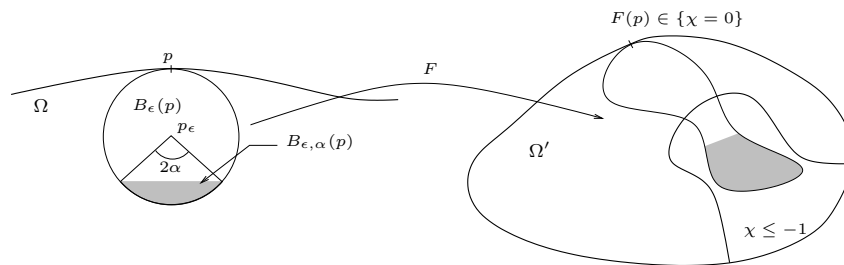


FIG. 2.2 – Situation typique d'application du lemme de Hopf.

## 2.3 Applications CR vs. dilatations CR.

En combinant le lemme de Hopf avec la proposition 2.1.1 dans différentes situations, on obtient des variantes du principe général suivant :

"Une famille d'applications CR radialement non-équicontinue dilate la distance CR."

Nous décrivons à présent trois situations pour lesquelles ce principe se concrétise et mène à des dilatations effectives des ouverts de stricte pseudoconvexité par les applications holomorphes propres.

**Domaines globalement définis par une fonction  $p.s.h.$**  Nous étudierons les dynamiques récurrentes sous une hypothèse d'existence de fonction  $p.s.h.$  définissante globale.

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  un domaine possédant une fonction  $p.s.h.$  lisse et définissante globale  $\chi$ . Soit  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Il existe des constantes  $c, \tau, \epsilon_0 > 0$  telles que pour toute auto-application holomorphe propre  $F$  de  $\Omega$  lisse sur  $\overline{\Omega}$  vérifiant  $F(p_\epsilon) \in \{\chi \leq -1\}$ , on a :*

$$\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \|u\| \quad \forall q \in B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon}), \quad \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$$

et

$$F(B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon})) \supset B^{CR}(F(p), c\tau) \quad \forall \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Preuve : Soit  $F$  une telle application. On peut supposer  $b\Omega$  convexe en  $p$  et utiliser les notations introduites dans la définition 1.2.9 (voir la figure 2.3). Soient  $\epsilon_0, \tau_0, \psi_1, \psi_2$  donnés par le lemme 1.6.5,  $\epsilon \leq \epsilon_0$  et  $\delta > 0$  tel que

$$\chi(z) \leq -1 \text{ et } d_K(x, z) \leq \delta \implies \chi(x) \leq -1/2.$$

Soient  $0 < \tau_2 \leq \tau_0$  et  $\alpha > 0$  tels que  $\psi_1(\tau_2) + \psi_2(\alpha) < \delta$ . Fixons  $z \in F_{\epsilon, \tau_2}$  et notons  $q := \pi(z)$  la projection orthogonale de  $z$  sur  $b\Omega$  et  $r_z := \|z - q\|/2$ . D'après le lemme 1.6.5, la distance de Kobayashi entre  $p_\epsilon$  et tout point de  $B_{r_z, \alpha}(q)$  est inférieure à  $\delta$ . Puisque  $F$  contracte cette distance,  $d_K(F(p_\epsilon), z') < \delta$  pour tout  $z' \in F(B_{r_z, \alpha}(q))$ , donc  $\chi \circ F \leq -1/2$  sur  $B_{r_z, \alpha}(q)$ .

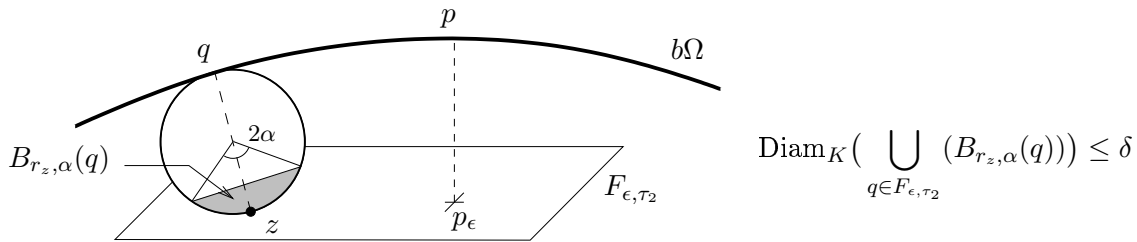


FIG. 2.3 – Notations pour la preuve de la proposition 2.3.1.

Toujours d'après le lemme 1.6.5,  $B(z, r_z) \subset \Omega$ . On peut donc appliquer la proposition 2.2.2 à  $F$  au point  $q$ , on obtient :

$$n_q(F) \geq \frac{\alpha}{4\pi r_z \|\vec{\nabla} \chi(q)\|} \geq \frac{\alpha}{2\pi \epsilon \|\vec{\nabla} \chi\|_\infty} =: \frac{k}{\epsilon}$$

(on remarque que  $r_z \leq \epsilon/2$  par convexité). Si  $\kappa_-$  désigne le minimum des valeurs propres de la forme de Lévi sur un voisinage de  $p$  dans  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $\kappa_+ := \max_{b\Omega} \|\mathcal{L}(x, \cdot)\|$ , la proposition 2.1.1 montre qu'on a :

$$\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \|u\| \quad \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$$

avec  $c := (k\kappa_- \kappa_+^{-1})^{-\frac{1}{2}}$ . Cette estimation est valable sur  $\pi(F_{\epsilon, \tau_2}) = U_{\epsilon, \tau_2}$  donc sur  $B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \subset U_{\epsilon, \tau_2}$  (proposition 1.2.8). On conclut grâce à la proposition 1.2.5 car  $F$  est un difféomorphisme local sur  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

**Domaines LB-réguliers.** Pour étudier la dynamique non-récurrente sur les domaines LB-réguliers, les fonctions *p.s.h* que nous construisons sont seulement lipschitziennes. Nous utiliserons alors la proposition suivante. Introduisons pour l'énoncer une notation. Pour  $p \in b\Omega$ , on pose :

$$A_\epsilon(p, \tau) := \bigcup_{q \in B^{CR}(p, \tau)} B_{\epsilon, \frac{\pi}{2}}(q).$$

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe à bord lisse de  $\mathbb{C}^k$  et  $\chi \in PSH^-(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . On suppose que  $\chi$  est nulle et  $L$ -lipschitzienne en tout point d'un ouvert  $U \subset b\Omega$ . Considérons enfin une boule  $B^{CR}(p, \tau)$  relativement compacte dans  $SPC(b\Omega)$ . Il existe une constante  $c = c(\tau, L)$  pour laquelle toute auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  lisse sur  $\bar{\Omega}$  telle que  $F(p) \in U$  vérifie :*

$$F(A_\epsilon(p, \tau)) \subset \{\chi \leq -1\} \implies F(B^{CR}(p, \tau)) \supset B^{CR}(F(p), \frac{c}{\epsilon}).$$

Preuve : On peut prolonger  $\chi$  à un voisinage de  $b\Omega$  tout en la conservant  $L$ -Lipschitzienne en tout point de  $U$ . Le lemme de Hopf 2.2.1 appliqué à  $\chi \circ F$  dans  $\mathbb{D}(p_\epsilon, p)$  montre que :

$$\chi \circ F(p + t\vec{N}(p)) \leq -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon} t.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} F(p + t\vec{N}(p)) &= F(p) + tF'(p)\vec{N}(p) + O(t^2) \\ &= F(p) + tn_p(F)\vec{N}(F(p)) + t\vec{R} + O(t^2) \end{aligned}$$

où  $\vec{R}$  est la projection orthogonale de  $F'(p)\vec{N}(p)$  sur  $T_{F(p)}b\Omega$ . Il existe clairement un point  $q_t$  de  $b\Omega$  tel que  $F(p) + t\vec{R} = q_t + O(t^2)$ . Si  $t$  est suffisamment petit,  $\chi$  est  $L$ -lipschitzienne en  $q_t$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} t \leq |\chi \circ F(p + t\vec{N}(p))| &= |\chi(q_t + tn_p(F)\vec{N}(F(p)) + O(t^2))| \\ &\leq |\chi(q_t)| + Ltn_p(F) + O(t^2) = Ltn_p(F) + O(t^2). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $t$  vers 0, ceci nous donne

$$n_p(F) \geq \frac{\alpha}{4\pi L\epsilon}.$$

On conclut en utilisant les propositions 2.1.1 et 1.2.5 comme dans la preuve précédente.  $\square$

**Domaines convexes.** Dans l'étude métrique des hypersurfaces CR que nous mentionnons au chapitre 4, les fonctions *p.s.h* négatives naturelles sont les fonctions supports  $-\Lambda_x := -\langle \vec{N}(x), \cdot \rangle$ . Pour cet énoncé, rappelons qu'une application holomorphe  $F$  entre des domaines  $\Omega, \tilde{\Omega}$  est dite propre relativement à un ouvert  $U \subset b\Omega$  si  $F \in C^\infty(\Omega \cup U)$  et  $F(U) \subset b\tilde{\Omega}$ .

**Lemme 2.3.3.** Soient  $\Omega, \tilde{\Omega}$  des domaines de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses et  $U$  un ouvert relativement compact dans  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Soit  $W$  un ouvert de  $\mathcal{SPC}(b\tilde{\Omega})$  tel que  $\Lambda_x$  est positive sur  $\tilde{\Omega}$  pour tout  $x \in W$ . On note  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la forme de Levi sur  $U$  et  $W$ . Soit  $p \in U$  et  $\epsilon, \tau$  deux réels strictement positifs tels que  $B^{CR}(p, \tau) \Subset U$  et  $B_\epsilon(q) \subset \Omega$  pour tout  $q \in B^{CR}(p, \tau)$ .

Soit  $F : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$  une application holomorphe propre relativement à  $U$  telle que  $F(p) \in W$ . On définit

$$M := \min \{ |\Lambda_x(z)|, x \in W, z \in F(A_\epsilon(p, \tau)) \}.$$

Alors

$$F(B^{CR}(p, \tau)) \supset B_W^{CR} \left( F(p), \left[ \frac{\kappa_1}{8\kappa_2} \frac{M}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{2}} \tau \right).$$

Preuve : Les fonctions  $-\Lambda_x$  sont *p.s.h* négatives sur  $\tilde{\Omega}$ , de gradients normés. Pour tout point  $q \in U$  dont l'image par  $F$  est dans  $W$ , la proposition 2.2.2 montre que  $n_q(F) \geq M/8\epsilon$ . On tire du lemme 2.1.1 l'estimation suivante sur les dérivées de  $F$  en ces points :

$$\|F'(q)u\| \geq \left[ \frac{\kappa_1}{8\kappa_2} \frac{M}{\epsilon} \right]^{1/2} \|u\|, \quad \forall u \in T_q^{\mathbb{C}} b\Omega.$$

La proposition 1.2.5 appliquée à  $F : F^{-1}(W) \longrightarrow W$  donne alors :

$$F(B_{F^{-1}(W)}^{CR}(p, \tau)) \supset B_W^{CR} \left( F(p), \left[ \frac{\kappa_1}{8\kappa_2} \frac{M}{\epsilon} \right]^{\frac{1}{2}} \tau \right).$$

C'est l'inclusion souhaitée puisque  $B_{F^{-1}(W)}^{CR}(p, \tau) \subset B_U^{CR}(p, \tau)$ .  $\square$

Nous détaillons dans la proposition suivante les situations dans lesquelles nous allons appliquer ce lemme dans le chapitre 4. Sa preuve découle directement du lemme 2.3.3 et de la figure 2.4.

**Proposition 2.3.4.** Soient  $\Omega, \tilde{\Omega}$  des domaines de  $\mathbb{C}^k$ . soient  $U$  et  $W$  des ouverts relativement compacts dans  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $\mathcal{SPC}(b\tilde{\Omega})$ . On suppose que  $\Lambda_x \geq 0$  sur  $\tilde{\Omega}$  pour tout  $x \in W$ . Fixons des points  $p \in U, a \in W$  et des réels  $\epsilon_0, \tau > 0$  tels que  $B^{CR}(p, \tau) \Subset U$  et  $A_{\epsilon_0}(p, \tau) \subset \Omega$ .

Soit  $\mathcal{F}_{p,a}$  la famille des applications holomorphes  $F : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$  propres relativement à  $U$  vérifiant  $F(p) = a$ .

1. A tout compact  $K$  de  $\tilde{\Omega}$  est associée une constante  $c(K) > 0$  telle que :

$$\forall F \in \mathcal{F} : (F(p) \in W \text{ et } F(A_{\epsilon_0}(p, \tau)) \subset K) \implies F(B^{CR}(p, \tau)) \supset B_W^{CR}(F(p), c\tau).$$

2. Fixons  $\lambda > 0$  et  $0 < \eta < \lambda$ . Il existe une constante  $c(\eta) > 0$  telle que :

$$\forall \epsilon \leq \epsilon_0, \quad \forall F \in \mathcal{F}_{p,a} :$$

$$F(A_\epsilon(p, \tau)) \subset \{\Lambda_a \geq \lambda\} \implies F(B^{CR}(p, \tau)) \supset B_W^{CR} \left( a, \frac{c(\eta)\tau}{\sqrt{\epsilon}} \right) \cap \{\Lambda_a \leq \lambda - \eta\}.$$

3. Soit  $y \in W \setminus \{a\}$  et  $\eta < d(a, y)$ . Il existe une constante  $c(\eta) > 0$  telle que :

$$\forall \epsilon \leq \epsilon_0, \forall F \in \mathcal{F}_{p,a} : \\ F(A_\epsilon(p, \tau)) \subset B(y, \eta) \implies F(B^{CR}(p, \tau)) \supset B_W^{CR}(a, \frac{c(\eta)\tau}{\sqrt{\epsilon}}) \setminus B(y, 2\eta).$$

De plus, les constantes  $c(K)$  et  $c(\eta)$  ne dépendent que des valeurs de la forme de Lévi sur  $U$  et  $W$ . Les points 1, 2 et 3 restent vrais pour des constantes moitié lorsque  $\Omega, \tilde{\Omega}$  sont remplacés par de petites perturbations au sens de Hausdorff pourvu que  $U$  et  $W$  soient eux faiblement perturbés au sens  $\mathcal{C}^2$ .

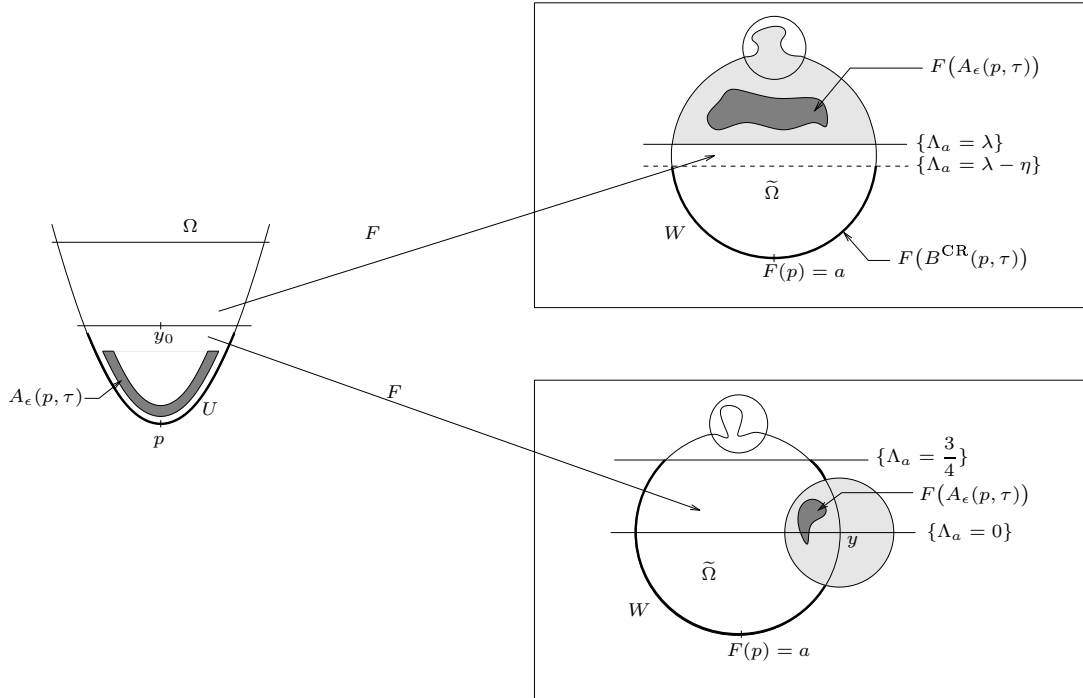


FIG. 2.4 – Situation 2 (en haut), situation 3 (en bas)



# Chapitre 3

## Dynamique des applications holomorphes propres de domaines réguliers et problème de l'injectivité.

Nous étudions dans ce chapitre les liens entre la dynamique et le problème de l'injectivité des auto-applications holomorphes propres des domaines à bords réguliers. Nous utilisons la description de la dynamique donnée par le théorème 1.4.5 pour séparer les dynamiques récurrentes et non-récurrentes. Nous établissons les théorèmes 1 et 2. Tous deux reposent sur le principe suivant, qui découle du caractère dilatant des applications CR sur les hypersurfaces strictement pseudoconvexes (voir chapitre 2).

“Dans un domaine faiblement pseudoconvexe, la famille des applications holomorphes propres est équicontinue sur le lieu de stricte pseudoconvexité”.

Nous combinons ensuite ces résultats et un argument entropie/degré pour prouver le théorème 3. Celui-ci apporte une réponse positive à la question 1 dans les domaines disqués de  $\mathbb{C}^2$ .

### 3.1 Existence de limites normales de $\rho$ en un point de stricte pseudoconv-.

Pour étudier les dynamiques récurrentes provenant d'applications non-injectives, nous voudrions exploiter comme pour la situation modèle du bassin d'attraction d'un point fixe attractif une non-équicontinuité radiale des itérées. L'objet de cette partie est de prouver ce défaut d'équicontinuité lorsque le rétract est de dimension 1. Ceci résultera immédiatement de l'existence d'une limite radiale de la rétraction  $\rho$ .

Précisément, pour une application holomorphe  $\rho : \Omega \longrightarrow M$  d'un domaine à bord lisse dans une variété complexe et un point  $q \in b\Omega$ , nous posons

$$\rho^*(q) := \bigcap_{t>0} \overline{\{\rho(q + u\vec{N}(q)), u \leq t\}}.$$

Il s'agit de l'ensemble des valeurs d'adhérences normales de  $\rho$  en  $q$ . Dans un mémoire sur les fonctions intérieures de la boule, Rudin montre que les limites radiales de ces fonctions sont denses dans le disque [68]. En adaptant la preuve de ce résultat, nous établissons le lemme suivant :

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine pseudoconvexe borné à bord lisse de  $\mathbb{C}^k$ ,  $k > 1$ , et  $M$  une surface de Riemann de genre fini. Soit  $\rho : \Omega \rightarrow M$  une application holomorphe. Il existe  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $x \in M$  tels que  $x \in \rho^*(p)$ .*

Nous allons en fait prouver que l'ensemble des points en lesquels  $\rho$  possède des limites radiales dans  $M$  est dense dans  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Fixons pour cela un ouvert arbitraire  $U \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

Commençons par introduire les notations utilisées dans la preuve (on se reportera avec avantage à la figure 3.1 qui les illustre).

Tout d'abord, quitte à restreindre  $U$  et à effectuer un changement de variable holomorphe, on peut supposer que  $U$  est formé de points de stricte convexité de  $b\Omega$ . Soit alors  $H$  un hyperplan réel de  $\mathbb{C}^k$  tel que  $H \cap U \Subset U$ . Soit  $H^+$  le demi-espace délimité par  $H$  tel que  $H^+ \cap U \Subset U$ . Pour  $\epsilon > 0$ ,  $S_\epsilon$  désignera l'ensemble des points de  $\Omega$  à distance  $\epsilon$  de  $U$  :

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \{p + \epsilon \vec{N}(p), p \in U\} \cap H^+ \\ B_\epsilon &= \{p + r \vec{N}(p), p \in U, r > \epsilon\} \cap H^+ = \cup_{r > \epsilon} S_r, \end{aligned}$$

enfin,  $B = \bigcup_{\epsilon > 0} B_\epsilon$ .

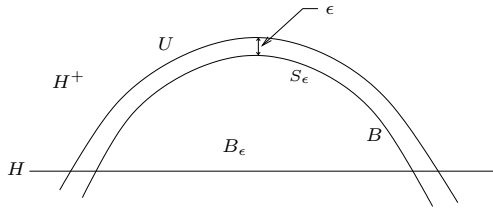


FIG. 3.1 – Notations de la preuve du lemme 3.1.1.

### 3.1.1 Lemmes préliminaires.

Nous utiliserons les lemmes classiques suivants :

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $A$  un ensemble analytique de codimension 1 de  $\mathbb{C}^k$  et  $\Lambda$  une fonction p.s.h analytique réelle de  $\mathbb{C}^k$ , non constante sur  $A$ . Alors  $\Lambda|_A$  n'a pas de maximum local.*

Preuve : Evidemment, en un point régulier de  $A$ ,  $\Lambda$  ne peut avoir de maximum local sans être constante. Supposons que  $\Lambda|_A$  a un maximum en un point singulier  $p \in A$ . Comme  $A$  est un ensemble analytique de codimension 1, le théorème de préparation de Weierstrass présente un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $A$  comme un revêtement ramifié

au dessus d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^{k-1}$ . Il existe des coordonnées affines  $(z', z_k)$  de  $\mathbb{C}^k$  et des fonctions holomorphes multivaluées  $r_1, \dots, r_d : U \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :

$$z = (z', z_n) \in V \iff \exists i \leq d, z_n = r_i(z').$$

Définissons  $\Lambda' : U \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\Lambda'(z') = \sum_{i=1}^d \Lambda(z', r_i(z')).$$

La fonction  $\Lambda'$  est continue et univaluée sur  $U$  car symétrique en les  $r_i$ . De plus,  $\Lambda'$  est *p.s.h* sur  $U \setminus \{0\}$  comme somme de fonctions *p.s.h*. D'après un théorème de singularités inexistantes (voir [54]),  $\Lambda'$  est *p.s.h* sur  $U$ . Comme  $\Lambda|_A$  est maximale en  $p$ ,  $\Lambda(z', r_i(z')) \leq \Lambda(0)$  pour  $i \leq d$  et  $\Lambda'$  a un maximum local en  $0 \in U$ . La fonction  $\Lambda'$  est donc constante égale à  $d\Lambda(0)$ . On en tire

$$\Lambda(z', r_i(z')) = \Lambda(0) \quad \forall i \leq k.$$

La fonction  $\Lambda$  est donc constante sur un ouvert de  $A$  et par conséquent sur  $A$ .  $\square$

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorphe, radialement propre. Alors  $\text{Im } \Phi$  est dense dans  $\mathbb{D}$ .*

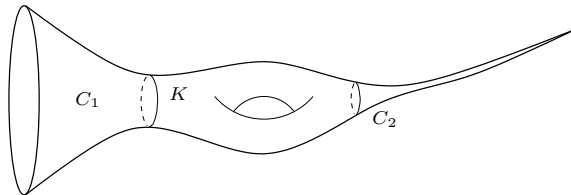
Preuve : Raisonnons par l'absurde. Quitte à composer  $\Phi$  à droite par un automorphisme de  $\mathbb{D}$ , on peut supposer que  $\text{Im } \Phi$  évite un voisinage de 0 dans  $\mathbb{D}$ . La fonction  $\Phi^{-1} = 1/\Phi$  est alors holomorphe bornée et sa norme converge vers 1 sur  $b\mathbb{D}$  selon la normale à  $b\mathbb{D}$ . Montrons que  $|\Phi^{-1}| \leq 1$  sur  $\mathbb{D}$ . Soit  $z \in \mathbb{D}$  et  $P_z$  un automorphisme de  $\mathbb{D}$  tel que  $P_z(0) = z$ . On a pour tout  $r > 0$ ,

$$|\varphi^{-1}(z)| = |\varphi^{-1} \circ P_z(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \varphi^{-1} \circ P_z(re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi^{-1} \circ P_z(re^{i\theta})| d\theta.$$

Comme  $\theta \mapsto |\varphi^{-1}(re^{i\theta})|$  tend vers 1 avec  $r$  et  $\varphi^{-1}$  est bornée, le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi^{-1} \circ P_z(r\theta)| d\theta \rightarrow 1$ . On en déduit donc que  $|\varphi^{-1}(z)| \leq 1$ . La fonction  $\Phi$  est donc de module 1 sur  $\mathbb{D}$ , ce qui est faux.  $\square$

**Lemme 3.1.4.** *Soit  $M$  une surface de Riemann de genre fini. Il existe un compact  $K$  de  $M$  tel que toute composante connexe de  $M \setminus K$  est*

- soit un anneau  $\mathcal{A}(r, 1)$  avec  $\mathbb{S}_r \subset K$ ,
- soit un disque époinché  $\mathbb{D}^*$  avec  $\mathbb{S}_1 \subset K$ .



### 3.1.2 Preuve du lemme 3.1.1.

Nous procédons par l'absurde. On montre par un argument de catégories de Baire que, quitte à restreindre  $B$ , l'image de  $B$  par  $\rho$  évite un compact  $K$  de  $M$  préalablement fixé. En restreignant  $\rho$  à une droite complexe transverse à  $b\Omega$ , on obtient une application radialement propre d'un disque dans une composante de  $M \setminus K$ . Cette situation se révèle être impossible.

Supposons que  $\rho^*(p) \cap M = \emptyset$  pour tout  $p \in U$ , *i.e.*  $\rho$  est radialement propre en les points de  $U$ . Soit  $K$  un compact de  $M$  donné par le lemme 3.1.4.

Montrons dans un premier temps que, quitte à restreindre  $U$  :

$$\rho(B) \cap K = \emptyset \quad (3.1)$$

Pour cela, soit  $r_j \searrow 0$ , et

$$E_i = \left\{ p \in U \mid \forall j \geq i, \rho(p + r_j \vec{N}(p)) \notin K \right\}.$$

Comme  $\rho^*(p) \cap M = \emptyset$  pour tout  $p \in U$  on a  $\bigcup_i E_i = U$ . D'après le théorème de Baire, il existe donc  $j_0 \in \mathbb{N}$  tels que  $E_{j_0}$  soit d'intérieur non vide. Quitte à restreindre  $U$ , on peut supposer que  $E_{j_0} = U$ . Alors

$$\rho(S_{r_j}) \cap K = \emptyset \quad \forall j \geq j_0. \quad (3.2)$$

Soit  $z \in B$  et  $\mathcal{F}$  la composante connexe de  $\rho^{-1}(\rho(z))$  qui contient  $z$ . C'est un ensemble analytique de codimension 1. Soit  $\Lambda$  une forme linéaire telle que  $H^+ = \{\Lambda > 0\}$ . Le principe du maximum appliqué à  $\rho|_{\mathcal{F}}$  montre que  $\mathcal{F} \cap S_{r_j} \neq \emptyset$ , donc que  $\rho(B_{r_j}) \subset \rho(S_{r_j})$ . Grâce à (3.2), ceci termine la preuve de (3.1) puisque

$$\rho(B) \cap K = \rho\left(\bigcup_{j \geq j_0} B_{r_j}\right) \cap K = \bigcup_{j \geq j_0} (\rho(B_{r_j}) \cap K) = \emptyset.$$

Dans un second temps, nous restreignons  $\rho$  à une droite complexe générique. Ceci produit encore une application propre par un argument de Lindelöf-Cirka.

**Fait** *Soit  $l$  une droite complexe sur laquelle  $\rho$  est non constante, qui intersecte  $B$  et telle que  $l \cap bB \subset U$ . Alors  $\rho|_{l \cap B}$  est radialement propre.*

Concluons la preuve à partir de ce Fait. Comme  $B$  est connexe,  $\rho(B)$  est inclus dans une composante connexe de  $M \setminus K$  d'après (3.1). L'application  $\rho'$  est donc à valeurs dans un disque époiné ou un anneau  $\mathcal{A}(r, 1)$ . Le Fait précédent montre que les limites radiales de  $\rho'$  sont nulles dans le premier cas - c'est impossible d'après le théorème de Fatou - ou de module 1 dans le second. On peut donc voir  $\rho'$  comme une fonction holomorphe à valeurs dans  $\mathbb{D}$  radialement propre et évitant un ouvert de  $\mathbb{D}$ . En composant à gauche  $\rho' : B' \rightarrow \mathbb{D}$  par une représentation conforme de  $\mathbb{D}$  sur  $B'$ , on produit une fonction holomorphe de  $\mathbb{D}$  dans  $\mathbb{D}$  radialement propre dont l'image n'est pas dense. Ceci est impossible d'après le lemme 3.1.3.  $\square$

Preuve du Fait : Par commodité, nous noterons  $B' = l \cap B$ ,  $U' = l \cap U = bB'$ ,

et  $\rho' = \rho|_{B'}$ . Pour  $p \in U'$ , définissons aussi  $\vec{N}_l(p)$  le vecteur unitaire normal à  $U'$  rentrant dans  $B'$ . Montrons que la propriété radiale de  $\rho$  implique celle de  $\rho'$ .

Comme  $i\vec{N}_l(p) \in T_p(U \cap l)$ , il s'agit d'un vecteur de la forme  $ai\vec{N}(p) + y$  avec  $y \in T_p^{\mathbb{C}}U$ . On en déduit que

$$\vec{N}_l(p) = a\vec{N}(p) + x, \quad x \in T_p^{\mathbb{C}}U$$

Remarquons que  $a$  est positif car  $\vec{N}(p)$  et  $\vec{N}_l(p)$  sont tous deux des vecteurs rentrants.

Supposons alors qu'il existe une suite de réels  $t_k \searrow 0$  telle que  $\rho'(p + t_k\vec{N}_l(p))$  converge vers  $\beta \in M$ . Ceci signifie  $\rho(p + at_k\vec{N}(p) + t_kx) \rightarrow \beta$ . Des estimations standard de distance de Kobayashi montrent que  $d_{K_B}(p + at_k\vec{N}, p + at_k\vec{N} + t_kx) \in O(\sqrt{t_k})$ . L'application  $\rho$  étant contractante pour la métrique de Kobayashi,  $d_{K_M}(\rho(p + at_k\vec{N}), \rho(p + at_k\vec{N} + t_kx))$  tend vers 0. Donc  $\rho(p + at_k\vec{N})$  tend vers  $\beta \in M$  ce qui est faux puisque  $\rho$  est radialement propre.  $\square$

## 3.2 Dynamique récurrente et expansivité au bord.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème 1.

### 3.2.1 Lemme des matriochkas.

Le lemme suivant montre en quoi une dynamique récurrente dans  $\Omega$  s'accompagne d'un comportement expansif sur les régions strictement pseudoconvexes de  $b\Omega$ . Concrètement, nous ne ferons qu'appliquer la proposition 2.3.1 à une "matriochka" de boules CR centrées en  $p$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  un domaine possédant une fonction p.s.h lisse et définissante globale  $\chi$ . Soit  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Soit  $f_n : \Omega \rightarrow \Omega$  une suite d'applications holomorphes propres lisses sur  $\bar{\Omega}$ . Supposons qu'il existe des suites  $t_k \rightarrow 0$  et  $n_k \in \mathbb{N}$  telles que  $f_n(p_{t_k}) \in \{\chi \leq -1\}$  pour tout  $n \geq n_k$ . Alors, pour tout  $R > 0$  et tout voisinage  $U$  de  $p$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f_n(U) \supset B^{CR}(f_n(p), R)$ .*

Preuve : Soient  $\epsilon_0, \tau, c$  les constantes données par la proposition 2.3.1. Fixons un entier  $N$  supérieur à  $2R/\tau c$ . Choisissons alors successivement  $\epsilon_N > \epsilon_{N-1} > \dots > \epsilon_1$  parmi les termes de la suite  $(t_k)_k$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$  de façon à ce que :

- $B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon_N}) \subset U$  et  $\epsilon_N < \epsilon_0$
- $\epsilon_i < \frac{\epsilon_{i+1}}{4}$
- $f_n(p_{\epsilon_i}) \in \{\chi \leq -1\} \quad \forall n \geq n_0$ .

Pour  $n \geq n_0$  donné, posons  $F := f_n$ . Il suffit d'établir par récurrence sur  $i$  que :

$$F(B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})) \supset B^{CR}(F(p), \frac{ic\tau}{2}) \text{ pour } 1 \leq i \leq N. \quad (\mathcal{P}_i)$$

D'après la proposition 2.3.1, si  $q \in B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon_1})$  et  $u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$  alors  $\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}}\|u\|$ . En appliquant la proposition 1.2.5, on a donc :

$$F(B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon_1})) \supset B^{CR}(F(p), c\tau). \quad (\mathcal{P}_1)$$

Supposons l'inclusion  $(\mathcal{P}_i)$  satisfaite et établissons  $(\mathcal{P}_{i+1})$ . Comme  $\epsilon_i < \frac{\epsilon_{i+1}}{4}$ , on a  $B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2}) \subset B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_{i+1}})$  si  $x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})$ . Il vient donc

$$\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{i+1}}} \|u\|, \quad \forall q \in \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2}), \quad \forall u \in T_q^{\text{C}} b\Omega$$

et

$$\begin{aligned} F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_{i+1}})) &\supset \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} F(B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2})) \\ &\supset \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} B^{\text{CR}}(F(x), \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset \bigcup_{y \in F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i}))} B^{\text{CR}}(y, \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset \bigcup_{y \in B^{\text{CR}}(F(p), \frac{ic\tau}{2})} B^{\text{CR}}(y, \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset B^{\text{CR}}(F(p), (i+1)\frac{c\tau}{2}). \end{aligned}$$

□

Nous observons maintenant que l'expansivité de la suite  $(f_n)_n$  sur  $U$  force la stricte pseudoconvexité de  $b\Omega$  et donc l'injectivité des  $f_n$ .

**Proposition 3.2.2.** *Lorsque  $b\Omega$  est borné alors, sous les hypothèses du lemme 3.2.1, les  $f_n$  sont des automorphismes de  $\Omega$ .*

Preuve : D'après la proposition 1.2.7,  $B^{\text{CR}}(\eta, R)$  contient  $b\Omega$  pour tout  $\eta$  de  $b\Omega$  pourvu que  $R$  soit supérieur au diamètre CR de  $b\Omega$ . Choisissons un voisinage  $U$  de  $p$  assez petit pour que  $U \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . D'après la proposition précédente,  $b\Omega \subset f_n(U)$  pour  $n$  assez grand et donc  $b\Omega$  est strictement pseudoconvexe. Le lemme 1.3.2 montre que les  $f_n$  sont des automorphismes. □

### 3.2.2 Preuve du théorème 1.

Commençons par rappeler qu'en vertu du théorème 1.3.4,  $f$  se prolonge en une application lisse à  $\overline{\Omega}$ . Raisonnons par l'absurde.

Si le rétract est un point, il s'agit d'un point fixe de  $f$  vers lequel  $(f^n)_n$  converge localement uniformément. Soit  $p$  un point de stricte pseudoconvexité de  $b\Omega$  et  $K$  un voisinage compact de  $a$  dans  $\Omega$ . Pour tout  $\epsilon$ , il existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(p_\epsilon) \in K$  pour  $n \geq n_\epsilon$ .

Lorsque le rétract est une surface de Riemann  $M$ , son genre est fini puisqu'elle est obtenue par une rétraction  $\rho$  de  $\Omega$  sur  $M$ . Le lemme 3.1.1 fournit donc un point  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $x \in M$  tels que  $x \in \rho^*(p)$  : il existe une suite  $\epsilon_k \in \mathbb{R}$  telle que  $\rho(p_{\epsilon_k})$  tend vers  $x$ . Comme  $f$  a une dynamique récurrente, la suite  $(f^n(x))_n$  est relativement compacte dans  $\Omega$  et il existe  $d > 0$  tel que  $K := \overline{\bigcup_{n \geq 0} B_K(f^n(x), d)} \subset \Omega$ . Comme  $f^{n_i}$  converge vers  $\rho$ , quitte à extraire, on a  $f^{n_k}(p_{\epsilon_k}) \in B_K(x, d)$  et  $f^n(p_{\epsilon_k}) \in K$  pour  $n \geq n_k$ .

Dans tous les cas, il existe un point de stricte pseudoconvexité  $p$  de  $b\Omega$ , un compact  $K$  de  $\Omega$  et des suites  $\epsilon_k \rightarrow 0$  et  $n_k \in \mathbb{N}$  telles que  $f^{n_k}(p_{\epsilon_k}) \in K$  pour  $n \geq n_k$ . On peut supposer que la fonction  $p.s.h$  définissante  $\chi$  est inférieure à  $-1$  sur  $K$ . La proposition 3.2.2 s'applique donc et montre que  $f$  est un biholomorphisme. Ceci est impossible (voir la remarque 1.4.7).  $\square$

### 3.2.3 Cas des rétracts de dimension quelconque.

La même approche que la preuve de la proposition 3.2.2 montre que les fibres de la rétraction  $\rho$  ne peuvent accumuler de points de stricte pseudoconvexité de façon normale (en fait même transverse). Dans [47], Globevnik et Stout construisent une variété analytique de la boule euclidienne  $B$  contenant  $bB$  dans son adhérence. Cette variété est candidate pour n'accumuler aucun point de  $bB$  transversalement.

Ici, la situation est plus riche : on a une fibration de  $\Omega$  en variétés analytiques, sous tendue par un contexte dynamique. Nous n'avons néanmoins pas su montrer l'impossibilité de cette situation.

## 3.3 Dynamique non-récurrente : transmission de la dynamique à $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

Nous montrons dans cette partie que la non-récurrente de la dynamique de  $f$  se transmet à celle de son prolongement à  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Dans les domaines LB-réguliers, nous savons construire des fonctions  $p.s.h$  négatives sur  $\Omega$ , strictement négatives sur un voisinage d'un point limite de  $(f^n)_n$  dans  $\overline{\Omega}$  et nulles sur de larges portions de  $b\Omega$ . Ces fonctions nous permettent d'adapter la technique utilisée dans le cas récurrent pour prouver le théorème 2. Nous appliquons ensuite ce théorème pour montrer la rigidité de la partie strictement pseudoconvexe d'un domaine possédant une dynamique attirée par un point de stricte pseudoconvexité.

**Preuve du théorème 2 :** *Etape 1 : corrélation des dynamiques sur  $\Omega$  et  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .* Lorsque le bord contient au moins deux points de faible pseudoconvexité, nous montrons qu'une sous-suite qui tend vers un point  $a \in b\Omega$  sur  $\Omega$  converge localement uniformément vers  $a$  sur  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

Raisonnons par l'absurde. Soit  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  tel que  $f^{n_k}(p)$  ne tend pas vers  $a$ , on peut supposer que  $(f^{n_k}(p))_k$  reste dans un ouvert  $V$  de  $b\Omega$  qui n'adhère pas à  $a$ . Montrons que  $b\Omega \setminus \{a\} \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Pour cela, fixons  $\tau > 0$  tel que  $B^{\text{CR}}(p, \tau) \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . En vertu de la proposition 1.3.5, et puisque  $V$  est un ouvert arbitrairement gros de  $b\Omega \setminus \{a\}$ , il suffit de montrer que  $f^n(B^{\text{CR}}(p, \tau)) \supset V$  pour  $n$  suffisamment grand. Considérons un voisinage  $U$  de  $a$  tel que  $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$  et  $\chi_{U,V}$  la fonction donnée par la proposition 1.1.6.

Comme  $(f^{n_k})_k$  converge vers  $a$  sur  $\Omega$ , il existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que

$$f^{n_\epsilon}(A_{\epsilon, \frac{\tau}{2}}(p, \tau)) \subset \{\chi_{U,V} < -\frac{1}{2}\}.$$

D'après la proposition 2.2.2,  $\|f_n'(q)u\| \gtrsim \epsilon^{-\frac{1}{2}} \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$  dès que  $q \in B^{\text{CR}}(p, \tau)$  vérifie  $f^{n\epsilon}(q) \in V$ . En appliquant la proposition 1.2.5 à  $f^{n\epsilon}$  sur  $B^{\text{CR}}(p, \tau) \cap (f^{n\epsilon})^{-1}(V) \subset B^{\text{CR}}(p, \tau)$  on obtient

$$f^{n\epsilon}(B^{\text{CR}}(p, \tau) \supset B_V^{\text{CR}}(f^{n\epsilon}(p), c\tau\epsilon^{\frac{-1}{2}}).$$

Comme  $V$  est  $d^{\text{CR}}$ -borné, on conclut en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0.

*Etape 2 : conclusion :* Comme un domaine LB-régulier ne possède pas de disque holomorphe dans son bord, les limites de  $(f^n)_n$  sont des points de  $b\Omega$ . Ce sont des points fixes de  $f$  car  $f^{n_{k+1}}(z) = f^{n_k}(f(z))$  converge à la fois  $a$  et  $f(a)$  pour  $z \in \Omega$ . On a donc l'alternative :

- Soit l'une des limites de la dynamique est un point de stricte pseudoconvexité. Ce point est fixe par  $f$  et la première étape garantit que son orbite accumule toutes les limites de  $f^n$ . On en déduit que  $(f^n)_n$  converge vers  $a$  sur  $\Omega$  et sur  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Il s'ensuit que  $a$  est le seul point non-errant de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .
- Soit toutes les valeurs d'adhérence sont des points de  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Soit  $a \in b\Omega$  adhérent à l'orbite d'un point  $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Quitte à procéder à une double extraction, on peut supposer que  $f^{n_k}(p)$  tend vers  $a$  et que  $f^{n_k}$  converge sur  $\Omega$ . La première étape montre alors que  $f^{n_k}$  tend vers  $a$  donc que  $a \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Ceci montre que  $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$ .  $\square$

Le théorème 2 implique une certaine rigidité du bord des bassins d'attraction de points paraboliques strictement pseudoconvexes. Précisément,

**Corollaire 3.3.1.** *Soit  $\Omega$  un domaine borné à bord lisse qui est LB-régulier. On suppose qu'il existe une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  dont une sous-suite  $f^{n_k}$  converge vers un point  $a \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Alors  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  est localement sphérique.*

Preuve : Si le domaine est strictement pseudoconvexe alors  $f$  est un biholomorphisme et il s'agit du théorème de Wong-Rosay. Lorsque ce n'est pas le cas, la preuve du théorème 2 montre qu  $f|_{\mathcal{SPC}(b\Omega)}^{n_k}$  tend vers  $a$  localement uniformément. Nous montrons dans le théorème 4.4.3 dans un cas plus général que tout point de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  possède alors un voisinage sur lequel les applications  $(f^n)$  sont toutes injectives. Le théorème 4 montre donc que  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  est sphérique.  $\square$

Terminons cette partie en remarquant que le théorème 1 est également valable sous l'hypothèse de LB-régularité.

**Remarque 3.3.2.** *Dans l'énoncé du théorème 1, on peut remplacer l'hypothèse d'existence d'une fonction p.s.h définissante globale par une hypothèse de LB-régularité.*

Preuve : Dans la preuve du théorème 1, la première partie qui établit le défaut d'équicontinuité sur le lieu de stricte pseudoconvexité reste valable. Il existe un point  $p$  de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ , un compact  $K$  de  $\Omega$ , des suites  $\epsilon_k$  tendant vers 0 et  $n_k \in \mathbb{N}$  tels que  $f^n(p_{\epsilon_k}) \in K$  pour tout  $n \geq n_k$ .

Soient alors deux points distincts  $a_i$  ( $i = 1, 2$ ) de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  et des voisinages compacts  $V_i$  de  $a_i$  tels que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ . Soit  $\chi_i \in PSH^-(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ , nulle sur  $b\Omega \setminus V_i$ , avec

$\chi_i(a_i) = -2$  et  $\chi_i$  est  $C$ -lipschitzienne sur  $b\Omega \setminus V_i$ . Les fonction *p.s.h*  $\chi_i$  sont évidemment majorées par une constante strictement négative sur  $K$ . Comme  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $f^{n_k}(p)$  ne peut être attiré à la fois par  $V_1$  et  $V_2$ . Le même raisonnement que pour la preuve du théorème 2 montre donc que  $b\Omega \setminus V_1$  ou  $b\Omega \setminus V_2$  est strictement pseudoconvexe. Puisque  $V_1 \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ ,  $b\Omega$  est aussi strictement pseudoconvexe et  $f$  est un biholomorphisme.  $\square$

## 3.4 Auto-applications holomorphes propres des domaines disqués.

L'objet de cette partie est d'établir le théorème 3. Commençons par donner les grandes lignes de la démonstration. Compte tenu du théorème 1, on peut supposer que la dynamique de  $f$  est non-récurrente. Nous procédons alors en trois étapes. Dans la première, nous montrons que le lieu de faible pseudoconvexité est fixé par  $f$  et en déduisons que la dynamique non-récurrente de  $f$  est produite par un point d'attraction  $a \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Nous montrons dans la deuxième étape que le lieu de faible pseudoconvexité est réduit au cercle  $C_a$  passant par  $a$ . La dernière étape exhibe une contradiction à partir de considérations entropiques : l'entropie topologique de  $f$  est supérieure au logarithme de son degré et se concentre sur  $C_a$ , ceci s'avère impossible lorsque  $f$  branche.

### 3.4.1 Fibration de Hopf.

Le bord d'un domaine  $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$  disqué et  $LB$ -régulier a une structure de fibré en cercles particulièrement utile.

Pour tout  $\eta = (z_1, z_2) \in b\Omega$ , nous noterons  $D_\eta$  le disque défini par  $D_\eta := \{\zeta\eta, \zeta \in \mathbb{D}\}$ ,  $C_\eta := bD_\eta$  son bord et  $R(\eta)$  son rayon. Rappelons que  $\Omega$  est disqué si et seulement si  $D_\eta \subset \Omega$  pour tout  $\eta \in b\Omega$ . Bien entendu,  $C_\eta \subset b\Omega$ .

**Lemme 3.4.1.** *Il existe un homéomorphisme  $h : b\Omega \longrightarrow S^3$  défini par  $h(\eta) = \eta/R(\eta)$  commutant aux actions de  $S^1$  :*

$$\forall \zeta \in S^1, \forall \eta \in b\Omega, h(\zeta\eta) = \zeta h(\eta).$$

Preuve : Seule l'affirmation que  $h$  est un homéomorphisme est non triviale. Il suffit de montrer que  $h$  est bijective pour l'établir. La surjectivité est claire car  $\Omega$  est borné. Pour l'injectivité, observons que deux points distincts  $\eta_1, \eta_2$  de  $b\Omega$  tels que  $h(\eta_1) = h(\eta_2)$  vérifient  $\eta_1 = \rho\eta_2$ , avec  $|\rho| > 1$  (ou  $|\rho| < 1$ ). Comme  $\Omega$  est disqué, si de tels points existaient, la couronne  $\{\eta = t\eta_2, 1 < |t| < |\rho|\}$  serait incluse dans  $b\Omega$ , ce qui contredirait la minimalité et donc la  $LB$ -régularité de  $\Omega$ .  $\square$

Cet homéomorphisme transporte la fibration de Hopf de  $S^3$  sur une fibration en cercles sur  $b\Omega$  (dont les fibres sont les  $C_\eta$ ,  $\eta \in b\Omega$ ) que nous appellerons fibration de

Hopf sur  $b\Omega$ . On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} b\Omega & \xrightarrow{h} & S^3 \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_{S^3} \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

On peut ainsi ramener toutes les propriétés de la fibration de Hopf de  $S^3$  à celle de  $b\Omega$ . En particulier,

**Proposition 3.4.2.** *Soient  $\eta_1, \eta_2 \in b\Omega$  avec  $C_{\eta_1} \neq C_{\eta_2}$ . Alors  $C_{\eta_1}$  et  $C_{\eta_2}$  sont noués dans  $b\Omega$ , autrement dit  $C_{\eta_1}$  n'est pas contractile dans  $b\Omega \setminus C_{\eta_2}$  (voir [14], 8.6 et 9.4.2).*

Preuve : Il suffit de prouver cette propriété pour la fibration de Hopf. Considérons deux cercles  $C_1$  et  $C_2$  de celle-ci et effectuons une rotation de  $S^3$  de sorte que  $C_1$  passe par le pôle nord. La projection stéréographique  $P : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  envoie alors  $C_1$  sur la droite  $\{x = y = 0\}$  et  $C_2$  sur une courbe fermée tracée sur un tore centré en 0. Les courbes  $P(C_1)$  et  $P(C_2)$  sont enlacées dans  $\mathbb{R}^3$  donc  $C_1$  et  $C_2$  le sont dans  $S^3$ .  $\square$

Tout chemin noué à un cercle  $C_\eta$  et inclus dans un ouvert contractile  $U$  de  $b\Omega$  y est noué à  $C_\eta \cap U$ . Précisément,

**Lemme 3.4.3.** *Soit  $\pi : b\Omega \rightarrow \mathbb{P}^1$  la fibration de Hopf et  $\Phi : \mathbb{D} \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow U \subset b\Omega$  un difféomorphisme fibré (i.e.  $\pi \circ \Phi(z, \cdot)$  est constante). Soient  $X \subset U$  et  $\gamma$  un lacet dans  $U$  dont la projection  $\pi \circ \gamma$  est contractile dans  $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$ . Alors  $\gamma$  est contractile dans  $U \setminus X$ .*

Preuve : Ecrivons  $\gamma(t) = \Phi(x(t), y(t))$  avec  $t \in [0, 1]$ ,  $x(t) = \pi \circ \gamma(t) \in \mathbb{D}$  et  $y(t) \in ]-\epsilon, \epsilon[$ .

Si  $\pi \circ \gamma$  est contractile, il existe une homotopie  $x_s(t)$  entre  $x(t)$  et un point  $x$  de  $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$  dans  $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$ . Alors  $\gamma_s(t) = \Phi(x_s(t), (1-s)y(t))$  définit une homotopie entre  $\gamma(t)$  et  $(x, 0)$  dans  $U \setminus X$ .  $\square$

### 3.4.2 Deux lemmes.

Nous montrons qu'un cercle faiblement pseudoconvexe de la fibration dont l'image par une application holomorphe propre rencontre le lieu de stricte pseudoconvexité est isolé dans l'ensemble de faible pseudoconvexité de  $b\Omega$ .

**Lemme 3.4.4.** *Soit  $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$  un domaine pseudoconvexe disqué à bord lisse. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une application holomorphe propre, lisse sur  $\overline{\Omega}$ . Si  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  et  $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  alors  $C_\eta$  est isolé dans l'ensemble des points de faible pseudoconvexité, en particulier  $\mathcal{FPC}(\eta) = C_\eta$ .*

Preuve : Raisonnons par l'absurde. Soit  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  tel que  $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Supposons que  $C_\eta$  ne soit pas isolé dans l'ensemble des points de faible pseudoconvexité. Soit alors une suite de points  $\eta_n$  de  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$  tendant vers  $\eta$ , tels que les

cercles  $C_{\eta_i}$  soient distincts. Comme  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  est ouvert et que  $f|_{b\Omega}$  est continue, il existe des voisinages  $\Gamma_n$  de  $\eta_n$  dans  $C_{\eta_n}$  tels que  $f(\Gamma_n) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . Alors le jacobien de  $f$ ,  $\text{Jac}(f)$ , est nul sur  $\Gamma_n$  pour  $n$  assez grand (lemme 1.3.5). D'après le théorème de Fatou,  $\text{Jac}(f) = 0$  sur  $\mathbb{D}_{\eta_n}$  pour  $n$  grand. L'hypersurface analytique  $\text{Jac}(f) = 0$  contient donc une infinité de droites passant par l'origine, c'est impossible.  $\square$

Le lemme suivant montre que l'image par une certaine itérée de tout cercle de  $b\Omega$  rencontre un voisinage prescrit d'une valeur d'adhérence de  $(f^n)_n$  dans  $b\Omega$ .

**Lemme 3.4.5.** *Soit  $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$  un domaine pseudoconvexe disqué et  $LB$ -régulier. Soit  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une application holomorphe propre lisse sur  $\bar{\Omega}$  dont la dynamique est non-récurrente. Soit  $a \in b\Omega$  une valeur d'adhérence de  $(f^n)_n$  et  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $b\Omega$ . Alors il existe un entier  $n_0$  tel que :*

$$f^{n_0}(C_\eta) \cap V \neq \emptyset \quad \forall \eta \in b\Omega.$$

Preuve : Comme  $\Omega$  est  $B$ -régulier, il existe une fonction  $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap PSH(\Omega)$  telle que  $u(a) = 1$ ,  $u < 1$  sur  $\bar{\Omega} \setminus \{a\}$ , et  $u = 0$  sur  $b\Omega \setminus V$ . Par hypothèse, il existe un entier  $n_0$  tel que  $u \circ f^{n_0}(0) > 0$ . Le principe du maximum appliqué à  $u \circ f|_{D_\eta}^{n_0}$  montre alors que  $f^{n_0}(C_\eta)$  rencontre  $V$ .  $\square$

### 3.4.3 Démonstration du théorème 3.

La fonction de jauge est *p.s.h* et définissante globale. L'application  $f$  se prolonge donc différentiablement sur  $\bar{\Omega}$ . On peut supposer que  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$  n'est pas vide et, grâce au théorème 1, que la dynamique de  $f$  est non-récurrente. D'après le théorème 2, il existe alors une sous-suite  $(f^{n_k})_k$  qui converge localement uniformément vers un point  $a \in b\Omega$  sur  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

Etape 1 :  $f(\mathcal{FPC}(b\Omega)) = \mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Il suffit de prouver une inclusion car  $f(\mathcal{SPC}(b\Omega)) \subset \overline{\mathcal{SPC}(b\Omega)}$  et  $f$  est surjective. Procédons par l'absurde. Soit  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  tel que  $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . D'après le lemme 3.4.4,  $\mathcal{FPC}(\eta) = C_\eta$ .

• Montrons qu'il existe  $\eta_1$  et  $\eta_2$  tels que  $\eta_1, \eta_2, \eta$  soient deux à deux distincts et

$$\begin{cases} f(C_{\eta_2}) \subset C_{\eta_1} \\ f(C_{\eta_1}) \subset C_\eta \end{cases}$$

Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 3.4.6.** *Pour tout voisinage compact  $\Gamma$  de  $\eta$  dans  $C_\eta$ , il existe un point  $\eta_1$  de  $f^{-1}(\Gamma)$  tel que  $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(\eta_1, \epsilon)) > 0$  pour tout  $\epsilon$ .*

Preuve : Supposons au contraire que pour tout point  $y$  de  $f^{-1}(\Gamma)$ , il existe un réel  $\epsilon(y) > 0$  tel que  $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(y, \epsilon(y))) = 0$ . Comme  $f^{-1}(\Gamma)$  est compact dans  $b\Omega$ , on a

$$f^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{y \in f^{-1}(\Gamma)} B(y, \epsilon(y)) \cap f^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \epsilon(y_i)) \cap f^{-1}(\Gamma)$$

et donc  $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma)) \leq \sum_1^n \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(y_i, \epsilon(y_i))) = 0$ . Puis,  $f$  étant lisse,  $\Lambda_1(\Gamma) = \Lambda_1(f(f^{-1}(\Gamma))) = 0$  ce qui est absurde.  $\square$

Soit  $\Gamma$  un voisinage compact de  $\eta$  dans  $C_\eta$  tel que  $f(\Gamma) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $\eta_1$  donné par le lemme 3.4.6. Puisque  $f(\eta_1) \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  on a aussi  $\eta_1 \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Alors, comme  $f^2(\eta_1) \in f(\Gamma) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ , le lemme 3.4.4 montre que  $C_{\eta_1}$  est isolé dans  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Si  $\epsilon$  est suffisamment petit, on a donc

$$\mathcal{FPC}(b\Omega) \cap B(\eta_1, \epsilon) \subset C_{\eta_1}.$$

Comme par ailleurs  $f^{-1}(\Gamma) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 0 < \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(\eta_1, \epsilon)) &= \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap \mathcal{FPC}(b\Omega) \cap B(\eta_1, \epsilon)) \\ &\leq \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap C_{\eta_1}) \end{aligned}$$

Ainsi  $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap C_{\eta_1}) > 0$ , et d'après le théorème de Fatou,  $f(C_{\eta_1}) \subset C_\eta$ . On a  $C_{\eta_1} \neq C_\eta$  car sinon  $f(C_\eta) \subset C_\eta \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$ .

De la même façon, on trouve  $\eta_2$  ayant les propriétés voulues.

• Le théorème de Fatou montre en fait que

$$\begin{cases} f(\mathbb{D}_{\eta_2}) \subset \mathbb{D}_{\eta_1} \\ f(\mathbb{D}_{\eta_1}) \subset \mathbb{D}_\eta \end{cases}$$

et il s'ensuit que  $\{f(0)\} = f(\mathbb{D}_{\eta_2} \cap \mathbb{D}_{\eta_1}) \subset \mathbb{D}_{\eta_1} \cap \mathbb{D}_\eta = \{0\}$ . Ainsi  $f(0) = 0$ , c'est la contradiction attendue car la dynamique de  $f$  est non récurrente.

A ce stade de la preuve, il est bon de remarquer que  $a$  ne peut être un point de stricte pseudoconvexité. En effet, si tel était le cas, les images successives des cercles de faible pseudoconvexité resteraient en dehors d'un voisinage fixé de  $a$ , ce qui est impossible en vertu du lemme 3.4.5. Le point  $a$  est donc nécessairement un point de faible pseudoconvexité.

Etape 2 :  $\mathcal{FPC}(b\Omega) = C_a$ . Montrons tout d'abord que  $\mathcal{FPC}(b\Omega)$  est connexe, il s'agit de voir que  $\mathcal{FPC}(\eta) = \mathcal{FPC}(a)$  pour tout  $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ . Soit  $V$  un voisinage de  $a$  dans  $b\Omega$ , d'après le lemme 3.4.5, il existe un entier  $n_0$  tel que :

$$f^{n_0}(C_x) \cap V \neq \emptyset \quad \forall x \in b\Omega.$$

Comme  $f^{-1}(\mathcal{FPC}(b\Omega)) = \mathcal{FPC}(b\Omega)$ , il existe  $\eta_1 \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  tel que  $f^{n_0}(\eta_1) = \eta$ . Alors  $\mathcal{FPC}(\eta)$  rencontre  $V$  car  $\mathcal{FPC}(\eta) \supset f^{n_0}(\mathcal{FPC}(\eta_1)) \supset f^{n_0}(C_{\eta_1})$ . On a donc  $\mathcal{FPC}(\eta) = \mathcal{FPC}(a)$  car  $V$  est un voisinage arbitraire de  $a$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{FPC}(b\Omega) = C_a$ . Notons  $X := \mathcal{FPC}(b\Omega) = \mathcal{FPC}(a)$ . Il s'agit de montrer que  $\pi(X) = \pi(a)$ . Soit  $U$  un voisinage de  $a$  sur lequel il existe une trivialisations locale de la fibration de Hopf vérifiant :

$$\begin{cases} \Phi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \times [-\epsilon, \epsilon] \text{ avec } \pi = \pi_1 \circ \Phi \\ \Phi(a) = (0, 0) \end{cases}$$

Comme  $U$  peut être choisi arbitrairement petit, il suffit de montrer que  $\pi(X)$  ne rencontre pas le bord de  $\mathbb{D}$ . Choisissons  $C_\eta$  un cercle de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $n_0$  un entier tel

que  $f^{n_0}(C_\eta) \subset U$  (voir le théorème 2). Le cercle  $C_\eta$  n'est pas contractile dans  $b\Omega \setminus X$  car  $X$  contient des cercles de la fibration de Hopf (propriété 3.4.2). Comme, d'après la première étape,  $f(\mathcal{FPC}(b\Omega)) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$ ,  $f^{n_0}$  induit un difféomorphisme local propre de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  sur lui-même, donc un revêtement fini. Il s'ensuit que  $f^{n_0}(C_\eta)$  n'est pas contractile dans  $U \setminus X$ , et donc que  $\pi(f^{n_0}(C_\eta))$  ne l'est pas dans  $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$  (lemme 3.4.3). Comme  $\mathbb{D}$  est assimilable à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , cela n'est possible que si  $\pi(X) \cap b\mathbb{D} = \emptyset$ .

Etape 3 :  $f$  est injective. Soit  $d$  le degré topologique de  $f|_{b\Omega}$ ; c'est aussi celui de  $f$ . D'après le théorème de Misiurewicz-Przytycki (1.5.5), l'entropie topologique de  $f|_{b\Omega}$  est minorée :

$$h_{top}(f|_{b\Omega}) \geq \log d.$$

Elle est de plus portée par l'ensemble non-errant d'après le théorème de Bowen (1.5.4) :

$$h_{top}(f|_{b\Omega}) = h_{top}(f|_{NW(f|_{b\Omega})}).$$

Or d'après le théorème 2 et les deux premières étapes, on a  $NW(f|_{b\Omega}) \subset C_a$  si bien que

$$h_{top}(f|_{C_a}) \geq \log d.$$

Comme  $f(C_a) = C_a$ , on voit facilement que  $f(\mathbb{D}_a) = \mathbb{D}_a$ . Alors  $f|_{\mathbb{D}_a}$  est un produit de Blaschke fini qui, vu comme fraction rationnelle  $\tilde{f}$ , est de degré  $\tilde{d} = \deg(f|_{\mathbb{D}_a})$ . Or, comme l'a montré Gromov,  $h_{top}(\tilde{f}) = \log \tilde{d}$  (théorème 1.5.6), et donc

$$h_{top}(f|_{C_a}) = h_{top}(\tilde{f}|_{C_a}) \leq \log \tilde{d}.$$

Alors  $\deg(f|_{\mathbb{D}_a}) = \tilde{d} \geq d = \deg f$  ce qui montre que l'ensemble des valeurs critiques  $f(V_f)$  ne contient pas  $\mathbb{D}_a$ . Or, il résulte des deux premières étapes que  $V_f \subset \mathbb{D}_a$  et  $f(\mathbb{D}_a) = \mathbb{D}_a$ . Ainsi,  $V_f = \emptyset$  et  $f$  est injective.  $\square$



# Chapitre 4

## Contractibilité et sphéricité des hypersurfaces strictement pseudoconvexes

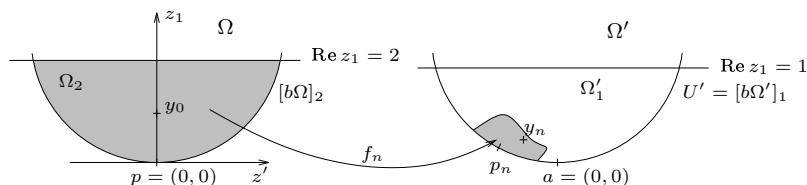
Dans ce chapitre nous donnons une preuve du théorème 4 dans l'esprit de celle du théorème de Wong Rosay présentée dans la partie 1.6.

### 4.1 Renormalisation de $f_n$ .

Commençons par décrire et simplifier la situation géométrique sous-jacente aux hypothèses du théorème 4.

Appelons  $a$  le point de  $S'$  vers lequel  $(f_n)_n$  converge. Soit  $p$  un point de  $S$ . Le but est de trouver un voisinage de  $p$  dans  $S$  qui est CR-difféomorphe à un ouvert de la sphère. Ce problème ne dépend évidemment pas des systèmes de coordonnées holomorphes en  $p$  et en  $a$ . Comme les surfaces  $S$  et  $S'$  sont strictement pseudoconvexes, on peut les supposer strictement convexes sur des voisinages  $U_2$  et  $U'$  de  $p$  et  $a$  respectivement. De même, on peut supposer  $\Lambda_p = \Lambda_a = \text{Re } z_1$ ,  $U_2 = S \cap \{\text{Re } z_1 < 2\}$  et  $U' = S' \cap \{\text{Re } z_1 < 1\}$ . Il existe alors deux domaines bornés de  $\mathbb{C}^k$  strictement convexes,  $\Omega$  et  $\Omega'$  tels que  $U_2 = [b\Omega]_2$  et  $U' = [b\Omega']_1$ .

Quitte à éliminer de la suite  $(f_n)_n$  un nombre fini d'éléments, on peut supposer que  $f_n([b\Omega]_2) \subset U'$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les théorèmes classiques de prolongement des applications CR (voir [22], chap. 15) montrent que  $f_n$  se prolonge en une application holomorphe de  $\Omega_2$  dans  $\mathbb{C}^k$  que nous noterons abusivement  $f_n$ . Comme  $\Omega'_1$  possède une fonction *p.s.h* définissant  $\rho$ , le principe du maximum appliqué aux restrictions de  $\rho \circ f_n$  sur les hyperplans complexes  $\{z_1 = c\}$  assure que  $f_n(\Omega_2) \subset \Omega'_1$ . Un argument similaire prouve que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers  $a$  sur  $\Omega_2$ . La figure suivante illustre la situation.



Posons  $y_0 := (1, 0)$ ,  $y_n := f_n(y_0)$ ,  $p_n := f_n(p)$ , de sorte que  $y_n$  et  $p_n$  tendent vers  $a$ . Définissons à présent une suite de remises à l'échelle  $\mathcal{R}_n := \mathcal{R}_{p_n, \epsilon_n}$  associée à la suite  $(p_n, y_n)$ ; voir la figure 4.1. A cet effet, observons que  $\{\mathcal{R}_{q, \epsilon}^{-1}(\{\operatorname{Re} z_1 = 0\}), \epsilon > 0\}$  définit un feuilletage de  $\mathbb{C}^k \setminus T_q^{\mathbb{C}} b\Omega'$  dont les feuilles sont des cylindres euclidiens centrés en  $T_q^{\mathbb{C}} b\Omega'$  :

$$\mathcal{F}_{q, \epsilon} := \mathcal{R}_{q, \epsilon}^{-1}(\{\operatorname{Re} z_1 = 0\}) = \{z \in \mathbb{C}^k, d(z, T_q^{\mathbb{C}} b\Omega') = \epsilon\}.$$

En raison de la stricte convexité de  $\Omega'$ , tout point  $z \in \Omega'$  appartient à une unique feuille  $\mathcal{F}_{q, \epsilon_q(z)}$ ,  $\epsilon_q(z) > 0$ . Ceci nous permet d'énoncer la définition suivante :

**Définition 4.1.1.** *La remise à l'échelle  $\mathcal{R}_n$  associée à la suite  $(p_n, y_n)$  est définie par  $\mathcal{R}_n := \mathcal{R}_{p_n, \epsilon_n}$  où  $\epsilon_n = \epsilon_{p_n}(y_n)$  est l'unique réel tel que  $y_n \in \mathcal{F}_{p_n, \epsilon_n}$ . On pose  $F_n := \mathcal{R}_n \circ f_n$ ,  $\tilde{\Omega}_n := \mathcal{R}_n(\Omega')$  et  $\tilde{y}_n := \mathcal{R}_n(y_n)$ .*

Grâce à ces choix nous disposons d'une suite d'applications  $F_n$  telles que (voir fig. 4.1) :

$$\begin{aligned} F_n : \Omega_2 &\longrightarrow \tilde{\Omega}_n \\ p &\longmapsto a = (-1, 0) \\ y_0 &\longmapsto \tilde{y}_n \in \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Notons que la convergence de  $p_n$  et  $y_n$  vers  $a$  implique que  $\epsilon_{p_n}(y_n)$  tend vers 0. La proposition 1.6.3 implique donc :

**Proposition 4.1.2.** *La suite de domaines  $(\tilde{\Omega}_n)$  converge vers  $B$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^k \setminus \{(1, 0)\}$  au sens  $\mathcal{C}^2$ .*

La figure 4.1 décrit le procédé de remise à l'échelle.

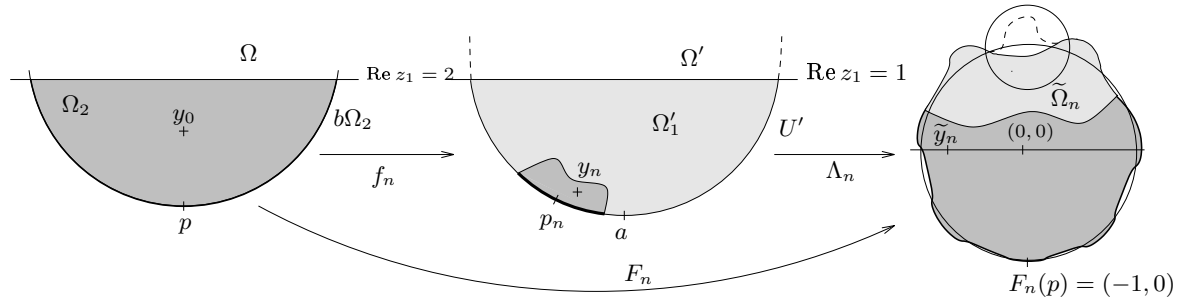


FIG. 4.1 – Situation après remise à l'échelle “au temps”  $n$ .

Observons que la normalité de la famille  $(F_n)$  résulte de la proposition 4.1.2 puisque  $\tilde{\Omega}_n$  est une suite de domaines uniformément bornés.

**Corollaire 4.1.3.** *La famille  $(F_n)$  est normale. Quitte à extraire, on peut supposer que  $F_n$  converge uniformément vers  $F : \Omega_2 \longrightarrow \bar{B}$  sur les compacts de  $\Omega_2$ . De plus l'alternative suivante a lieu : soit  $F$  est à valeurs dans  $B$  soit  $F(\Omega_2)$  est un point de  $bB$ .*

Enfin, cette dernière remarque permet de compléter la description de la situation :

**Remarque 4.1.4.** *L'image de  $U'$  par la remise à l'échelle en  $q \simeq a$  et de paramètre  $\epsilon \ll 1$  est une hypersurface à bord de  $\mathbb{C}^k$ . Son bord est non vide et inclus dans un voisinage de  $(1, 0)$  dont le diamètre tend vers 0 avec  $\epsilon$ .*

## 4.2 Réduction du problème.

La preuve du théorème 4 consiste à montrer que  $F_n$  converge vers un biholomorphisme d'un voisinage de  $p$  dans  $\overline{\Omega}$  sur un voisinage de  $(-1, 0)$  dans  $\overline{B}$ . Nous réduisons ici ce problème à l'étude de la convergence des applications  $F_n$  et de leurs inverses  $G_n$ . Montrons tout d'abord comment définir ces inverses.

**Lemme 4.2.1.** *Soient  $D$  et  $D'$  deux domaines à bords lisses de  $\mathbb{C}^k$ . On suppose que  $D_1$  et  $D'_1$  sont connexes, non vides et que  $[bD]_1, [bD']_1$  sont strictement convexes. Soit  $F : D_1 \rightarrow D'$  une application holomorphe propre relativement à  $[bD]_1$  telle que  $F([bD]_1) \subset \mathcal{SPC}(bD')$ . Alors  $F$  est un difféomorphisme local sur  $D_1$ . De plus, si  $F$  est injective sur  $[bD]_1$  et si  $F([bD]_1) \supset [bD']_1$  alors  $F(D_1) \supset D'_1$  et il existe un inverse à droite de  $F$  défini sur  $D'_1$ .*

Preuve : Notons tout d'abord que si  $F$  n'était pas un difféomorphisme local sur  $D_1$  alors le lieu critique  $\{\text{Jac } F = 0\}$  serait un ensemble analytique dont l'intersection avec  $[bD]_1 \subset \mathcal{SPC}(bD)$  serait vide [63]. La fonction  $-\text{Re } z_1$  violerait le principe du maximum sur cet ensemble analytique.

Comme  $[bD]_1$  est formé de points de stricte convexité et  $F$  y est injective,  $F|_{[bD]_1}$  est un difféomorphisme CR sur son image, qui contient  $[bD']_1$ . Il existe donc un difféomorphisme CR  $G$  de  $[bD']_1$  dans  $[bD]_1$  tel que  $F \circ G = \text{Id}$ . Celui-ci se prolonge en une application  $\overline{G} : D'_1 \rightarrow D$  holomorphe propre relativement à  $[bD']_1$  dont l'image est incluse dans  $D_1$  d'après le principe du maximum. L'application  $F \circ \overline{G}$  est donc bien définie sur  $D'_1 \cup [bD']_1$ , et coïncide avec l'identité sur  $[bD']_1$ . Le principe d'unicité montre que  $F \circ \overline{G} = \text{Id}_{D'_1}$ . On en conclut que  $F(D_1) \supset D'_1$  et que  $\overline{G}$  est l'inverse de  $F$  sur  $D'_1$ .  $\square$

Ce lemme assure l'existence d'un inverse  $G_n$  à  $F_n$  naturellement défini sur un ensemble maximal du type  $\tilde{\Omega}_{n,t}$ . La définition suivante met en relief les propriétés de ces applications que nous aurons à vérifier :

**Définition 4.2.2.** *Nous désignerons par  $\mathcal{K}(F_n), O(F_n), \mathcal{K}(G_n), O(G_n)$  les propriétés suivantes :*

- $\mathcal{K}(F_n) : F_n$  converge vers une application  $F$  et  $F(\Omega_2) \subset B$ ,
- $O(F_n) : \text{il existe un réel } \lambda \text{ strictement positif tel que } F_n(\Omega_1) \supset \tilde{\Omega}_{n,\lambda} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$ ,
- $\mathcal{K}(G_n) : G_n$  converge vers une application  $G$  et  $G(B_\lambda) \subset \Omega_2$ ,
- $O(G_n) : \text{il existe une fonction croissante continue } \mathcal{X} : ]0, \lambda] \rightarrow \mathbb{R}_*^+ \text{ telle que } G_n(\tilde{\Omega}_{n,t}) \supset \Omega_{\mathcal{X}(t)} \text{ pour tout } n$ .

Nous sommes maintenant en mesure de formuler la réduction annoncée :

**Proposition 4.2.3.** *Si la suite de renormalisation  $(F_n)_n$  et la suite des inverses  $(G_n)_n$  vérifient les propriétés  $\mathcal{K}(F_n), O(F_n), \mathcal{K}(G_n), O(G_n)$  alors l'application limite  $F : \Omega_2 \rightarrow B$  se prolonge en un CR-difféomorphisme entre un voisinage de  $p$  dans  $[b\Omega]_1$  et un voisinage de  $(-1, 0)$  dans  $bB$ .*

Preuve : D'après l'hypothèse  $O(F_n)$  et le lemme 4.2.1,  $G_n$  est définie sur  $\tilde{\Omega}_{n,\lambda}$  et y vérifie :

$$F_n \circ G_n = Id. \quad (4.1)$$

On déduit immédiatement de (4.1) et de l'hypothèse  $O(G_n)$  que  $F_n(\Omega_{\lambda'(t')}) \subset \tilde{\Omega}_{n,t'}$  pour  $t' < t \leq \lambda$ . Compte tenu de l'hypothèse  $\mathcal{K}(F_n)$ , cela donne à la limite :  $F(\Omega_{\lambda'(t)}) \subset \overline{B_{t'}} \cap B \subset B_t$ . On déduit par continuité de  $\lambda'$  que :

$$F(\Omega_{\lambda'(t)}) \subset B_t \quad \text{pour } t \leq \lambda. \quad (4.2)$$

Il résulte également de (4.1) que  $G_n \circ F_n = Id$  sur  $G_n(\tilde{\Omega}_{n,\lambda})$  et donc sur  $\Omega_{\lambda'(\lambda)}$  en vertu de l'hypothèse  $O(G_n)$  :

$$G_n \circ F_n = Id \quad \text{sur } \Omega_{\lambda'(t)} \text{ pour } t \leq \lambda. \quad (4.3)$$

L'hypothèse  $\mathcal{K}(G_n)$  permet de passer à la limite dans (4.1) car  $F_n$  converge uniformément vers  $F$  sur les compacts de  $\Omega_2$ . Il vient alors :

$$F \circ G = Id \quad \text{sur } B_t \text{ pour } t \leq \lambda. \quad (4.4)$$

L'inclusion (4.2) permet de passer à la limite dans (4.3) :

$$G \circ F = Id \quad \text{sur } \Omega_{\lambda'(t)} \text{ pour } t \leq \lambda. \quad (4.5)$$

L'identité (4.4) montre que  $F$  induit un biholomorphisme entre  $G(B_\lambda)$  et  $B_\lambda$  :

$$F : G(B_\lambda) \xrightarrow{\sim} B_\lambda.$$

En outre, l'inclusion (4.2) et l'identité (4.5) montrent que  $G(B_\lambda) \supset \Omega_{\lambda'(\lambda)}$ . On est alors en mesure de montrer que  $F$  se prolonge en un difféomorphisme d'un voisinage de  $p$  dans  $b\Omega$  sur un voisinage de  $(-1, 0)$  dans  $bB$ . Les frontières étant strictement pseudoconvexes en  $p$  et  $(-1, 0)$ , un théorème de Bell [9] stipule que le prolongement différentiable est une conséquence du prolongement continu. Fixons  $-1 < t \leq \lambda$  arbitrairement proche de  $-1$ . Pour  $n$  assez grand  $x_n \in \Omega_{\lambda'(t)}$  et donc, compte tenu de (4.2),  $F(x_n) \in B_t$ . Ainsi  $F(x_n)$  tend vers  $(-1, 0)$  lorsque  $x_n$  tend vers  $p$  et cela entraîne le prolongement hölder continu de  $F$  à  $b\Omega$  autour de  $p$  [16].  $\square$

### 4.3 Démonstration du théorème 4.

Nous allons à présent vérifier les propriétés  $\mathcal{K}(F_n)$ ,  $O(F_n)$ ,  $\mathcal{K}(G_n)$  et  $O(G_n)$  en utilisant de façon systématique la proposition 2.3.4. Ceci établira le théorème 4 *via* la proposition 4.2.3. Toute la preuve repose en fait sur l'injectivité de  $F_n$  au bord et les choix effectués lors de la renormalisation.

Rappelons que  $\tilde{\Omega}_n$  converge vers  $B$  au sens  $\mathcal{C}^2$  sur les compacts de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(1, 0)\}$  (propriété 4.1.2). Ainsi, pour  $n \geq n_0$  suffisamment grand,  $[b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$  est strictement pseudoconvexe et  $\Lambda_x$  est positive sur  $\tilde{\Omega}_n$  pour  $x \in [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$ . Le domaine  $\Omega$  étant quant à lui fixé et strictement convexe, la proposition 2.3.4 s'appliquera donc avec  $\{U, W\} := \{[b\Omega]_1, [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}\}$ .

### 4.3.1 Preuve de “ $\mathcal{K} \implies O$ ”.

$\mathcal{K}(F_n) \implies O(F_n)$  : Appliquons le point 1 de la proposition 2.3.4 à  $F_n$  en prenant  $U := b\Omega_1$  et  $W_n := [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$ . Comme  $F_n(p) = a$  et qu’en vertu de l’hypothèse  $\mathcal{K}(F_n)$   $F_n(A_{e_0}(p, \tau))$  tend vers  $F(A_{e_0}(p, \tau)) \Subset B$ , on obtient :

$$F_n(B^{\text{CR}}(p, \tau)) \supset B_{W_n}^{\text{CR}}(a, c\tau).$$

Compte tenu du lemme 2.3.4 il suffit alors de vérifier qu’il existe  $\lambda > 0$  tel que  $B_{W_n}^{\text{CR}}(a, c\tau) \supset [b\tilde{\Omega}_n]_\lambda$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Or ceci résulte immédiatement du fait que  $W_n$  converge au sens  $\mathcal{C}^2$  vers  $[bB]_{3/4}$ .  $\square$

Lorsque  $O(F_n)$  est vérifiée, le lemme 4.2.1 assure l’existence d’un inverse à droite  $G_n$  pour  $F_n$  défini sur  $\tilde{\Omega}_{n,\lambda}$ . Cette suite d’applications est normale car elle prend ses valeurs dans  $\Omega_1$ , on peut donc la supposer convergente vers une application  $G : B_\lambda \longrightarrow \bar{\Omega}_1$ . Comme ci-dessus, nous allons montrer que si  $G$  est à valeurs dans  $\Omega_2$  alors  $O(G_n)$  est satisfaite.

$\mathcal{K}(G_n) \implies O(G_n)$  : Appliquons le point 1 de la proposition 2.3.4 à  $G_n$  en prenant  $U_n := [b\tilde{\Omega}_n]_\lambda$  et  $W := [b\Omega]_2$ . Comme  $G_n(p) = a$  et qu’en vertu de l’hypothèse  $\mathcal{K}(G_n)$   $G_n(A_{e_0}(a, \tau))$  tend vers  $F(A_{e_0}(p, \tau)) \Subset \Omega$ , on obtient :

$$G_n(B_{U_n}^{\text{CR}}(a, t)) \supset B_W^{\text{CR}}(p, ct) \quad \forall t \leq \tau. \quad (4.6)$$

Par ailleurs, la distance CR majorant la distance euclidienne, on a  $B_{U_n}^{\text{CR}}(a, t) \subset [b\tilde{\Omega}_n]_t$ . De plus,  $B^{\text{CR}}(p, t) \supset [b\Omega]_{At^2}$  où  $A$  désigne le minimum des valeurs propres de la forme de Levi de  $[b\Omega]_1$  (il s’agit d’un cas particulier très simple du théorème 4 de [60]). La propriété  $O(G_n)$  découle alors de (4.6) et du lemme 4.2.1.  $\square$

En remplaçant  $p$  par un point arbitraire  $q \in [b\Omega]_1$  dans la preuve de  $\mathcal{K}(F_n) \implies O(F_n)$ , on obtient une propriété légèrement plus forte que  $O(F_n)$ . Celle-ci nous sera utile pour établir  $\mathcal{K}(G_n)$ .

**Lemme 4.3.1.** *Si  $\mathcal{K}(F_n)$  est vraie alors il existe des constantes  $c, \tau > 0$  telles que pour tout  $q \in [b\Omega]_1$  et  $n$  suffisamment grand,*

$$F_n(q) \in [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4} \implies F_n(B^{\text{CR}}(q, \tau)) \supset B_{[b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}}^{\text{CR}}(F_n(q), c\tau).$$

### 4.3.2 Preuve de $\mathcal{K}(F_n)$ .

En raison de l’alternative régissant la convergence de  $F_n$  (corollaire 4.1.3), il suffit d’établir que dans la situation décrite dans la première partie,  $\tilde{y}_n = F_n(y_0)$  reste dans un compact de  $B$ . Raisonnons par l’absurde, supposons que  $\tilde{y}_n$  tende vers  $y_\infty \in bB$ . La suite  $(F_n)$  converge alors localement uniformément vers  $y_\infty$  (corollaire 4.1.3). A  $\epsilon > 0$  correspond donc un entier  $n_\epsilon$  tel que  $F_{n_\epsilon}(A_\epsilon(p, \tau)) \subset B(y_\infty, 1/4)$ . En appliquant le point 3 de la proposition 2.3.4 à  $F_{n_\epsilon}$  avec  $U := [b\Omega]_1$ ,  $W_{n_\epsilon} := [b\tilde{\Omega}_{n_\epsilon}]_{3/4}$ ,  $\eta = 1/4$  et  $(a, y) := (a, y_\infty)$ , on obtient :

$$F_{n_\epsilon}([b\Omega]_1) \supset B_{W_{n_\epsilon}}^{\text{CR}}\left(a, \frac{c(\eta)\tau}{\sqrt{\epsilon}}\right) \setminus B(y_\infty, \frac{1}{2}). \quad (4.7)$$

Comme les  $[b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$  tendent vers  $[bB]_{3/4}$  au sens  $\mathcal{C}^2$ , leurs diamètres CR sont uniformément borné. Il s'ensuit que pour  $\epsilon$  suffisamment petit, (4.7) donne :

$$F_n([b\Omega]_1) \supset [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4} \setminus B(y_\infty, \frac{1}{2}). \quad (4.8)$$

Dorénavant,  $\epsilon$  est fixé et nous noterons  $n$  au lieu de  $n_\epsilon$ . L'application  $F_n|_{[b\Omega]_2}$  étant un difféomorphisme sur son image,  $F_n([b\Omega]_1)$  est contractile. Alors (4.8) montre que  $F_n([b\Omega_1]_4)$  doit contenir  $[b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$ . Il vient donc :

$$b[F_n([b\Omega]_1)] = F_n(b\Omega \cap \{\operatorname{Re} z_1 = 1\}) \subset [b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}^+. \quad (4.9)$$

Cette inclusion conduit à une contradiction car le principe du maximum appliqué à la fonction  $-\operatorname{Re} z_1 \circ F_n$  montre que  $F_n(\Omega \cap \{\operatorname{Re} z_1 = 1\}) \subset \tilde{\Omega}_{n,3/4}^+$  alors que par construction  $F_n(y_0) \in \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}$ .  $\square$

### 4.3.3 Preuve de $\mathcal{K}(G_n)$ .

Définissons  $\lambda_n := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid F_n(\Omega_1) \supset \tilde{\Omega}_{n,t}\}$ . Comme  $F$  est un difféomorphisme local sur  $\Omega_1$  (lemme 4.2.1), le bord de  $F_n(\Omega_1)$  dans  $\tilde{\Omega}_n$  est inclus dans  $F_n(\Omega \cap \{\operatorname{Re} z_1 = 1\})$ . Par définition de  $\lambda_n$ ,

$$\inf\{\operatorname{Re} z_1 \circ F_n(x), x \in \Omega \cap \{\operatorname{Re} z_1 = 1\}\} = \lambda_n.$$

Le principe du maximum appliqué à  $-\operatorname{Re} z_1 \circ F_n$  sur  $\Omega \cap \{\operatorname{Re} z_1 = 1\}$  montre donc :

$$\exists z'_n \in \{\operatorname{Re} z_1 = 1\} \cap b\Omega, \quad F_n(z'_n) \in \{\operatorname{Re} z_1 \leq \lambda_n\}. \quad (4.10)$$

Puisque  $\mathcal{K}(F_n)$  et donc  $O(F_n)$  sont satisfaites, les valeurs d'adhérence de  $\lambda_n$  sont supérieures à  $\lambda > -1$ . Quitte à extraire, la suite des applications  $G_n$  converge donc vers  $G : B_{\lambda_\infty} \rightarrow \overline{\Omega}_1$ , où  $\lambda_\infty$  désigne une valeur d'adhérence de  $\lambda_n \geq \lambda$ .

Lorsque  $\lambda_\infty > 0$ , la suite  $\tilde{y}_n$  est compacte dans  $B_{\lambda_\infty}$  d'après  $\mathcal{K}(F_n)$ . De plus  $G_n(\tilde{y}_n) = y_0 \in \Omega_2$ . L'application limite  $G$  est donc à valeurs dans  $\Omega_2$  :  $\mathcal{K}(G_n)$  est vérifiée.

Lorsque  $\lambda_\infty \leq 0$ , nous prouvons ci-dessous qu'il existe une suite  $(x_n)$  relativement compacte dans  $\Omega_1$  et une constante  $\eta_0 > 0$  telles que  $F_n(x_n) \in \tilde{\Omega}_{n,\lambda_\infty - \eta_0}$  pour  $n$  assez grand. Alors  $\{F_n(x_n)\} \Subset B_{\lambda_\infty}$  d'après  $\mathcal{K}(F_n)$ . On conclut cette fois en utilisant  $\{G_n[F_n(x_n)]\} = \{x_n\} \Subset \Omega_2$ .

Fixons  $\tau > 0$  tel que  $B^{\text{CR}}(p, \tau) \Subset [b\Omega]_1$ . Il suffit pour établir l'existence de  $(x_n)$  de voir qu'il existe  $\epsilon_0, \eta_0 > 0$  tels que :

$$F_n(A_{\epsilon_0}(p, \tau)) \cap \tilde{\Omega}_{n,\lambda_n - \eta_0} \neq \emptyset \quad \forall n \gg 1.$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que pour tout  $\epsilon, \eta > 0$ , il existe un entier  $n_\epsilon$  tel que  $F_{n_\epsilon}(A_\epsilon(p, \tau)) \subset \tilde{\Omega}_{n_\epsilon, \lambda_{n_\epsilon} - \eta}$ . En appliquant le point 2 de la proposition 2.3.4 à  $F_{n_\epsilon}$  avec  $U := [b\Omega]_1$ ,  $W := [b\tilde{\Omega}_n]_{1/2}$  et  $(\lambda, \eta) := (\lambda_{n_\epsilon}, \eta)$  on obtient :

$$F_{n_\epsilon}(B^{\text{CR}}(p, \tau/2)) \supset B_{W_{n_\epsilon}}^{\text{CR}} \left( a, \frac{c(\eta)\tau}{2\sqrt{\epsilon}} \right) \cap \{\operatorname{Re} z_1 \leq \lambda_{n_\epsilon} - \eta\}. \quad (4.11)$$

Comme les  $[b\tilde{\Omega}_n]_{3/4}$  tendent vers  $[bB]_{3/4}$  au sens  $\mathcal{C}^2$ , leurs diamètres CR sont uniformément borné. Il s'ensuit que pour  $\epsilon$  suffisamment petit, (4.11) donne :

$$F_{n_\epsilon}(B^{\text{CR}}(p, \tau/2)) \supset [b\tilde{\Omega}_{n_\epsilon}]_{\lambda_{n_\epsilon} - \eta}.$$

Ceci étant valable pour  $\eta$  arbitrairement petit, on obtient après extraction éventuelle :

$$d^{\text{CR}} \left( bF_n(B^{\text{CR}}(p, \tau/2)), [b\tilde{\Omega}_n]_{\lambda_n}^+ \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.12)$$

De plus, on voit à l'aide du lemme 4.3.1 que la distance CR entre les points de  $bF_n(B^{\text{CR}}(p, \tau))$  et les points de  $F_n(B^{\text{CR}}(p, \tau/2))$  est bornée inférieurement par  $c\tau/2$ . Il vient donc de (4.12) que  $F_n(B^{\text{CR}}(p, \tau))$  contient  $[b\tilde{\Omega}_n]_{\lambda_n}$  pour  $n$  assez grand. Avec (4.10), ceci contredit l'injectivité de  $F_n|_U$ .  $\square$

## 4.4 Applications.

Cette partie comporte deux applications du théorème 1. La première est un résultat de Wong-Rosay local et la seconde concerne l'étude de la dynamique des applications holomorphes propres.

Pour obtenir des énoncés assez généraux pour ces applications, il est nécessaire d'établir un résultat analogue au point 3 de la proposition 2.3.4 sous des hypothèses d'existence de fonctions pics *p.s.h* moins contraignantes. C'est l'objet du premier paragraphe.

### 4.4.1 Préliminaire.

Commençons par remarquer que nous n'utilisons dans le lemme 2.3.3 que la lissité de  $W$  (afin que  $c_{\text{max}}$  soit fini) et l'existence de bonnes fonctions pics *p.s.h* en tout point de  $W$ . Précisément, il est suffisant de supposer l'existence de fonctions  $\psi_x \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  pour  $x \in W$  vérifiant  $\psi_x(x) = 0$  et  $\psi_x$  est lisse en  $x$  (un maximum strict en  $x$  n'est pas nécessaire!). En définissant  $\mathcal{P}^\infty(b\Omega)$  comme l'ouvert maximal de  $b\Omega$  sur lequel tout point possède de telles fonctions pics, le lemme 2.3.3 est valide si on remplace les fonctions  $-\Lambda_x$  par des fonctions pics *p.s.h*  $\psi_x$  en  $x$  vérifiant  $\|\vec{\nabla}\psi_x(x)\| \leq 1$ , et l'hypothèse  $W \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$  par  $W \subset \mathcal{P}^\infty(b\Omega)$ . La proposition 1.2.6 assure de plus que tout compact de  $\mathcal{P}^\infty(b\Omega)$  est  $d^{\text{CR}}$ -borné.

**Lemme 4.4.1.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}^k$  un domaine pseudoconvexe à bord lisse et  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  qui se prolonge différentiablement à  $\bar{\Omega}$ . Etant donnés des points  $y \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $x \in \mathcal{SPC}(b\Omega) \cup f^{-1}(\mathcal{SPC}(b\Omega)) \setminus \{y\}$ , il existe des voisinages  $U$  et  $V$  de  $x$  et  $y$  respectivement, une constante  $\epsilon_0 > 0$  et des fonctions  $\psi_q \in PSH^-(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  pour tout  $q \in U$  tels que :*

$$\begin{cases} \psi_q(q) = 0, & \vec{\nabla}\psi_q(q) = -\vec{N}(q), \\ \psi_q \leq -\epsilon_0 & \text{sur } V. \end{cases} \quad (4.13)$$

Preuve : Commençons par le cas où  $x \in \mathcal{SPC}(b\Omega) \setminus \{y\}$ . On peut supposer que  $\Omega$  est strictement convexe sur un voisinage  $O \subset \mathbb{C}^k$  de  $x$ . Quitte à le restreindre, on

peut supposer que  $O$  ne rencontre pas un voisinage  $V$  de  $y$ . Soit  $U \Subset O$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $b\Omega$ . Pour  $q \in U$ , définissons  $\epsilon(q) := \inf\{\Lambda_q(z), z \in bO\}$  et :

$$\begin{cases} \psi_q & := -\Lambda_q & \text{sur } \{\Lambda_q \leq \epsilon(q)\} \cap \Omega, \\ & := -\epsilon(q) & \text{sur } \{\Lambda_q \geq \epsilon(q)\} \cap \Omega. \end{cases}$$

De façon claire,  $\psi_q$  vérifie toutes les exigences du lemme 4.4.1 avec  $\epsilon_0 := \inf_{q \in U} \epsilon(q) > 0$ .

Lorsque  $f(x) \in \mathcal{SPC}(b\Omega) \setminus \{f(y)\}$ , on peut construire des fonctions pics *p.s.h*  $\psi'_{q'}$ ,  $q' \in U'$  avec  $\psi'_{q'} \leq -\epsilon'_0$  sur un voisinage  $V'$  de  $f(y)$ . Les fonctions

$$\psi_q := \frac{\psi'_{f(q)} \circ f}{\|\vec{\nabla} \psi'_{f(q)} \circ f(q)\|}, \quad q \in U := f^{-1}(U')$$

vérifient alors (4.13) avec  $\psi_q \leq -\epsilon'_0/\|f'\|_\infty = -\epsilon_0 < 0$  sur  $V := f^{-1}(V')$ .

Supposons enfin  $x \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$  et  $f(x) = f(y) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ . La restriction de  $f$  à  $b\Omega$  définit un difféomorphisme entre un voisinage  $V \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$  de  $y$  et un voisinage  $V' \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$  de  $f(y)$ . Considérons alors un voisinage ouvert  $U' \Subset V'$  de  $f(y)$  assez petit pour pouvoir être supposé convexe. On fixe  $\epsilon_0$  tel que :

$$U'_{\epsilon_0} := \{\Lambda_{q'} \leq \epsilon_0, q' \in U'\} \Subset V'.$$

Notons enfin  $U$  et  $U_{\epsilon_0}$  les composantes connexes de  $x$  dans  $f^{-1}(U')$  et  $f^{-1}(U'_{\epsilon_0})$  respectivement. On a  $U \subset U_{\epsilon_0} \subset b\Omega \setminus V$  car  $bV \cap U_{\epsilon_0} = \emptyset$  par construction. On définit alors les fonctions  $\psi_q$ ,  $q \in U$  :

$$\begin{cases} \psi_q & := -\Lambda_{f(q)} \circ f & \text{sur } \{\Lambda_q \leq \epsilon(q)\} \cap \Omega, \\ & := -\epsilon_0 & \text{sur } \{\Lambda_q \geq \epsilon(q)\} \cap \Omega. \end{cases}$$

□

Nous sommes à présent en mesure de prouver la modification annoncée du point 3 de la proposition 2.3.4. Nous notons dans le lemme suivant  $C_y$  la composante connexe dans  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  d'un point  $y \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ .

**Lemme 4.4.2.** *Soient  $\Omega, \Omega'$  deux domaines pseudoconvexes de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses,  $U$  un ouvert de  $\mathcal{SPC}(b\Omega)$  et  $f_n : \Omega \rightarrow \Omega'$  une suite d'applications holomorphes propres relativement à  $U$ . On suppose qu'il existe une suite de points  $p_n$  tendant vers  $p \in U$ , des points  $y \in \mathcal{SPC}(b\Omega')$ ,  $a \in b\Omega'$  et  $y_0 \in \Omega$  tels que  $a \neq y$ ,  $f_n(y_0)$  tend vers  $y$  et  $f_n(p_n)$  tend vers  $a$ . Alors :*

- i)**  $a \in \overline{C_y}$  et  $f_n(U) \subset C_y$  pour  $n$  suffisamment grand,
- ii)** Si  $f_n|_U$  est injective, tout compact de  $C_y$  est inclus dans  $f_n(U)$  pour  $n$  grand,
- iii)** Si  $f_n|_U$  n'est pas injective mais  $\Omega = \Omega'$ ,  $U \subset C_y$  et  $(f_n) = (f^n)$  où  $f$  est une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  lisse sur  $\overline{\Omega}$  alors tout compact de  $C_y$  est inclus dans  $f^n(U)$  pour  $n$  grand et  $f : C_y \rightarrow C_y$  est un revêtement.

Par souci de lisibilité, nous appellerons dans cette preuve ordonnée d'un point  $z = (z_1, z') \in \mathbb{C}^k$  la partie réelle de  $z_1$ .

Preuve : Une estimation classique de la métrique de Kobayashi au voisinage de  $a$  [48] montre que  $f_n$  converge uniformément vers  $a$  sur les compacts de  $\Omega$ . Quitte à restreindre  $\Omega$  et à effectuer des changements de variables, on peut donc supposer que  $p = y = 0$ ,  $T_p b\Omega = T_y b\Omega' = \{\operatorname{Re} z_1 = 0\}$ ,  $U = [b\Omega]_1$ ,  $x_0 = (1/2, 0)$  et  $f_n(y_0) \in \Omega'_1$ . Soit  $\chi$  une fonction *p.s.h* sur  $\Omega'$ , continue sur  $\overline{\Omega'}$  et présentant un maximum global strict en  $y$ . Le principe du maximum appliqué à  $\chi \circ f_n$  sur les hyperplans complexes de  $\Omega_1 \cap \{\operatorname{Re} z_1 = t\}$  montre qu'il existe des points  $p'_t$  d'ordonnées  $t$  tels que  $f_n(p'_t)$  tend vers  $y$  avec  $n$  (uniformément en  $t$ ). Comme  $f_n([b\Omega]_1)$  est connexe et strictement pseudoconvexe, on en déduit que  $f_n([b\Omega]_1) \subset C_y$  quitte à éliminer un nombre fini de termes. Ceci établit le point i). De plus, quitte à modifier  $p_n$  en le déplaçant le long d'un chemin d'ordonnée constante le joignant à l'un des points  $p'_t$  définis ci-dessus, on peut supposer que  $f_n(p_n)$  et  $a$  sont d'ordonnée  $\lambda > 0$  fixée de sorte que  $b\Omega' \cap \{\operatorname{Re} z_1 = \lambda\} \Subset C_y$ .

La situation est alors très similaire à celle de la preuve de  $\mathcal{K}(F_n)$ . Fixons  $\eta > 0$  tel que  $B(y, 2\eta) \cap b\Omega \Subset C_y$ . Comme  $f_n$  converge localement uniformément vers  $y$ , à  $\epsilon > 0$  est associé un entier  $n$  tel que  $f_{n\epsilon}(A_\epsilon(p, \tau)) \subset B(y, \eta)$ . Les fonctions  $\psi_x$ ,  $x \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$  produites par le lemme 4.4.1 permettent alors d'appliquer le point 3 de la proposition 2.3.4 à  $f_n$  en prenant  $U := [b\Omega]_1$ ,  $W = C_y$  et  $(p, a, y_0, y) := (p_n, a, y_0, y)$ . On obtient :

$$f_n([b\Omega]_1) \subset B_W^{\text{CR}} \left( a, \frac{c(\eta)\tau}{\sqrt{\epsilon}} \right) \setminus B(y, 2\eta).$$

Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a donc :

$$f_n([b\Omega]_1) \subset C_y \setminus B(y, 2\eta).$$

Lorsque  $f_{nU}$  est injective, il s'agit d'un difféomorphisme et la contractibilité de  $[b\Omega]_1$  implique que  $f_n([b\Omega]_1) \subset C_y$ . Ceci prouve le point ii).

Le point iii) résulte quant à lui de la propriété de  $f : C_y \longrightarrow C_y$  (que nous démontrons ci-dessous). En effet,  $f$  définit alors un revêtement de  $C_y$  sur lui-même car  $f|_{C_y}$  est un difféomorphisme local. Puisque  $f|_{C_y}$  est non-injective, il existe donc un voisinage ouvert  $V$  de  $y$  et un compact  $V' \Subset C_y$  tels que  $V \cap V' = \emptyset$  et  $f(V') \supset V$ . Fixons alors un compact  $K$  de  $C_y$ . L'ensemble  $f^{-1}(K) \cup V' \setminus V$  est un compact dans  $C_y \setminus \{y\}$ , que  $f^n(U)$  recouvre pour  $n$  suffisamment grand. Par construction,  $f^{n+1}(U)$  contient alors  $K$ , ce qui démontre le point iii).

Il reste par conséquent à prouver que dans les conditions du point iii), l'application  $f : C_y \longrightarrow C_y$  est propre. Nous raisonnons pour cela par l'absurde et supposons qu'il existe un point  $q \in bC_y$  tel que  $f(q) \in C_y$ . Le lemme 4.4.1 produit des voisinages  $V_q$  de  $q$  dans  $b\Omega$ ,  $V_y$  de  $y$  dans  $\overline{\Omega}$ , une constante  $\epsilon_0 > 0$  et des fonctions  $\psi_x \in PSH^-(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  associées aux points  $x \in V_q$  telles que  $\psi_x(x) = 0$ ,  $\psi_x$  est lisse en  $x$ ,  $\|\overline{\nabla}\psi_x(x)\| \leq 1$  et  $\psi_x \leq -\epsilon_0$  sur  $V_y$ . En tenant compte des observations précédentes concernant les conditions d'applications du lemme 2.3.3, on voit que  $f^n(U)$  contient n'importe quel compact de  $C_y \setminus \{y\} \cup V_q$  pour  $n$  suffisamment grand. Ceci est clairement en contradiction avec le fait que  $f^n(U) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ .  $\square$

### 4.4.2 Une version locale du théorème de Wong-Rosay.

**Théorème 4'.** *Soient  $\Omega, \Omega'$  deux domaines de  $\mathbb{C}^k$  à bords lisses et  $U$  un ouvert de  $S\mathcal{PC}(b\Omega)$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de biholomorphismes de  $\Omega$  dans  $\Omega'$  propres relativement à  $U$ . S'il existe un point  $y_0 \in \Omega$  dont l'orbite  $(f_n(y_0))_n$  accumule un point  $y \in S\mathcal{PC}(b\Omega)$  alors  $U$  est localement sphérique.*

Preuve : Une estimation de la métrique de Kobayashi au voisinage de  $y$  montre que  $f_n$  converge uniformément vers  $y$  sur les compacts de  $\Omega$ . Comme  $f_n$  est une suite de biholomorphismes, les restrictions de  $f_n$  à  $U$  sont injectives et le lemme 4.4.2.ii établit une alternative. Soit  $f_n$  converge localement uniformément vers  $a$  sur  $U$ , auquel cas le théorème 1 s'applique et  $U$  est sphérique, soit les compacts de  $C_y$  sont recouverts par les images de voisinages arbitraires d'un point  $p \in U$ . Ceci signifie que la suite des inverses  $g_n$  des difféomorphismes CR  $f_n|_U$  converge uniformément vers  $p$  sur les compacts de  $C_y$  (modulo extraction). D'après le théorème 1,  $C_y$  est donc sphérique ainsi que  $U$  puisque  $f_n(U) \subset C_y$  pour  $n$  assez grand (lemme 4.4.2.i).  $\square$

### 4.4.3 Dynamique des applications holomorphes propres.

Le théorème suivant vient compléter la description de la dynamique des applications holomorphes propres des domaines pseudoconvexes à bords réguliers. Il régit le cas où un point d'adhérence de la dynamique est strictement pseudoconvexe.

**Théorème 4.4.3.** *Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}^k$  à bord lisse et  $f$  une auto-application holomorphe propre de  $\Omega$  se prolongeant de façon lisse à  $S\mathcal{PC}(b\Omega)$ . S'il existe un point  $y_0 \in \Omega$  dont l'orbite accumule un point de stricte pseudoconvexité  $y$  alors  $S\mathcal{PC}(b\Omega)$  est localement sphérique.*

Preuve : Soit  $f^{n_k}(y_0)$  la sous-suite de l'orbite de  $y_0$  qui converge vers  $y$ . Les estimations de métriques de Kobayashi au voisinage de  $y$  garantissent que  $f^{n_k}$  converge localement uniformément vers  $y$  sur  $\Omega$ . Le point  $y$  est par conséquent fixé par  $f$  puisque  $f^{n_k}(f(y_0)) = f(f^{n_k}(y_0))$  tend à la fois vers  $y$  et  $f(y)$ . On en déduit que  $C_y$  est stable par  $f$ . Le lemme 4.4.2.i) montre par ailleurs que les composantes connexes de  $S\mathcal{PC}(b\Omega)$  sont envoyées dans  $C_y$  par  $f^{n_k}$  pour  $k$  suffisamment grand. Il suffit donc de montrer que  $C_y$  est sphérique pour obtenir la sphéricité de  $S\mathcal{PC}(b\Omega)$ . Le lemme 4.4.2.iii) établit une alternative.

Soit tout point de  $C_y$  possède un voisinage dont l'orbite par  $f^{n_k}$  converge vers  $y$ . Il suffit alors de montrer que tout point de  $C_y$  possède un voisinage sur lequel les applications  $(f^n)$  sont toutes injectives pour que le théorème 1 assure que ce voisinage est sphérique. Fixons un point  $p \in C_y$ . Soit  $V$  un voisinage de  $y$  dans  $C_y$  sur lequel  $f$  est injective et  $U_0$  un voisinage de  $p$  relativement compact dans  $C_y$ . Par hypothèse, il existe un entier  $n_0$  tel que  $f^n(U_0) \subset V$  pour tout  $n \geq n_0$ . Soit alors  $U$  un voisinage de  $p$  inclus dans  $U_0$  tel que  $f, f^2, \dots, f^{n_0}$  sont injectives sur  $U$ . Montrons par récurrence que les applications  $f^n$  sont toutes injectives sur

---

<sup>1</sup>bien entendu,  $f_n$  n'est pas supposé surjectif sur  $\Omega'$

$U$ . Considérons pour cela  $x, x' \in U$  tels que  $f^n(x) = f^n(x')$  avec  $n > n_0$ . Alors  $f(f^{n-1}(x)) = f(f^{n-1}(x'))$  et  $f^{n-1}(x), f^{n-1}(x') \in V$ . Comme  $f$  est injective sur  $V$ , on en déduit que  $f^{n-1}(x) = f^{n-1}(x')$ . En itérant ce procédé on obtient  $f^{n_0}(x) = f^{n_0}(x')$  donc  $x = x'$ .

Soit tout compact de  $C_y$  est inclus dans l'image d'un voisinage arbitraire d'un point  $p \in C_y$  par une itérée suffisamment grande et  $f$  est un revêtement de  $C_y$  sur lui-même. Considérons une base dénombrable de voisinage  $(U_k)$  de  $p$ . A tout ouvert  $K$  simplement connexe et relativement compact dans  $C_y$  est alors associée une suite de branches inverses  $g_{n_k}$  de  $f^{n_k}$  sur  $K$  vérifiant  $g_{n_k}(K) \subset U_k$ . Les applications  $g_{n_k}$  sont des difféomorphismes CR par définition et le théorème 1 montre que  $K$  est sphérique. On en déduit que  $C_y$  est sphérique.  $\square$



# Bibliographie

- [1] M. Abate. *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*. Research and Lecture Notes in Mathematics. Complex Analysis and Geometry. Mediterranean Press, Rende, 1989.
- [2] H. Alexander. Proper holomorphic mappings in  $C^n$ . *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1) :137–146, 1977.
- [3] D. E. Barrett. Regularity of the Bergman projection and local geometry of domains. *Duke Math. J.*, 53(2) :333–343, 1986.
- [4] E. Bedford and S. Bell. Proper self-maps of weakly pseudoconvex domains. *Math. Ann.*, 261(1) :47–49, 1982.
- [5] E. Bedford and S. Pinchuk. Domains in  $C^{n+1}$  with noncompact automorphism group. *J. Geom. Anal.*, 1(3) :165–191, 1991.
- [6] E. Bedford and S. I. Pinchuk. Domains in  $C^2$  with noncompact groups of holomorphic automorphisms. *Mat. Sb. (N.S.)*, 135(177)(2) :147–157, 271, 1988.
- [7] E. Bedford and S. I. Pinchuk. Convex domains with noncompact groups of automorphisms. *Mat. Sb.*, 185(5) :3–26, 1994.
- [8] S. Bell. An extension of Alexander’s theorem on proper self-mappings of the ball in  $C^n$ . *Indiana Univ. Math. J.*, 32(1) :69–71, 1983.
- [9] S. Bell. Local boundary behavior of proper holomorphic mappings. In *Complex analysis of several variables (Madison, Wis., 1982)*, volume 41 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [10] S. Bell and D. Catlin. Boundary regularity of proper holomorphic mappings. *Duke Math. J.*, 49(2) :385–396, 1982.
- [11] S. Bell and E. Ligocka. A simplification and extension of Fefferman’s theorem on biholomorphic mappings. *Invent. Math.*, 57(3) :283–289, 1980.
- [12] S. R. Bell. Biholomorphic mappings and the  $\bar{\partial}$ -problem. *Ann. of Math. (2)*, 114(1) :103–113, 1981.
- [13] V. K. Beloshapka. The dimension of the group of automorphisms of an analytic hypersurface. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 43(2) :243–266, 479, 1979.
- [14] M. Berger. *Géométrie. 5*. CEDIC, Paris, 1977. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l’espace des sphères.
- [15] S. Berhanu and G. A. Mendoza. Orbits and global unique continuation for systems of vector fields. *J. Geom. Anal.*, 7(2) :173–194, 1997.
- [16] F. Berteloot. Characterization of models in  $C^2$  by their automorphism groups. *Internat. J. Math.*, 5(5) :619–634, 1994.
- [17] F. Berteloot. Holomorphic vector fields and proper holomorphic self-maps of Reinhardt domains. *Ark. Mat.*, 36(2) :241–254, 1998.
- [18] F. Berteloot. Méthodes de changement d’échelles en analyse complexe. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 2005.
- [19] F. Berteloot and J. J. Loeb. New examples of domains with non-injective proper holomorphic self-maps. In *Complex analysis and geometry (Trento, 1995)*, volume 366 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 69–82. Longman, Harlow, 1997.

- [20] F. Berteloot and S. Pinchuk. Proper holomorphic mappings between bounded complete Reinhardt domains in  $\mathbb{C}^2$ . *Math. Z.*, 219(3) :343–356, 1995.
- [21] H. Boas and E. Straube. Sobolev estimates for the  $\bar{\partial}$ -Neumann operator on domains in  $\mathbb{C}^n$  admitting a defining function that is plurisubharmonic on the boundary. *Math. Z.*, 206(1) :81–88, 1991.
- [22] A. Boggess. *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.
- [23] R. Bowen. Topological entropy and axiom A. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, pages 23–41. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
- [24] D. Burns, Jr. and S. Shnider. Geometry of hypersurfaces and mapping theorems in  $\mathbb{C}^n$ . *Comment. Math. Helv.*, 54(2) :199–217, 1979.
- [25] É. Cartan. *Œuvres complètes. Parties II, III*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, second edition, 1984. Algèbre, systèmes différentiels et problèmes d'équivalence. [Algebra, differential systems and problems of equivalence].
- [26] H. Cartan. Sur les rétractions d'une variété. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 303(14) :715, 1986.
- [27] B. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2*. Traduit du Russe : Mathématiques. “Mir”, Moscow, 1990. Fonctions de plusieurs variables. Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [28] S. S. Chern and J. K. Moser. Real hypersurfaces in complex manifolds. *Acta Math.*, 133 :219–271, 1974.
- [29] E. M. Chirka. An introduction to the geometry of CR manifolds. *Uspekhi Mat. Nauk*, 46(1(277)) :81–164, 240, 1991.
- [30] M. Christ. Global  $C^\infty$  irregularity of the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem for worm domains. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(4) :1171–1185, 1996.
- [31] B. Coupet, Y. Pan, and A. Sukhov. Proper holomorphic self-maps of quasi-circular domains in  $\mathbb{C}^2$ . *Nagoya Math. J.*, 164 :1–16, 2001.
- [32] O. Debarre. *Tores et variétés abéliennes complexes*, volume 6 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1999.
- [33] K. Diederich and J. E. Forneaess. Pseudoconvex domains : an example with nontrivial Nebenhülle. *Math. Ann.*, 225(3) :275–292, 1977.
- [34] K. Diederich and J. E. Forneaess. Pseudoconvex domains : bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions. *Invent. Math.*, 39(2) :129–141, 1977.
- [35] K. Diederich and J. E. Fornæss. Boundary regularity of proper holomorphic mappings. *Invent. Math.*, 67(3) :363–384, 1982.
- [36] K. Diederich and J. E. Fornæss. Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains. *Math. Ann.*, 259(2) :279–286, 1982.
- [37] K. Diederich and S. Pinchuk. Proper holomorphic maps in dimension 2 extend. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(4) :1089–1126, 1995.
- [38] K. Diederich and S. Pinchuk. Regularity of continuous CR maps in arbitrary dimension. *Michigan Math. J.*, 51(1) :111–140, 2003.
- [39] C. Dupont. Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de  $\mathbb{C}^n$ . *Manuscripta Math.*, 111(3) :357–378, 2003.
- [40] D. A. Eisenman. Proper holomorphic self-maps of the unit ball. *Math. Ann.*, 190 :298–305, 1971.
- [41] C. Fefferman. On the Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 :667–669, 1974.
- [42] J. E. Forneaess. Bi-holomorphic mappings between weakly pseudoconvex domains. *Pacific J. Math.*, 74(1) :63–65, 1978.

- [43] J. E. Fornæss and N. Sibony. Construction of P.S.H. functions on weakly pseudoconvex domains. *Duke Math. J.*, 58(3) :633–655, 1989.
- [44] F. Forstnerič. Proper holomorphic mappings : a survey. In *Several complex variables (Stockholm, 1987/1988)*, volume 38 of *Math. Notes*, pages 297–363. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [45] M. Freeman. The Levi form and local complex foliations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 57(2) :369–370, 1976.
- [46] H. Gaussier. Characterization of models for convex domains. *Preprint*.
- [47] J. Globevnik and E. L. Stout. The ends of varieties. *Amer. J. Math.*, 108(6) :1355–1410, 1986.
- [48] I. Graham. Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in  $C^n$  with smooth boundary. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 207 :219–240, 1975.
- [49] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [50] G. Henkin and R. Novikov. *Proper mappings of classical domains*, volume 1043 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 1984.
- [51] X. Huang and Y. Pan. Proper holomorphic mappings between real analytic domains in  $C^n$ . *Duke Math. J.*, 82(2) :437–446, 1996.
- [52] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [53] N. Kerzman and J.-P. Rosay. Fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion bornées et domaines taut. *Math. Ann.*, 257(2) :171–184, 1981.
- [54] M. Klimek. *Pluripotential theory*, volume 6 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.
- [55] S. Kobayashi. *Hyperbolic complex spaces*, volume 318 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [56] J. J. Kohn and L. Nirenberg. A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function. *Math. Ann.*, 201 :265–268, 1973.
- [57] S. Lattès. Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 166 :26–28, 1918.
- [58] A. V. Loboda. Linearizability of automorphisms of nonspherical surfaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46(4) :864–880, 1982.
- [59] M. Misiurewicz and F. Przytycki. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(6) :573–574, 1977.
- [60] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta Math.*, 155(1-2) :103–147, 1985.
- [61] E. Opshtein. Contractabilité et sphéricité des hypersurfaces strictement pseudoconvexes. *soumis*.
- [62] E. Opshtein. Dynamique des applications holomorphes propres des domaines réguliers et problème de l'injectivité. *à paraître, Math. Ann.*
- [63] S. I. Pinchuk. Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 15 :909–917, 959, 1974.
- [64] S. I. Pinčuk. Proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 241(1) :30–33, 1978.
- [65] R. M. Range. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, volume 108 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1986.

- [66] J.-P. Rosay. Sur une caractérisation de la boule parmi les domaines de  $\mathbf{C}^n$  par son groupe d'automorphismes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29(4) :ix, 91–97, 1979.
- [67] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of  $\mathbf{C}^n$* , volume 241 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [68] W. Rudin. *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of  $\mathbf{C}^n$* , volume 63 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.
- [69] N. Sibony. Une classe de domaines pseudoconvexes. *Duke Math. J.*, 55(2) :299–319, 1987.
- [70] F. Sommer. Komplex-analytische Blätterung reeler Hyperflächen im  $\mathbf{C}^n$ . *Math. Ann.*, 137 :392–411, 1959.
- [71] I. H. Tsai. Rigidity of proper holomorphic maps between symmetric domains. *J. Differential Geom.*, 37(1) :123–160, 1993.
- [72] A. E. Tumanov and G. M. Khenkin. Local characterization of analytic automorphisms of classical domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 267(4) :796–799, 1982.
- [73] S. M. Webster. On the transformation group of a real hypersurface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 231(1) :179–190, 1977.
- [74] B. Wong. Characterization of the unit ball in  $\mathbf{C}^n$  by its automorphism group. *Invent. Math.*, 41(3) :253–257, 1977.
- [75] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231) :3–88, 1995. Petits diviseurs en dimension 1.