

Dynamique des applications holomorphes propres de domaines réguliers et problème de l'injectivité.

Emmanuel Opshtein.

3 décembre 2004

Introduction

En 1977, Alexander montra que les auto-applications holomorphes propres de la boule euclidienne de \mathbb{C}^k ($k \geq 2$) sont des automorphismes [2]. Peu avant, Pinchuk ([24], 1974) avait établi un résultat analogue pour les domaines strictement pseudoconvexes à bords lisses lorsque les applications se prolongent différentiablement au bord. La découverte d'un phénomène tranchant aussi singulièrement avec le cas unidimensionnel souleva une question qui reste toujours ouverte :

Question. *Une auto-application holomorphe propre d'un domaine pseudoconvexe borné de \mathbb{C}^k à bord lisse est-elle nécessairement un automorphisme lorsque $k > 1$?*

L'hypothèse de régularité du bord est évidemment nécessaire comme le montrent l'exemple de (w, z^2) sur le bidisque ou d'autres bassins d'attraction. Une première série de travaux s'inscrit dans la perspective ouverte par Alexander. Ainsi, Pinchuk ([25], 1978) montra comment ramener le cas strictement pseudoconvexe à celui de la boule par un argument de dilatations de coordonnées. Henkin et Tumanov ([30], 1982) puis Henkin et Novikov ([19], 1984) généralisèrent le résultat d'Alexander aux domaines symétriques bornés. Les progrès accomplis dans les années 80 sur le prolongement des applications holomorphes propres ont considérablement simplifié l'abord de cette question. En particulier, le théorème d'Alexander devient limpide car les applications se prolongent au voisinage de la frontière ([4], 1983). Dans ce contexte, une nouvelle vague de travaux aborda le cas des domaines faiblement pseudoconvexes. Citons les plus marquants. Bedford et Bell ([3], 1982) ont résolu le cas où $b\Omega$ est analytique réel. Diederich et Fornaess ([14], 1982) celui où le lieu de faible pseudoconvexité est petit (de mesure $2k - 3$ dimensionnelle nulle). D'autres réponses concernent des domaines présentant des symétries. Citons Berteloot et Pinchuk ([9], 1994) pour les domaines de Reinhardt de \mathbb{C}^2 bornés complets et distincts du bidisque ; Berteloot ([8], 1998) pour les domaines de Reinhardt de \mathbb{C}^k bornés à frontière \mathcal{C}^2 . Coupet, Pan et Sukhov ([13], 2001) ont traité le cas des domaines cerclés de type fini de \mathbb{C}^2 . Enfin, dans un registre sensiblement différent, Tsai ([29], 1993) retrouve et prolonge les résultats de Henkin-Novikov. Le lecteur pourra consulter l'article de revue de Forstnerič [17] pour d'autres références.

La plupart de ces travaux reposent sur une stratégie commune exploitant la compétition entre deux phénomènes : l'ensemble critique croît avec l'itération mais sa trace au bord reste limitée par le lieu de faible pseudoconvexité.

Dans cet article, nous adoptons un nouveau point de vue axé sur une approche plus dynamique. Nous montrons que l'entropie des prolongements au bord est toujours portée par le lieu de faible pseudoconvexité et confrontons cette contrainte à la richesse dynamique en présence de degré.

Dans cette perspective, nous étudions le lien entre la dynamique d'une application au bord et à l'intérieur d'un domaine. Cette dernière est gouvernée par une dichotomie remarquable. Elle est soit non-récurrente, c'est-à-dire que toutes les limites sont à valeurs dans le bord, soit récurrente auquel cas l'orbite de tout compact reste relativement compacte. Dans le cas d'une dynamique récurrente, toutes les limites sont des automorphismes d'une même variété holomorphe obtenue par rétraction du domaine. Nous dirons que cette variété est le rétract de l'application.

La régularité du bord est une obstruction à la récurrence. Précisément, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{C}^k possédant une fonction $p.s.h$ lisse et définissante globale. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre dont la dynamique est récurrente. Le rétract de f ne peut être ni un point ni une surface de Riemann. Si $k = 2$ alors f est un automorphisme.*

Soulignons que l'essentiel de la démonstration de ce théorème est valable en toutes dimensions.

La démonstration de ce théorème s'adapte aux dynamiques non-récurrentes en se restreignant à une classe de domaines possédant de bonnes fonctions pics $p.s.h$; les domaines LB -réguliers. Cette classe englobe les domaines de type fini de \mathbb{C}^2 et les domaines strictement géométriquement convexes. Nous montrons que l'entropie de $f|_{b\Omega}$ est portée par le lieu de faible pseudoconvexité en contrôlant son ensemble non-errant $NW(f|_{b\Omega})$:

Théorème 2. *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{C}^k à bord lisse et LB -régulier dont le bord contient au moins deux points de faible pseudoconvexité. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ holomorphe propre se prolongeant différemmentiablement au bord et dont la dynamique est non-récurrente. Alors l'alternative suivante a lieu :*

1. *les limites de f^n sur Ω et $SPC(b\Omega)$ sont des points identiques de $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ et $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$*

ou

2. *f^n converge localement uniformément sur Ω et $SPC(b\Omega)$ vers $a \in SPC(b\Omega)$ et $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega) \cup \{a\}$.*

Enfin, nous faisons aboutir notre stratégie pour la classe des domaines disqués de \mathbb{C}^2 . Nous obtenons une généralisation du résultat de Coupet-Pan-Sukhov [13] :

Théorème 3. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ un domaine pseudoconvexe disqué, LB -régulier et dont la fonction de jauge est lisse. Alors toute application holomorphe propre de Ω dans lui-même est un automorphisme de Ω .*

La démonstration de ce théorème épouse parfaitement le point de vue développé par cet article. Lorsque f est non-injective on voit, en utilisant les théorèmes 1 et 2 ainsi que la géométrie du domaine, que toute la dynamique de $f|_{b\Omega}$ se concentre sur un unique cercle de faible pseudoconvexité. Des estimations standards d'entropie topologique montrent que ceci est impossible.

L'article est organisé de la façon suivante. La première partie concerne la dynamique des applications considérées. Nous y précisons la dichotomie récurrence/non-récurrence et présentons certains exemples typiques. La deuxième partie contient des préliminaires techniques standards. Dans la troisième partie, nous expliquons pourquoi le bord du bassin d'un point attractif ne peut être lisse. Ce cas simple offre une esquisse de démonstration pour les théorèmes 1 et 2. Dans la quatrième partie, nous établissons des estimées de dérivées pour les applications CR . Nous utilisons ces estimées dans la cinquième partie pour mettre en évidence l'expansivité des systèmes dynamiques récurrents. Nous en déduisons immédiatement le théorème 1. Dans la sixième partie, nous adaptons les raisonnements précédents pour obtenir le théorème 2. Enfin, la septième partie traite des domaines disqués et contient la preuve du théorème 3.

Notations :

- $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ est l'ensemble des points de stricte pseudoconvexité de $b\Omega$.
- $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ est l'ensemble des points de faible pseudoconvexité de $b\Omega$.
- Si $x \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$, la composante connexe de x dans $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ est un compact de $b\Omega$ noté $\mathcal{FPC}(x)$.
- Si $p \in b\Omega$, $\vec{N}(p)$ est la normale à $b\Omega$ en p , dirigée vers l'intérieur de Ω .
- Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^k$, $\mathbb{D}(z_1, z_2)$ est le disque de $z_1 + \mathbb{C} \cdot (z_2 - z_1)$ de diamètre $[z_1, z_2]$.
- $\mathcal{C}(z_1, z_2) = b\mathbb{D}(z_1, z_2)$.
- $\mathcal{C}^\alpha(z_1, z_2)$ est l'arc de cercle de $\mathcal{C}(z_1, z_2) = b\mathbb{D}(z_1, z_2)$ centré en z_1 d'ouverture angulaire 2α .
- $\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$.
- d_{K_Ω} (ou d_K en l'absence d'ambiguïté) est la distance de Kobayashi dans Ω .

1 Dynamiques holomorphes dans un domaine.

Comme le montre le résultat suivant, la dynamique d'une application holomorphe d'un domaine dans lui-même est soumise à une alternative simple :

Théorème 1.1. *Si Ω est un domaine taut de \mathbb{C}^k et f est une application holomorphe de Ω dans lui-même alors :*

1. $d(f^n(z), b\Omega) \rightarrow 0$ localement uniformément

ou

2. *il existe une sous-variété holomorphe M de Ω et, parmi les limites de $(f^n)_n$, une rétraction holomorphe $\rho : \Omega \rightarrow M$ ($\rho \circ \rho = \rho$). De plus, $f|_M \in \text{Aut } M$ et toutes les limites de $(f^n)_n$ sont de la forme $\gamma \circ \rho$ où $\gamma \in \text{Aut } M$.*

Dans le premier cas nous dirons que la dynamique de f est *non-récurrente*, dans le second qu'elle est *récurrente*.

Nous renvoyons au livre de M. Abate [1] pour une démonstration de ce résultat (théorèmes 2.1.29 et 2.4.3). Soulignons que les domaines pseudoconvexes bornés à bord lisse sont taut.

Remarque 1.2. *Lorsque $\dim M < k$, on peut penser aux fibres de la rétraction comme aux variétés stables de f ; f échange ces fibres ($\rho \circ f = f \circ \rho$) et sa dynamique y est contractante. Comme les automorphismes sont des isométries pour la distance de Kobayashi, ceci ne peut se produire que lorsque f est non-injective. Par contre, lorsque la dimension de M est maximale, M coïncide avec Ω , ρ avec l'identité et f est un automorphisme de Ω .*

Décrivons quelques exemples de dynamique récurrente.

1. Exemples de Lattès. Dans la situation extrême où le rétract est de dimension nulle, la suite $(f^n)_n$ converge localement uniformément vers un point de Ω . Tel est le cas des applications polynomiales homogènes et non-dégénérées de \mathbb{C}^k car elles possèdent un bassin d'attraction superattractif à l'origine. Parmi celles-ci, un exemple particulièrement frappant, étudié par C. Dupont dans [15], est obtenu en relevant à \mathbb{C}^k un endomorphisme de Lattès de \mathbb{P}^{k-1} . Pour cet exemple, le bord du bassin superattractif est lisse et sphérique en dehors de la trace d'un ensemble algébrique.

2. Exemple de Yoccoz ; persistance des variétés stables. L'application $(w, z) \mapsto (w, wz + z^2)$ produit un rétract $(\mathbb{D} \times \{0\})$ de dimension 1 dans \mathbb{C}^2 et induit une auto-application propre sur le bassin d'attraction de celui-ci. Yoccoz montre par un argument élémentaire que, pour la plupart des $\xi \in b\mathbb{D}$, les variétés stables des $(w, 0)$ ne disparaissent pas quand w tend radialement vers ξ et produisent une trace analytique dans le bord. Il établit ainsi très simplement l'existence de disques de Siegel ([31]).

Ce phénomène de persistance des variétés stables est remarquable et on peut se demander s'il est général. Ceci entraînerait que le bord d'un domaine soutenant une dynamique récurrente de rétract non-trivial contient des variétés analytiques. La famille que nous décrivons maintenant montre que ce phénomène de persistance n'a pas toujours lieu. Elle est obtenue en perturbant l'exemple de Yoccoz.

3. La famille $f_\alpha = (we^{i2\pi\alpha}, wz + z^2)$; évanescence des variétés stables. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, définissons

$$f_\alpha : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (w, z) \longmapsto (we^{i2\pi\alpha}, wz + z^2)$$

$$\text{et } B_\alpha = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid f_{\alpha,2}^n(w, z) \longrightarrow 0\} \text{ où } f_\alpha^n := (f_{\alpha,1}^n, f_{\alpha,2}^n).$$

Le domaine B_α est pseudoconvexe et contenu dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}_2$. L'application f_α induit une application propre de B_α dans lui-même. On pourra observer que B_α contient le triangle $T := \{|w| + |z| < 1\}$ et que $f_\alpha(T) \subset T$, si bien que $B_\alpha = \cup f_\alpha^{-n}(T)$. La dynamique de f_α est récurrente sur B_α , la rétraction est donnée par $\rho(w, z) = (w, 0)$ et $M = \mathbb{D} \times \{0\}$. Pour tout $w \in \mathbb{D}$, nous noterons \mathcal{F}_w la fibre de ρ au dessus de $(w, 0)$.

Pour $\alpha = 0$, on retrouve l'exemple de Yoccoz et la fibre \mathcal{F}_w coïncide avec le bassin d'attraction de $z \mapsto wz + z^2$ à l'origine.

Nous allons voir, par un argument de catégories de Baire, que ces fibres disparaissent pour certaines valeurs de α . Plus précisément, *le rayon conforme* $r(\alpha, w)$ de \mathcal{F}_w en $(w, 0)$ tend vers 0 lorsque $|w|$ tend vers 1. A cet effet, introduisons les fonctions intermédiaires suivantes.

$$r(\alpha, w) := \sup \left\{ r \mid \exists \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \{w\} \times \mathbb{C}) \text{ t.q. } \begin{array}{l} i) \psi(0) = (w, 0) \text{ et } |\psi'(0)| = 1 \\ ii) \psi(\mathbb{D}_r) \subset \overline{B_\alpha} \end{array} \right\}.$$

On définit de même $\tilde{r}(\alpha, w)$ en remplaçant ii) par une condition moins contraignante :

$$\tilde{r}(\alpha, w) := \sup \left\{ r \mid \exists \psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r, \{w\} \times \mathbb{C}) \text{ t.q. } \begin{array}{l} i) \psi(0) = (w, 0) \text{ et } |\psi'(0)| = 1 \\ ii) f_\alpha^n(\psi(\mathbb{D}_r)) \subset \overline{\mathbb{D} \times \mathbb{D}_2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\}.$$

On pose ensuite

$$R(\alpha) := \inf_{w \in b\mathbb{D}} r(\alpha, w) \\ \tilde{R}(\alpha) := \inf_{w \in b\mathbb{D}} \tilde{r}(\alpha, w).$$

On vérifie facilement le lemme suivant :

Lemme 1.3. *Les fonctions $r(\alpha, \cdot)$, \tilde{r} et \tilde{R} sont semi-continues supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}$, $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{D}}$ et \mathbb{R} respectivement.*

L'intérêt de la fonction \tilde{r} est d'être semi-continue supérieurement en les deux variables. Notons que $r \leq \tilde{r}$ et $R \leq \tilde{R}$. Il s'agit d'exhiber des valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $r(\alpha, e^{i\theta}) = 0$ pour toute valeur de θ . Plus précisément,

Proposition 1.4. *Il existe un G_δ dense E de \mathbb{R} tel que $r(\alpha, e^{i\theta}) = 0$ pour tout $\alpha \in E$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.*

Preuve : Commençons par montrer que

$$\tilde{R} = 0 \text{ sur } \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Soit $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ et $w_0 = e^{i2\pi\beta}$, $\beta \in \mathbb{Q}$. L'itérée q -ième de f_α est de la forme $\tilde{f}_\alpha(w, z) := f_\alpha^q(w, z) = (w, P_w(z))$ où $P_w(z) = w^q z + \dots + z^{2^q}$. L'origine étant dans le Julia du polynôme P_{w_0} , elle adhère à son bassin d'attraction de l'infini. Ceci implique que $\tilde{r}(\alpha, w_0) = 0$ et donc que $\tilde{R}(\alpha) = 0$.

Vérifions maintenant que

$$r(\alpha, \cdot) \equiv R(\alpha) \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \quad (2)$$

Fixons pour cela w et w' dans $b\mathbb{D}$ et posons $w_n := we^{i2\pi n\alpha}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que

$$r(\alpha, w) \leq r(\alpha, w_n) \leq r(\alpha, w_{n+1}).$$

On en déduit, grâce à la semi-continuité supérieure de $r(\alpha, \cdot)$ et en choisissant une sous-suite w_{n_k} tendant vers w' , que $r(\alpha, w') \geq \overline{\lim} r(\alpha, w_{n_k}) \geq r(\alpha, w)$. Ainsi $r(\alpha, \cdot)$ est constante et coïncide avec $R(\alpha)$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'ensemble E . Puisque \tilde{R} est semi-continue supérieurement, $\{\tilde{R} = 0\}$ est un G_δ dont la densité résulte de (1). Par le théorème de Baire, $E := \{\tilde{R} = 0\} \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est également un G_δ dense. D'après (2), on a $r(\alpha, e^{i\theta}) = R(\alpha) \leq \tilde{R}(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in E$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$. \square

2 Préliminaires.

2.1 Structure des applications holomorphes propres.

Nous présentons ici les propriétés connues des applications holomorphes propres qui nous seront utiles. Si F est une application holomorphe propre entre deux domaines de \mathbb{C}^k , nous noterons V_F son lieu de branchement. C'est l'ensemble d'annulation du Jacobien de F .

La première propriété, pour laquelle nous renvoyons à [26], décrit la structure de ces applications en terme de revêtements :

Théorème 2.1. *Si $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est une application holomorphe propre entre deux domaines bornés de \mathbb{C}^k alors F est un revêtement ramifié fini, c'est-à-dire :*

- i) F est surjective et ouverte,
- ii) V_F et $F(V_F)$ sont des ensembles analytiques de codimension 1,
- iii) $F : \Omega_1 \setminus F^{-1}(F(V_F)) \rightarrow \Omega_2 \setminus F(V_F)$ est un revêtement fini de degré d . Pour tout $z \in \Omega_2$, $\text{Card } F^{-1}(z) < d$ si et seulement si $z \in F(V_F)$.

Ainsi, lorsque le domaine Ω_2 est simplement connexe, il suffit pour que F soit injective qu'elle ne branche pas ($V_F = \emptyset$). Pour les auto-applications, la simple connexité peut être remplacée par une hypothèse de régularité du bord :

Lemme 2.2 (Pinchuk [24]). *Si $F : \Omega \rightarrow \Omega$ est une auto-application holomorphe propre d'un domaine borné à bord lisse alors F est un automorphisme de Ω si et seulement si $V_F = \emptyset$.*

Notre approche consistant à étudier le système dynamique engendré par la restriction de F à $b\Omega$ ou tout au moins à $\mathcal{SPC}(b\Omega)$, nous utiliserons les résultats de prolongement suivants :

Théorème 2.3 (Bell [5]). *Toute application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de \mathbb{C}^k à bords lisses se prolonge différentiablement à $\mathcal{SPC}(b\Omega_1)$.*

Théorème 2.4 (Boas-Straube [10]). *Soit $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de \mathbb{C}^k à bords lisses. Si Ω_1 possède une fonction p.s.h lisse et définissante globale alors F s'étend en une application lisse de $\overline{\Omega_1}$.*

Diederich et Fornaess ont montré pourquoi la stricte pseudoconvexité est une obstruction au branchement (voir [14] lemme 4). Il s'agit d'une observation fondamentale que nous incorporons à la proposition suivante (assertion ii) :

Proposition 2.5. *Soit $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application holomorphe propre entre domaines pseudoconvexes bornés de \mathbb{C}^k à bords lisses. Si $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_1})$ alors :*

- i) $F : b\Omega_1 \rightarrow b\Omega_2$ est surjective,
- ii) $F(\mathcal{SPC}(b\Omega_1)) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$ et $\overline{V_F} \cap \mathcal{SPC}(b\Omega_1) = \emptyset$.
- iii) $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega_1)$ et $F(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2) \implies \eta \in \overline{V_F}$.

Il est facile de préciser la structure des restrictions au bord des applications holomorphes propres qui fixent le lieu de faible pseudoconvexité. Ceci nous sera utile dans l'étude des domaines disqués.

Proposition 2.6. *Soit $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ vérifiant les hypothèses de la proposition 2.5. Si de surcroît $F(\mathcal{FPC}(b\Omega_1)) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega_2)$ alors*

- i) $F^{-1}(\mathcal{FPC}(b\Omega_2)) = \mathcal{FPC}(b\Omega_1)$, $F(\mathcal{FPC}(b\Omega_1)) = \mathcal{FPC}(b\Omega_2)$ et
- ii) $F : \mathcal{SPC}(b\Omega_1) \rightarrow \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$ est un revêtement fini de même degré que $F|_{\Omega_1}$.

Expliquons brièvement le point ii). Notons d le degré de F dans Ω . Puisque l'application $F : \mathcal{SPC}(b\Omega_1) \rightarrow \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$ est un difféomorphisme local, il suffit de vérifier que $\text{Card } F^{-1}(p) = d$ pour tout $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$. Montrons que

$$\text{Card } F^{-1}(p) \geq d \quad \forall p \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2). \quad (3)$$

Soit $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$. Puisque $F(\mathcal{FPC}(b\Omega)) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$, la deuxième assertion de la proposition précédente montre que $p \notin \overline{F(V_F)}$. Il existe donc une suite p_n de $\Omega_2 \setminus F(V_F)$ tendant vers p . Chaque p_n a d préimages distinctes par F que nous noterons x_n^i , $1 \leq i \leq d$. Comme F est continue sur Ω_1 , $(x_n^i)_n$ tend vers $b\Omega_1$ pour tout i . Toute valeur d'adhérence des suites $(x_n^i)_n$ est une préimage de p . Comme $p \notin \overline{F(V_F)}$, $x_{\phi(n)}^i$ et $x_{\phi(n)}^j$ ne peuvent avoir même limite pour $i \neq j$. Le nombre de valeurs d'adhérence des $(x_n^i)_n$ est donc au moins d , ce qui établit (3). L'inégalité $\text{Card } F^{-1}(p) \leq d$ s'obtient facilement de manière analogue. L'application $F : \mathcal{SPC}(b\Omega_1) \rightarrow \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$ est donc un difféomorphisme local à fibres finies de cardinal constant égal à d . Il s'ensuit que F est un revêtement de degré d .

2.2 Distance CR.

Nous utiliserons une distance adaptée à la géométrie CR introduite par Nagel, Stein et Wainger [22]. Soit S une sous-variété lisse de \mathbb{C}^k , x et y deux points de S . On appelle chemin complexe entre x et y tout chemin $\gamma : [0, l] \rightarrow S$ joignant x à y , C^1 par morceaux, et tel que $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}^{\mathbb{C}} S$ là où cela fait sens. On note $\ell(\gamma)$ la longueur euclidienne d'un tel chemin. Pour $x, y \in S$, on définit la distance CR entre x et y par :

$$d_S^{\text{CR}}(x, y) := \inf\{\ell(\gamma), \gamma \text{ chemin complexe entre } x \text{ et } y\}.$$

En l'absence d'ambiguïté, on ne précisera pas la dépendance en S de d^{CR} . Les boules correspondantes de centre x et de rayon δ sont notées $B^{\text{CR}}(x, \delta)$.

La proposition suivante est bien connue (voir par exemple [22]).

Proposition 2.7. *Soit S une hypersurface lisse minimale de \mathbb{C}^k (i.e. ne contenant pas de germe d'hypersurface holomorphe). La topologie associée à la distance CR sur S coïncide avec la topologie usuelle sur S . En particulier, toute hypersurface compacte connexe et minimale est d^{CR} -bornée.*

En voici une preuve rapide. Il est clair que la distance CR est supérieure à la distance euclidienne, ou encore que $B^{\text{CR}}(x, \delta) \subset B(x, \delta)$. Il suffit donc de trouver δ' tel que $B^{\text{CR}}(x, \delta) \supset B(x, \delta')$. Si S est minimale, la distribution d'hyperplans $T^{\mathbb{C}} S$ dans TS n'est intégrable en aucun point. En effet, une hypersurface intégrale de cette distribution de plans serait une variété de \mathbb{C}^k dont les plans tangents sont complexes et serait holomorphe d'après un théorème de Levi-Civita ([11]). La boule $B^{\text{CR}}(x, \delta)$ est alors ouverte pour la topologie usuelle sur S et contient donc une boule $B(x, \delta')$ si δ' est suffisamment petit. \square

Nous utiliserons aussi une version plus sophistiquée de cette proposition (voir [7]) :

Proposition 2.8. *Toute hypersurface de \mathbb{C}^k compacte connexe sans bord est d^{CR} -bornée.*

L'intérêt principal de cette distance est d'être dilatée par toute application CR dont l'application tangente est dilatante sur $T^{\mathbb{C}} S$. Précisément,

Proposition 2.9. *Soient S_1 et S_2 deux hypersurfaces lisses et minimales de \mathbb{C}^k . Soit $F : S_1 \rightarrow S_2$ une application CR qui est un difféomorphisme local en tout point de S_1 . Alors, pour toute boule $B^{\text{CR}}(x, r)$ relativement compacte dans S_1 , on a :*

$$\left(\|F'(q)u\| \geq C\|u\|, \forall q \in B^{\text{CR}}(x, r), \forall u \in T_q^{\mathbb{C}} S_1 \right) \implies F(B^{\text{CR}}(x, r)) \supset B^{\text{CR}}(F(x), Cr).$$

Preuve : Si $F(B^{\text{CR}}(x, r)) = S_2$ la propriété est vraie, on suppose donc que $F(B^{\text{CR}}(x, r)) \neq S_2$. Comme F est un difféomorphisme local, F est ouverte et il suffit de voir que

$$d^{\text{CR}}(F(x), bF(B^{\text{CR}}(x, r))) \geq Cr.$$

Soit donc $z \in bF(B^{\text{CR}}(x, r))$ et γ un chemin complexe entre $F(x)$ et z paramétré par la longueur d'arc, de longueur $\ell(\gamma) \leq d^{\text{CR}}(F(x), z) + \epsilon$. Comme F est un difféomorphisme CR local en tout point de S_1 , on relève γ en un chemin complexe $\tilde{\gamma}$ tant que $\tilde{\gamma}$ ne sort pas de $B^{\text{CR}}(x, r)$. Autrement dit, il existe $\tilde{l} \leq \ell(\gamma)$ et $[\tilde{0}, \tilde{l}] \rightarrow B^{\text{CR}}(x, r)$ joignant x à $bB^{\text{CR}}(x, r)$ tels que $F \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, \tilde{l}]$. Alors

$$\begin{aligned} d^{\text{CR}}(F(x), z) + \epsilon &\geq \ell(\gamma) \geq \tilde{l} = \int_0^{\tilde{l}} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^{\tilde{l}} \|F'(\tilde{\gamma}(t))\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \\ &\geq C \int_0^{\tilde{l}} \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt \geq C\tilde{l} \gtrsim Cr \text{ puisque } \tilde{\gamma}(\tilde{l}) \in bB^{\text{CR}}(x, r). \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient bien $d^{\text{CR}}(F(x), z) \geq Cr$. □

Concluons cette partie en précisant l'allure de $B_{b\Omega}^{\text{CR}}(x, \epsilon)$ lorsque Ω est un domaine de \mathbb{C}^k à bord lisse et p un point de stricte pseudoconvexité de son bord. Il s'agit d'un cas particulier très simple du théorème 4 de [22].

Proposition 2.10. *Soit $p \in \text{SPC}(b\Omega)$. Il existe deux fonctions positives τ_1, τ_2 définies sur \mathbb{R}_+^* et deux constantes $\tau_0, \epsilon_0 > 0$ telles que*

$$\forall \tau < \tau_0, \forall \epsilon \leq \epsilon_0, U_{\epsilon, \tau_1(\tau)} \subset B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \subset U_{\epsilon, \tau_2(\tau)}.$$

De plus, on peut prendre τ_2 tendant vers 0 avec τ .

Cet énoncé permet de substituer aux boules CR des objets plus maniables que nous allons décrire précisément.

Pour $p \in b\Omega$, $\vec{N}(p)$ désigne la normale rentrante à $b\Omega$ en p . Quitte à changer de coordonnées, le domaine Ω est strictement convexe sur un voisinage O de p , et est donné par

$$\Omega \cap O = \{(w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k-1} \text{ t.q. } \text{Re } w \geq |z|^2 + a(\text{Im } w, z)\} \\ \text{où } a(v, z) \in O(v^2, |z|^3)$$

(dans ces coordonnées, si $w = u + iv$, on a $p = (0, 0)$ et $\vec{N}(p) = \partial/\partial u$).

Comme $\Omega \cap O$ est convexe, on peut définir une projection π de $O \cap \Omega$ sur $O \cap b\Omega$ dans la direction $\vec{N}(p)$. Elle est donnée dans les coordonnées ci-dessus par :

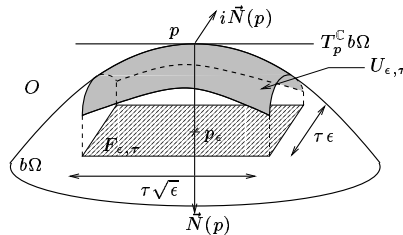
$$\pi(u + iv, z) = (|z|^2 + a(v, z) + iv, z).$$

Rappelons que $T_p b\Omega = T_p^{\mathbb{C}} b\Omega \oplus \text{Vect}_{\mathbb{R}}(i\vec{N}(p))$. Nous notons $B^{t, \mathbb{C}}(p, r)$ la boule de centre 0 et de rayon r dans $T_p^{\mathbb{C}} b\Omega$ et $B^{t, \mathbb{R}}(p, r)$ le segment de centre 0 et de rayon r dans $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(i\vec{N}(p))$. Ceci étant posé nous sommes en mesure de formuler la

Définition 2.11.

$$p_\epsilon := p + \epsilon \vec{N}(p) \\ F_{\epsilon, \tau} := p_\epsilon + B^{t, \mathbb{C}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \times B^{t, \mathbb{R}}(p, \tau\epsilon) \\ U_{\epsilon, \tau} := \pi(F_{\epsilon, \tau}).$$

Signalons dès à présent que ϵ est destiné à tendre vers 0 alors que τ est un paramètre de contrôle qui sera fixé. Ces ensembles sont définis dès que ϵ est suffisamment petit et τ plus petit que 1.



2.3 Quelques estimations de la métrique de Kobayashi.

Nous utiliserons les estimations usuelles suivantes :

Lemme 2.12. *Soit Ω un domaine borné à bord lisse de \mathbb{C}^k et p un point de stricte pseudoconvexité de $b\Omega$. On reprend les coordonnées et les notations introduites à la fin de la partie précédente.*

Il existe $\tau_0, \epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\tau < \tau_0$ et $\epsilon < \epsilon_0$:

- i) pour $z \in F_{\epsilon, \tau}$, le disque $\Delta(z)$ de centre z et de rayon $\|z - \pi(z)\|$ dans $z + \text{Vect}_{\mathbb{C}}(z - \pi(z))$ est inclus dans Ω ,*
- ii) $\text{Diam}_{K_{\Omega}}(F_{\epsilon, \tau}) \leq \psi_1(\tau)$ où $\psi_1(\tau)$ tend vers 0 avec τ ,*
- iii) pour $z \in F_{\epsilon, \tau}$, $\text{Diam}_{K_{\Omega}}(\mathcal{C}^{\alpha}(z, \pi(z))) \leq \psi_2(\alpha)$ où $\psi_2(\alpha)$ tend vers 0 avec α .*

Preuve :

- i) C'est évident car le bord de Ω est lisse.
- ii) Effectuons une remise à l'échelle en p de paramètre ϵ , *i.e.* considérons le domaine $\Omega_{\epsilon} = \Lambda_{\epsilon}(\Omega)$ où $\Lambda_{\epsilon}(w, z) = (\frac{w}{\epsilon}, \frac{z}{\sqrt{\epsilon}})$. On a

$$F_{1, \tau} := \Lambda_{\epsilon}(F_{\epsilon, \tau}) = \{(w, z) \in \mathbb{C}^k, \text{Re } w = 1, |\text{Im } w| \leq \tau, |z| \leq \tau\}.$$

Un calcul très simple (voir [23]) montre que $\tilde{\Omega}_{\epsilon}$ tend vers $\Sigma := \{\text{Re } w \geq |z|^2\}$ au sens de Hausdorff lorsque ϵ tend vers 0. Comme $B := B((1, 0), 1/2) \Subset \Sigma$, il s'ensuit que $B \subset \tilde{\Omega}_{\epsilon}$ pour $\epsilon \leq \epsilon_1$ lorsque ϵ_1 est suffisamment petit. Puis $F_{1, \tau} \subset B$ pour $\tau \leq \tau_2$ où τ_2 est assez petit. Ainsi, pour $\tau < \tau_2$ et $\epsilon < \epsilon_1$, on a

$$\text{Diam}_{K_{\Omega}}(F_{\epsilon, \tau}) = \text{Diam}_{K_{\Omega_{\epsilon}}}(F_{1, \tau}) \leq \text{Diam}_{K_B}(F_{1, \tau})$$

et il suffit de prendre $\psi_1(\tau) := \text{Diam}_{K_B}(F_{1, \tau})$.

- iii) D'après i), $\Delta(z)$ est inclu dans Ω pour $\epsilon \leq \epsilon_1$. Donc

$$\text{Diam}_{K_{\Omega}}(\mathcal{C}^{\alpha}(z, \pi(z))) \leq \text{Diam}_{K_{\Delta(z)}}(\mathcal{C}^{\alpha}(z, \pi(z))) \leq \text{Diam}_{K_{\mathbb{D}_1}}(\mathbb{D}_{\alpha})$$

et il suffit de prendre $\psi_2(\alpha) := \text{Diam}_{K_{\mathbb{D}_1}}(\mathbb{D}_{\alpha})$.

□

2.4 Lemme de Hopf.

Le très classique lemme de Hopf nous permettra d'estimer les dérivées normales des applications holomorphes propres. En voici une version adaptée à nos besoins :

Lemme 2.13 (Hopf). *Soit $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(\overline{\mathbb{D}_r})$ une fonction sous-harmonique et négative sur \mathbb{D}_r telle que $\chi(-r) = 0$ et $\chi(re^{i\theta}) \leq -1$ pour $\theta \in [-\alpha, \alpha]$. Alors $\chi(-r+t) \leq -\frac{\alpha t}{4\pi r}$ pour $t \leq r$ et donc $\|\vec{\nabla}\chi(-r)\| \geq \frac{\alpha}{4\pi r}$.*

Preuve : Il s'agit d'un calcul facile sur le noyau de Poisson.

$$\begin{aligned} \chi(-r+t) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r^2 - (r-t)^2}{|-r+t - re^{i\theta}|^2} \chi(re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq -\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{r^2 - (r-t)^2}{|-r+t - re^{i\theta}|^2} d\theta \leq -\frac{\alpha t(2r-t)}{\pi 4r^2} \leq -\frac{\alpha t}{4\pi r}. \end{aligned}$$

□

3 Une situation modèle : le bassin d'un point attractif.

Il s'agit du cas où la dynamique de l'application est récurrente et le rétract de dimension nulle. Ceci est impossible lorsque le bord du domaine est trop régulier. Plus précisément,

Théorème 3.1. *Un domaine borné de \mathbb{C}^k à bord lisse minimal possédant une fonction p.s.h définissante globale χ et dont le bord est minimal ne peut être le bassin d'attraction de l'un de ses points pour une transformation holomorphe.*

La démonstration permet d'illustrer les méthodes utilisées dans cet article tout en évitant les difficultés techniques liées au cas général. En voici le principe. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre telle que $(f^n)_n$ converge localement uniformément vers $a \in \Omega$. Il suffit pour aboutir à une contradiction de montrer que f est un automorphisme c'est-à-dire que f est injective. On voit dans un premier temps que la suite f^n présente un "défaut" d'équicontinuité dans la direction normale au voisinage de $b\Omega$. On en déduit que les dérivées de f^n évaluées sur les directions tangentielles complexes explosent sur $\mathcal{SPC}(b\Omega)$. Il s'ensuit que $b\Omega = \mathcal{SPC}(b\Omega)$ et donc que f est injective. Voyons cela plus en détail.

Introduisons quelques notations. Soit U un ouvert de $b\Omega$ relativement compact dans $\mathcal{SPC}(b\Omega)$, p un point de U et $\tau > 0$ un réel tel que $B^{\text{CR}}(p, \tau) \subset U$. Rappelons que f se prolonge en une application lisse de $\bar{\Omega}$ (théorème 2.4). Pour $q \in b\Omega$, nous notons

$$n_q(f^n) := \langle f^{n'}(q)\vec{N}(q), \vec{N}(f^n(q)) \rangle.$$

Cette quantité mesure le "taux d'échappement dans la direction normale" de f^n .

Fait 1 : *La suite $n_q(f^n)$ tend vers l'infini uniformément sur $b\Omega$.*

Preuve : Soit une coquille $A_\epsilon := \bigcup_{q \in b\Omega} B(q, \epsilon/2)$ d'épaisseur $\epsilon/2$. Pour $n \geq n_\epsilon \gg 1$, on a $f^n(A_\epsilon) \subset \{\chi \leq \chi(a)/2\}$. Le lemme de Hopf appliqué à $\chi \circ f^n|_{\mathbb{D}(q, \epsilon)}$ montre que $\|\vec{\nabla}\chi \circ f^n\| \gtrsim 1/\epsilon$ pour $n \geq n_1$. Ceci suffit car $n_q(f^n) \simeq \|\vec{\nabla}\chi \circ f^n\|$:

$$\|\vec{\nabla}\chi \circ f^n\| = \langle \vec{\nabla}\chi \circ f^n(q), \vec{N}(q) \rangle = \langle \vec{\nabla}\chi(f^n(q)), f^{n'}(q)\vec{N}(q) \rangle \simeq n_q(f^n).$$

□

Fait 2 : *Il existe une constante $c > 0$ telle que l'inégalité*

$$\|F'(q)u\| \geq cn_q(F)^{1/2}\|u\| \quad \forall q \in U, \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$$

ait lieu pour toute auto-application F holomorphe propre de Ω .

Preuve : Comme $U \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$, il existe une constante κ telle que pour toute fonction p.s.h définissante globale ψ de Ω ,

$$\mathcal{L}(\psi, q, u) \geq \kappa \|\vec{\nabla}\psi(q)\| \|u\|^2 \quad \forall q \in U, \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega.$$

Nous avons remarqué que $\|\vec{\nabla}\chi \circ F\| \simeq n_q(F)$ lorsque F est une auto-application holomorphe propre de Ω . Ainsi, $\mathcal{L}(\chi \circ F, q, u) \gtrsim n_q(F)\|u\|^2$. Or $\mathcal{L}(\chi \circ F, q, u) = \mathcal{L}(\chi, F(q), F'(q)u) \lesssim \|F'(q)u\|^2$ puisque $b\Omega$ est lisse. On obtient donc finalement :

$$\|F'(q)u\| \gtrsim n_q(F)^{1/2}\|u\|.$$

□

Conclusion : On voit à l'aide des faits 1 et 2 que $\|f^{n'}(q)u\|$ tend vers l'infini uniformément sur $\{(q, u) \in U \times T_q^{\mathbb{C}}b\Omega, \|u\| = 1\}$. La proposition 2.9 montre alors que $f^n(B^{\text{CR}}(p, \tau))$ contient des boules CR aussi grandes que souhaité pourvu que n soit assez grand. Comme $b\Omega$ est d^{CR} -bornée (proposition 2.8), il existe un entier n_0 tel que $f^{n_0}(B^{\text{CR}}(p, \tau)) = b\Omega$. D'après la propriété 2.5.ii), $b\Omega$ est strictement pseudoconvexe et f est un biholomorphisme. \square

4 Dérivées au bord des applications holomorphes propres.

L'objet de cette partie est d'estimer les dérivées au bord d'auto-applications holomorphes propres à partir de leur dynamique à l'intérieur du domaine.

4.1 Dérivées normales.

Nous estimons ici les dérivées normales. Plus précisément, nous minorons les quantités

$$n_q(f^n) := \langle f^{n'}(q)\vec{N}(q), \vec{N}(f^n(q)) \rangle$$

en fonction de la dynamique de f . Le lemme de Hopf fournit de telles estimations lorsqu'il existe des "barrières" *p.s.h* appropriées sur le domaine.

Dans l'étude de la dynamique récurrente (cinquième partie), nous supposons l'existence de fonctions définissantes globales *p.s.h*. Nous procéderons comme dans la preuve du Fait 1 de la situation modèle. Cependant, lorsque le rétract est de dimension positive, l'existence d'un compact contenant les images $f^n(A_\epsilon)$ des coquilles A_ϵ pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \geq n(\epsilon) \gg 1$ n'est plus assurée. Tout au plus trouverons nous une suite de points p_ϵ tendant normalement vers $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ et telle que $f^n(p_\epsilon) \in K \Subset \Omega$ pour $n \geq n(\epsilon)$. Dans ces conditions, nous ne contrôlerons plus $n_q(f^n)$ pour $q \in b\Omega$ mais seulement sur des boules CR du type $B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon})$. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ un domaine possédant une fonction *p.s.h* lisse et définissante globale χ . Soit $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Soit $F : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre lisse sur $\bar{\Omega}$. Il existe trois constantes $\epsilon_0, c, \tau > 0$ (indépendantes de F) telles que pour $\epsilon \leq \epsilon_0$:*

$$\chi(F(p_\epsilon)) \leq -1 \implies n_q(F) := \langle F'(q)\vec{N}(q), \vec{N}(F(q)) \rangle \geq \frac{c}{\epsilon} \quad \forall q \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}).$$

Preuve : On peut supposer $b\Omega$ convexe en p et utiliser les notations introduites dans la définition 2.11. Soit $\epsilon_0, \tau_0, \psi_1, \psi_2$ donnés par le lemme 2.12 et $\epsilon \leq \epsilon_0$. Supposons $\chi[F(p_\epsilon)] \leq -1$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\chi(z) \leq -1 \text{ et } d_K(x, z) \leq \delta \implies \chi(x) \leq -1/2.$$

Soient $0 < \tau_2 \leq \tau_0$ et $\alpha > 0$ tels que $\psi_1(\tau_2) + \psi_2(\alpha) < \delta$. Fixons $z \in F_{\epsilon, \tau_2}$. D'après le lemme 2.12, la distance de Kobayashi entre p_ϵ et tout point de $C^\alpha(z, \pi(z))$ est inférieure à δ . Puisque F contracte cette distance :

$$d_K(F(p_\epsilon), z') < \delta \quad \forall z' \in F(C^\alpha(z, \pi(z)))$$

et

$$\chi \circ F \leq -\frac{1}{2} \text{ sur } C^\alpha(z, \pi(z)).$$

Toujours d'après le lemme 2.12, $\mathbb{D}(z, \pi(z)) \subset \Omega$. Comme F est holomorphe propre, $\chi \circ F$ est une fonction *p.s.h* définissante de Ω . Appliquons alors le lemme de Hopf 2.13 à $\chi \circ F|_{\mathbb{D}(z, \pi(z))}$. Pour cela, notons $q := \pi(z)$, $r := \frac{\|z-q\|}{2}$ et $v := \frac{z-q}{\|z-q\|}$. Observons que $q \in U_{\epsilon, \tau_2}$. On a

$$\frac{\alpha}{4\pi r} \leq |d[\chi \circ F]_q \cdot v| = |d\chi(F(q)) \cdot F'(q)v| = |\langle \vec{\nabla} \chi(F(q)), F'(q)v \rangle|.$$

En remarquant que $r \leq \epsilon/2$ (par convexité) et en écrivant $v = a\vec{N}(q) + u$ où $0 \leq a \leq 1$ et $u \in T_q b\Omega$, il vient :

$$\begin{aligned} \left| \langle \vec{\nabla} \chi(F(q)), F'(q)v \rangle \right| &= \|\vec{\nabla} \chi(F(q))\| \langle \vec{N}(F(q)), aF'(q)\vec{N}(q) + F'(q)u \rangle \\ &= a\|\vec{\nabla} \chi(F(q))\| \langle \vec{N}(F(q)), F'(q)\vec{N}(q) \rangle. \end{aligned}$$

On a obtenu :

$$n_q(F) \geq \frac{\alpha}{2\pi\epsilon\|\vec{\nabla} \chi\|_\infty} = \frac{c}{\epsilon}, \quad \forall q \in U_{\epsilon, \tau_2}.$$

La constante c est indépendante de F . Il suffit de prendre τ tel que $\tau_2(\tau) \leq \tau_2$ pour avoir le résultat annoncé puisqu'alors $B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon}) \subset U_{\epsilon, \tau_2}$ en vertu de la proposition 2.10. \square

Dans l'étude de la dynamique non-récurrente (sixième partie), nous utiliserons des fonctions pics *p.s.h* et la

Proposition 4.2. *Soit Ω un domaine pseudoconvexe à bord lisse de \mathbb{C}^k et $F : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre lisse sur $\bar{\Omega}$. Soit $p \in b\Omega$. Supposons qu'il existe une fonction $\chi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ telle que*

- $\chi \leq 0$,
- $F(\mathcal{C}_\alpha(p_\epsilon, p)) \subset \{\chi \leq -1\}$,
- χ est nulle sur un voisinage de $F(p)$ dans $b\Omega$,
- χ est L -lipschitzienne en tout point d'un voisinage de $F(p)$ dans $b\Omega$.

Alors $n_p(F) \geq \frac{\alpha}{4\pi L\epsilon}$.

Preuve : On peut prolonger χ à un voisinage de $b\Omega$ tout en la conservant L -Lipschitzienne sur un voisinage de $F(p)$ dans $b\Omega$. Le lemme de Hopf 2.13 appliqué à $\chi \circ F$ dans $\mathbb{D}(p_\epsilon, p)$ montre que :

$$\chi \circ F(p + t\vec{N}(p)) \leq -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon} t.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} F(p + t\vec{N}(p)) &= F(p) + tF'(p)\vec{N}(p) + O(t^2) \\ &= F(p) + tn_p(F)\vec{N}(F(p)) + t\vec{R} + O(t^2) \end{aligned}$$

où \vec{R} est la projection orthogonale de $F'(p)\vec{N}(p)$ sur $T_{F(p)}b\Omega$. Il existe clairement un point q_t de $b\Omega$ tel que $F(p) + t\vec{R} = q_t + O(t^2)$. Si t est suffisamment petit, χ est L -lipschitzienne en q_t . On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{4\pi\epsilon} t \leq |\chi \circ F(p + t\vec{N}(p))| &= |\chi(q_t + tn_p(F)\vec{N}(F(p)) + O(t^2))| \\ &\leq |\chi(q_t)| + Ltn_p(F) + O(t^2) = Ltn_p(F) + O(t^2). \end{aligned}$$

On conclut en faisant tendre t vers 0. \square

4.2 Dérivées tangentielles complexes.

Il s'agit de transférer les estimations des dérivées normales aux dérivées tangentielles complexes. On utilise pour cela un argument standard reposant sur la stricte pseudoconvexité et la functorialité de la forme de Levi. Dans la situation modèle, ceci correspondait au Fait 2.

Lemme 4.3. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines pseudoconvexes bornés de \mathbb{C}^k à bords lisses et K un compact de $\mathcal{SPC}(b\Omega_1)$. Soit $F : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ une application holomorphe propre lisse sur $\overline{\Omega_1}$. Il existe une constante $c > 0$ (ne dépendant que de K) telle que :*

$$\|F'(q)u\| \geq cn_q(F)^{\frac{1}{2}}\|u\|, \quad \forall q \in K \text{ et } \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega.$$

De ce lemme, de la proposition 4.1 et de la proposition 2.9, on déduit immédiatement la proposition suivante :

Proposition 4.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ un domaine borné possédant une fonction p.s.h lisse et définissante globale χ . Soit $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Soit $F : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre lisse sur $\overline{\Omega}$.*

Il existe trois constantes $\epsilon_0, c, \tau > 0$ (indépendantes de F) telles que pour $\epsilon < \epsilon_0$ et $\chi \circ F(p_\epsilon) \leq -1$:

$$i) \|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}\|u\| \quad \forall q \in B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon}), \forall u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega$$

$$ii) F(B^{CR}(p, \tau\sqrt{\epsilon})) \supset B^{CR}(F(p), c\tau).$$

Preuve du lemme 4.3 : Soit c_2 le maximum des valeurs propres de la forme de Levi de $b\Omega_2$ et c_1 le minimum des valeurs propres de la forme de Levi de $b\Omega_1$ sur K . Si $q \in K$ alors $q \in \mathcal{SPC}(b\Omega_1)$ et $F(q) \in \mathcal{SPC}(b\Omega_2)$. En particulier, on peut trouver deux fonctions χ_1 et χ_2 définissant respectivement $b\Omega_1$ et $b\Omega_2$ au voisinage de q et $F(q)$ telles que $\vec{\nabla}\chi_1(q) = -\vec{N}(q)$ et $\vec{\nabla}\chi_2(F(q)) = -\vec{N}(F(q))$. Comme F est propre, $\chi_2 \circ F$ est une fonction définissante de $b\Omega_1$ au voisinage de q , il existe donc une fonction γ positive et lisse au voisinage de q telle que $\chi_2 \circ F = \gamma\chi_1$. Remarquons que $\gamma(q) = n_q(F)$. En effet,

$$\vec{\nabla}[\chi_2 \circ F](q) = \chi_1(q)\vec{\nabla}\gamma(q) + \gamma(q)\vec{\nabla}\chi_1(q) = -\gamma(q)\vec{N}(q)$$

donc

$$\begin{aligned} \gamma(q) &= -\langle \vec{\nabla}[\chi_2 \circ F](q), \vec{N}(q) \rangle \\ &= -\langle \vec{\nabla}\chi_2(F(q)), F'(q)\vec{N}(q) \rangle \\ &= \langle \vec{N}(F(q)), F'(q)\vec{N}(q) \rangle = n_q(F). \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{L}(\phi, a, u)$ la forme de Levi en a d'une fonction ϕ , appliquée à un vecteur u . Si $u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega_1$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\chi_2 \circ F, q, u) &= \mathcal{L}(\chi_2, F(q), F'(q)u) \\ &= \mathcal{L}(\gamma\chi_1, q, u). \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{L}(\gamma\chi_1, q, u) = \gamma(q)\mathcal{L}(\chi_1, q, u)$ pour tout q de $b\Omega_1$ et tout $u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega_1$, il vient

$$c_2\|F'(q)u\|^2 \geq \mathcal{L}(\chi_2, F(q), F'(q)u) = \gamma(q)\mathcal{L}(\chi_1, q, u) \geq c_1n_q(F)\|u\|^2.$$

On a donc $\|F'(q)u\| \geq cn_q(F)^{\frac{1}{2}}\|u\|$, où $c = \sqrt{c_1c_2^{-1}}$. □

5 Dynamique récurrente et expansivité au bord.

L'objet de cette partie est de démontrer le théorème 1.

5.1 Lemme des matriochkas.

Le lemme suivant montre en quoi une dynamique récurrente dans Ω s'accompagne d'un comportement expansif sur les régions strictement pseudoconvexes de $b\Omega$. Concrètement, nous ne ferons qu'appliquer la proposition 4.4 à une "matriochka" de boules CR centrées en p .

Lemme 5.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ un domaine borné possédant une fonction p.s.h lisse et définissante globale χ . Soit $p \in \text{SPC}(b\Omega)$. Soit $f_n : \Omega \rightarrow \Omega$ une suite d'applications holomorphes propres lisses sur $\overline{\Omega}$. Supposons qu'il existe des suites $t_k \rightarrow 0$ et $n_k \in \mathbb{N}$ telles que $f_n(p_{t_k}) \in \{\chi \leq -1\}$ pour tout $n \geq n_k$. Alors, pour tout $R > 0$ et tout voisinage U de p , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(U) \supset B^{\text{CR}}(f_n(p), R)$.*

Preuve : Soient ϵ_0, τ, c les constantes données par la proposition 4.4. Fixons un entier N supérieur à $2R/\tau c$. Choisissons alors successivement $\epsilon_N > \epsilon_{N-1} > \dots > \epsilon_1$ parmi les termes de la suite $(t_k)_k$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ de façon à ce que :

- $B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_N}) \subset U$ et $\epsilon_N < \epsilon_0$
- $\epsilon_i < \frac{\epsilon_{i+1}}{4}$
- $f_n(p_{\epsilon_i}) \in \{\chi \leq -1\} \quad \forall n \geq n_0$.

Pour $n \geq n_0$ donné, posons $F := f_n$. Il suffit d'établir par récurrence sur i que :

$$F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})) \supset B^{\text{CR}}(F(p), \frac{i c \tau}{2}) \text{ pour } 1 \leq i \leq N. \quad (\mathcal{P}_i)$$

D'après la proposition 4.4, si $q \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_1})$ et $u \in T_q^{\mathbb{C}} b\Omega$ alors $\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1}} \|u\|$. En appliquant la proposition 2.9, on a donc :

$$F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_1})) \supset B^{\text{CR}}(F(p), c\tau). \quad (\mathcal{P}_1)$$

Supposons l'inclusion (\mathcal{P}_i) satisfaite et établissons (\mathcal{P}_{i+1}) . Comme $\epsilon_i < \frac{\epsilon_{i+1}}{4}$, on a $B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2}) \subset B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_{i+1}})$ si $x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})$. Il vient donc

$$\|F'(q)u\| \geq \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{i+1}}} \|u\|, \quad \forall q \in \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2}), \quad \forall u \in T_q^{\mathbb{C}} b\Omega$$

et

$$\begin{aligned} F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_{i+1}})) &\supset \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} F(B^{\text{CR}}(x, \frac{\tau\sqrt{\epsilon_{i+1}}}{2})) \\ &\supset \bigcup_{x \in B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i})} B^{\text{CR}}(F(x), \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset \bigcup_{y \in F(B^{\text{CR}}(p, \tau\sqrt{\epsilon_i}))} B^{\text{CR}}(y, \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset \bigcup_{y \in B^{\text{CR}}(F(p), \frac{i c \tau}{2})} B^{\text{CR}}(y, \frac{c\tau}{2}) \\ &\supset B^{\text{CR}}(F(p), (i+1) \frac{c\tau}{2}). \end{aligned}$$

□

Nous observons maintenant que l'expansivité de la suite $(f_n)_n$ sur U force la stricte pseudoconvexité de $b\Omega$ et donc l'injectivité des f_n .

Proposition 5.2. *Lorsque $b\Omega$ est minimal alors, sous les hypothèses du lemme 5.1, les f_n sont des automorphismes de Ω .*

Preuve : D'après la proposition 2.8, $B^{\text{CR}}(\eta, R)$ contient $b\Omega$ pour tout η de $b\Omega$ pourvu que R soit supérieur au diamètre CR de $b\Omega$. Choisissons un voisinage U de p assez petit pour que $U \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$. D'après la proposition précédente, $b\Omega \subset f_n(U)$ pour n assez grand et donc $b\Omega$ est strictement pseudoconvexe. Le lemme 2.2 montre que les f_n sont des automorphismes. □

5.2 Preuve du théorème 1.

Commençons par rappeler qu'en vertu du théorème 2.4, f se prolonge en une application lisse à $\bar{\Omega}$. Raisonnons par l'absurde.

Si le rétract est un point, il s'agit d'un point fixe de f vers lequel $(f^n)_n$ converge localement uniformément. Soit p un point de stricte pseudoconvexité de $b\Omega$ et K un voisinage compact de a dans Ω . Pour tout ϵ , il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(p_\epsilon) \in K$ pour $n \geq n_\epsilon$.

Lorsque le rétract est une surface de Riemann M , son genre est fini puisqu'elle est obtenue par une rétraction ρ de Ω sur M . Considérons une sous-suite f^{n_i} tendant vers ρ . Pour $q \in b\Omega$, nous posons

$$\rho^*(q) := \bigcap_{t>0} \overline{\{\rho(q + u\vec{N}(q)), u \leq t\}}.$$

Il s'agit de l'ensemble des valeurs d'adhérences normales de ρ en q . Dans un mémoire sur les fonctions intérieures de la boule, Rudin montre que les limites radiales de ces fonctions sont denses dans le disque [27]. En adaptant la preuve de ce résultat (voir appendice), nous établissons le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soit Ω un domaine pseudoconvexe borné à bord lisse de \mathbb{C}^k , $k > 1$, et M une surface de Riemann de genre fini. Soit $\rho : \Omega \rightarrow M$ une application holomorphe. Il existe $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ et $x \in M$ tels que $x \in \rho^*(p)$.*

Soit alors $x \in M \subset \Omega$ le point donné par ce lemme, et p_{ϵ_k} une suite de points telle que $\rho(p_{\epsilon_k}) \rightarrow x$. Comme f a une dynamique récurrente, la suite $(f^n(x))_n$ est relativement compacte dans Ω et il existe $d > 0$ tel que $K := \overline{\bigcup_{n \geq 0} B_K(f^n(x), d)} \subset \Omega$. Comme f^{n_i} converge vers ρ , quitte à extraire, on a $f^{n_k}(p_{\epsilon_k}) \in B_K(x, d)$ et $f^n(p_{\epsilon_k}) \in K$ pour $n \geq n_k$.

Dans tous les cas, il existe un point de stricte pseudoconvexité p de $b\Omega$, un compact K de Ω et des suites $\epsilon_k \rightarrow 0$ et $n_k \in \mathbb{N}$ telles que $f^n(p_{\epsilon_k}) \in K$ pour $n \geq n_k$. On peut supposer que la fonction *p.s.h* définissante χ est inférieure à -1 sur K . La proposition 5.2 s'applique donc et montre que f est un biholomorphisme. Ceci est impossible (voir la remarque 1.2). □

6 Dynamique non-récurrente : transmission de la dynamique à $\mathcal{SPC}(b\Omega)$.

Nous montrons dans cette partie que la non-récurrente de la dynamique de f se transmet à celle de son extension à $\mathcal{SPC}(b\Omega)$. Nous reprenons pour cela la technique utilisée dans le cas récurrent. Il nous faut donc, en particulier, construire des fonctions *p.s.h* négatives sur Ω , strictement négatives sur un voisinage d'un point limite de $(f^n)_n$ dans $\overline{\Omega}$ et nulles sur de larges portions de $b\Omega$. Ceci n'est pas toujours possible. La classe de domaines permettant cette construction a été caractérisée dans un mémoire de Sibony [28]. Ces domaines sont connus sous le nom de domaines *B-réguliers*.

6.1 Domaines *LB-réguliers*.

Définition 6.1. *Un domaine pseudoconvexe borné Ω de \mathbb{C}^k à bord lisse est *B-régulier* si pour tout $p \in b\Omega$, il existe une fonction $\psi_p \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ vérifiant $\psi_p(p) = 1$ et $\psi_p(z) < 1$ pour $z \neq p, z \in \overline{\Omega}$.*

Sibony a montré dans [28] qu'il existe des fonctions *p.s.h* de trace au bord prescrite sur tout domaine *B-régulier*. En particulier, ces domaines admettent des fonctions antipics en tout point du bord. Elles sont exploitables dans notre cadre de travail lorsqu'elles sont lipschitziennes, ce dont on peut s'assurer en se restreignant à la classe de domaines suivante :

Définition 6.2. *Un domaine pseudoconvexe borné Ω de \mathbb{C}^k est dit *LB-régulier* si Ω est *B-régulier* et si pour tout compact K de $b\Omega$, il existe une fonction localement bornée $C_K \geq 0$ telle que les fonctions pics ψ_p négatives sur K soient $C_K(p)$ -lipschitziennes pour tout $p \in b\Omega \setminus K$.*

Exemples :

- Les domaines strictement géométriquement convexes sont *LB-réguliers*.
- Les domaines de type fini de \mathbb{C}^2 sont *LB-réguliers* ([16]).

Remarque 6.3. *Le bord d'un domaine *LB-régulier* ne contient pas de disque analytique.*

Proposition 6.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ un domaine *LB-régulier*. Pour U, V ouverts de $b\Omega$ tels que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, il existe une constante $C = C(U, V)$ et une fonction $\chi_{U, V} \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que :*

- i) $\chi_{U, V} = -1$ sur U
- ii) $\chi_{U, V} = 0$ sur V
- iii) $\chi_{U, V} \leq 0$ sur Ω
- iv) $\chi_{U, V}$ est C -lipschitzienne sur V .

Preuve : Soient U_1 tel que $U \Subset U_1 \Subset b\Omega \setminus V$ et $C := \sup\{C_{\overline{U_1}}(p), p \in V\}$ où $C_{\overline{U_1}}$ est la fonction donnée par la définition 6.2. Soit $u \in C^0(b\Omega)$ telle que $-1 \leq u \leq 0$, $u = 0$ sur $b\Omega \setminus U_1$, $u = -1$ sur U . Un domaine *LB-régulier* étant en particulier *B-régulier* au sens de Sibony, il existe $\chi \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que $\chi|_{b\Omega} = u$ (auquel cas χ vérifie évidemment i), ii) et iii)) (voir [28]). De plus, χ est donnée par :

$$\chi = \sup\{v \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), v|_{b\Omega} \leq u\}.$$

Montrons que χ vérifie iv). Soit $p \in V$ et ψ_p la fonction C -Lipschitzienne associée à p , $\overline{U_1}$ par la définition 6.2. Par construction, $u \geq (\psi_p - 1)|_{b\Omega}$, donc $0 \geq \chi \geq \psi_p - 1$. Pour $z \in \Omega$,

$$|\chi(z) - \chi(p)| = |\chi(z)| \leq |\psi_p(z) - 1| = |\psi_p(z) - \psi_p(p)| \leq C\|z - p\|$$

et χ est bien C -lipschitzienne en p . □

6.2 Preuve du théorème 2.

Lorsque le bord contient au moins deux points de faible pseudoconvexité, les dynamiques sur Ω et sur $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ sont fortement corrélées :

Fait : *Sous les hypothèses du théorème 2, considérons une sous-suite f^{n_k} tendant vers $a \in b\Omega$. Alors $f|_{\mathcal{SPC}(b\Omega)}^{n_k} \rightarrow a$.*

Voyons tout d'abord comment conclure la preuve du théorème 2 à partir de ce Fait. Comme les limites de $(f^n)_n$ sont des points de $b\Omega$ (remarque 6.3), on a l'alternative :

- Soit une sous-suite tend vers $a \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ sur Ω . Comme $f^{n_k+1}(z) = f^{n_k}(f(z))$ converge à la fois vers $f(a)$ et a pour $z \in \Omega$, le point a est fixé par f . Le Fait assure par contre que l'orbite de a accumule toutes les limites de $(f^n)_n$ puisque $a \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Donc

$$(f^n)_n \text{ converge vers } a \text{ sur } \Omega \text{ et sur } \mathcal{SPC}(b\Omega). \quad (4)$$

Pour tout point non-errant $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$, il existe une suite $n_k \in \mathbb{N}$ telle que $f^{n_k}(p)$ tend vers p . D'après (4), $p = a$ et donc $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega) \cup \{a\}$.

- Soit toutes les valeurs d'adhérence sont des points de $\mathcal{FPC}(b\Omega)$. Soit $a \in b\Omega$ adhérent à l'orbite d'un point $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Quitte à procéder à une double extraction, on peut supposer que $f^{n_k}(p)$ tend vers a et que f^{n_k} converge sur Ω . Le Fait montre alors que f^{n_k} tend vers a donc que $a \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$. Ceci montre que $NW(f|_{b\Omega}) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$. □

Preuve du Fait : Raisonnons par l'absurde. Soit $p \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ tel que $f^{n_k}(p)$ ne tend pas vers a . Soit $d > 0$ tel que $B := B^{\text{CR}}(p, d) \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$. On peut supposer que $(f^{n_k}(p))_k$ reste dans un ouvert V de $b\Omega$ qui n'adhère pas à a . Montrons que $b\Omega \setminus \{a\} \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$. En vertu de la proposition 2.5, il suffit d'établir l'existence d'un entier n tel que $f^n(B) \supset b\Omega \setminus V$ puisque V est un ouvert arbitrairement gros de $b\Omega \setminus \{a\}$. Considérons un voisinage U de a tel que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$ et $\chi_{U,V}$ la fonction donnée par la proposition 6.4.

Comme $(f^{n_k})_k$ converge vers a sur Ω , il existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$f^{n_\epsilon} \left(\bigcup_{q \in B} \mathcal{C}_{\frac{\epsilon}{2}}(q_\epsilon, q) \right) \subset \{ \chi_{U,V} < -\frac{1}{2} \}.$$

D'après la proposition 4.2, $n_q(f^{n_\epsilon}) \gtrsim \epsilon^{-1}$ pour tout $q \in B$ tel que $f^{n_\epsilon}(q) \in V$. Comme $B \Subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$, la propriété 4.3 montre donc :

$$f^{n_\epsilon}(q) \in V \implies \|f_n'(q)u\| \gtrsim \epsilon^{-\frac{1}{2}} \quad \text{sur } \{(q, u), q \in B, u \in T_q^{\mathbb{C}}b\Omega\}.$$

Supposons qu'il existe $y \in bf^{n_\epsilon}(B) \cap V$. Soit $\gamma : [0, 1] \mapsto V$ un chemin complexe entre $f^n(p)$ et y de longueur inférieure à $\text{diam}^{\text{CR}} V < +\infty$ (car \bar{V} est une hypersurface compacte minimale). Comme l'application f^{n_ϵ} est un difféomorphisme CR local en tout point de B , elle permet de relever γ en un chemin $\tilde{\gamma}$ dans B de même longueur.

est alors défini sur $[0, \tilde{l}]$ avec $\tilde{l} \leq 1$, à valeurs dans \bar{B} et de longueur $\ell(\tilde{\gamma})$.
Comme $f^{n_\epsilon} \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ est inclus dans V , on a :

$$\text{diam}^{\text{CR}} V \geq \ell(\gamma) \gtrsim \ell(\tilde{\gamma}) \epsilon^{-1} \quad \bar{l} \approx \epsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

C'est impossible, donc $bf^{n_\epsilon}(B) \cap V = \emptyset$. Comme $f^{n_\epsilon}(p) \in V$, ceci établit que $f^{n_\epsilon}(B) \supset V$. □

Remarque 6.5. *Si on remplace l'hypothèse d'existence de fonction définissante globale p.s.h par une hypothèse de LB-régularité, le théorème 1 reste valable.*

Preuve : Nous avons montré dans la partie 5.2 l'existence d'un point p de $\mathcal{SPC}(b\Omega)$, d'un compact K de Ω et de suites ϵ_k tendant vers 0 et $n_k \in \mathbb{N}$ tels que $f^n(p_{\epsilon_k}) \in K$ pour tout $n \geq n_k$.

Soient alors deux points distincts a_i ($i = 1, 2$) de $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ et des voisinages compacts V_i de a_i tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Soit $\chi_i \in PSH(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ telle que

- $\chi_i(a_i) = -2$,
- $\chi_i = 0$ sur $b\Omega \setminus V_i$,
- $\chi_i \leq 0$,
- χ_i est C -lispchitzienne sur $b\Omega \setminus V_i$.

On peut de plus supposer que $\chi_i \leq -1$ sur K . Le théorème 2.3 assure que les applications f^n se prolongent de façon lisse à $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ en des CR -difféomorphismes locaux. Le même raisonnement que pour la preuve du théorème 2 fonctionne et montre qu'on a les alternatives :

- Soit $b\Omega \setminus V_i$ est strictement pseudoconvexe, donc $b\Omega$ aussi et f est un biholomorphisme.
- Soit $f^{n_k}(p)$ est attiré par V_1 et V_2

Comme $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, la seconde alternatives est impossible et f est un biholomorphisme. \square

7 Auto-applications holomorphes propres des domaines disqués.

L'objet de cette partie est d'établir le théorème 3. Commençons par donner les grandes lignes de la démonstration. Compte tenu du théorème 1, on peut supposer que la dynamique de f est non-récurrente. Nous procédons alors en trois étapes. Dans la première, nous montrons que le lieu de faible pseudoconvexité est fixé par f et en déduisons que la dynamique non-récurrente de f est produite par un point d'attraction $a \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$. Nous montrons dans la deuxième étape que le lieu de faible pseudoconvexité est réduit au cercle C_a passant par a . La dernière étape exhibe une contradiction à partir de considérations entropiques : l'entropie topologique de f est supérieure au logarithme de son degré et se concentre sur C_a , ceci s'avère impossible lorsque f branche.

7.1 Fibration de Hopf.

Le bord d'un domaine $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ disqué et LB -régulier a une structure de fibré en cercles particulièrement utile.

Pour tout $\eta = (z_1, z_2) \in b\Omega$, nous noterons D_η le disque défini par $D_\eta := \{\zeta\eta, \zeta \in \mathbb{D}\}$, $C_\eta := bD_\eta$ son bord et $R(\eta)$ son rayon. Rappelons que Ω est disqué si et seulement si $D_\eta \subset \Omega$ pour tout $\eta \in b\Omega$. Bien entendu, $C_\eta \subset b\Omega$.

Lemme 7.1. *Il existe un homéomorphisme $h : b\Omega \rightarrow S^3$ défini par $h(\eta) = \eta/R(\eta)$ commutant aux actions de S^1 :*

$$\forall \zeta \in S^1, \forall \eta \in b\Omega, h(\zeta\eta) = \zeta h(\eta).$$

Preuve : Seule l'affirmation que h est un homéomorphisme est non triviale. Il suffit de montrer que h est bijective pour l'établir. La surjectivité est claire car Ω est borné. Pour

l'injectivité, observons que deux points distincts η_1, η_2 de $b\Omega$ tels que $h(\eta_1) = h(\eta_2)$ vérifient $\eta_1 = \rho\eta_2$, avec $|\rho| > 1$ (ou $|\rho| < 1$). Comme Ω est disqué, si de tels points existaient, la couronne $\{\eta = t\eta_2, 1 < |t| < |\rho|\}$ serait incluse dans $b\Omega$, ce qui contredirait la minimalité et donc la LB -régularité de Ω . \square

Cet homéomorphisme transporte la fibration de Hopf de S^3 sur une fibration en cercles sur $b\Omega$ (dont les fibres sont les $C_\eta, \eta \in b\Omega$) que nous appellerons fibration de Hopf sur $b\Omega$. On a donc le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} b\Omega & \xrightarrow{h} & S^3 \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_{S^3} \\ & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

On peut ainsi ramener toutes les propriétés de la fibration de Hopf de S^3 à celle de $b\Omega$. En particulier,

Proposition 7.2. *Soient $\eta_1, \eta_2 \in b\Omega$ avec $C_{\eta_1} \neq C_{\eta_2}$. Alors C_{η_1} et C_{η_2} sont noués dans $b\Omega$, autrement dit C_{η_1} n'est pas contractile dans $b\Omega \setminus C_{\eta_2}$ (voir [6], 8.6 et 9.4.2).*

Tout chemin noué à un cercle C_η et inclus dans un ouvert contractile U de $b\Omega$ y est noué à $C_a \cap U$. Précisément,

Lemme 7.3. *Soit $\pi : b\Omega \rightarrow \mathbb{P}^1$ la fibration de Hopf et $\Phi : \mathbb{D} \times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow U \subset b\Omega$ un difféomorphisme fibré (i.e. $\pi \circ \Phi(z, \cdot)$ est constante). Soient $X \subset U$ et γ un lacet dans U dont la projection $\pi \circ \gamma$ est contractile dans $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$. Alors γ est contractile dans $U \setminus X$.*

Preuve : Ecrivons $\gamma(t) = \Phi(x(t), y(t))$ avec $t \in [0, 1]$, $x(t) = \pi \circ \gamma(t) \in \mathbb{D}$ et $y(t) \in]-\epsilon, \epsilon[$. Si $\pi \circ \gamma$ est contractile, il existe une homotopie $x_s(t)$ entre $x(t)$ et un point x de $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$ dans $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$. Alors $\gamma_s(t) = \Phi(x_s(t), (1-s)y(t))$ définit une homotopie entre $\gamma(t)$ et $(x, 0)$ dans $U \setminus X$. \square

7.2 Deux lemmes.

Nous montrons qu'un cercle faiblement pseudoconvexe de la fibration dont l'image par une application holomorphe propre rencontre le lieu de stricte pseudoconvexité est isolé dans l'ensemble de faible pseudoconvexité de $b\Omega$.

Lemme 7.4. *Soit $\Omega \Subset \mathbb{C}^2$ un domaine pseudoconvexe disqué à bord lisse. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre, lisse sur $\overline{\Omega}$. Si $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ et $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$ alors C_η est isolé dans l'ensemble des points de faible pseudoconvexité, en particulier $\mathcal{FPC}(\eta) = C_\eta$.*

Preuve : Raisonnons par l'absurde. Soit $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ tel que $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Supposons que C_η ne soit pas isolé dans l'ensemble des points de faible pseudoconvexité. Soit alors une suite de points η_n de $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ tendant vers η , tels que les cercles C_{η_n} soient distincts. Comme $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ est ouvert et que $f|_{b\Omega}$ est continue, il existe des voisinages Γ_n de η_n dans C_{η_n} tels que $f(\Gamma_n) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$. Alors le jacobien de f , $\text{Jac}(f)$, est nul sur Γ_n pour n assez grand (lemme 2.5). D'après le théorème de Fatou, $\text{Jac}(f) = 0$ sur \mathbb{D}_{η_n} pour n grand. L'hypersurface analytique $\text{Jac}(f) = 0$ contient donc une infinité de droites passant par l'origine, c'est impossible. \square

Le lemme suivant montre que l'image par une certaine itérée de tout cercle de $b\Omega$ rencontre un voisinage prescrit d'une valeur d'adhérence de $(f^n)_n$ dans $b\Omega$.

Lemme 7.5. *Soit $\Omega \in C^2$ un domaine pseudoconvexe disqué et LB -régulier. Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega$ une application holomorphe propre lisse sur $\overline{\Omega}$ dont la dynamique est non-récurrente. Soit $a \in b\Omega$ une valeur d'adhérence de $(f^n)_n$ et V un voisinage de a dans $b\Omega$. Alors il existe un entier n_0 tel que :*

$$f^{n_0}(C_\eta) \cap V \neq \emptyset \quad \forall \eta \in b\Omega.$$

Preuve : Comme Ω est B -régulier, il existe une fonction $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap PSH(\Omega)$ telle que $u(a) = 1$, $u < 1$ sur $\overline{\Omega} \setminus \{a\}$, et $u = 0$ sur $b\Omega \setminus V$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que $u \circ f^{n_0}(0) > 0$. Le principe du maximum appliqué à $u \circ f|_{D_\eta}^{n_0}$ montre alors que $f^{n_0}(C_\eta)$ rencontre V . \square

7.3 Démonstration du théorème 3.

On peut supposer que $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ n'est pas vide et, grâce au théorème 1, que la dynamique de f est non-récurrente. D'après le théorème 2, il existe alors une sous-suite $(f^{n_k})_k$ qui converge localement uniformément vers un point $a \in b\Omega$ sur $\mathcal{SPC}(b\Omega)$.

Etape 1 : $f(\mathcal{FPC}(b\Omega)) = \mathcal{FPC}(b\Omega)$. Il suffit de prouver une inclusion car $f(\mathcal{SPC}(b\Omega)) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ et f est surjective. Procédons par l'absurde. Soit $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ tel que $f(\eta) \in \mathcal{SPC}(b\Omega)$. D'après le lemme 7.4, $\mathcal{FPC}(\eta) = C_\eta$.

• Montrons qu'il existe η_1 et η_2 tels que η_1, η_2, η soient deux à deux distincts et

$$\begin{cases} f(C_{\eta_2}) \subset C_{\eta_1} \\ f(C_{\eta_1}) \subset C_\eta \end{cases}$$

Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 7.6. *Pour tout voisinage compact Γ de η dans C_η , il existe un point η_1 de $f^{-1}(\Gamma)$ tel que $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(\eta_1, \epsilon)) > 0$ pour tout ϵ .*

Preuve : Supposons au contraire que pour tout point y de $f^{-1}(\Gamma)$, il existe un réel $\epsilon(y) > 0$ tel que $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(y, \epsilon(y))) = 0$. Comme $f^{-1}(\Gamma)$ est compact dans $b\Omega$, on a

$$f^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{y \in f^{-1}(\Gamma)} B(y, \epsilon(y)) \cap f^{-1}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \epsilon(y_i)) \cap f^{-1}(\Gamma)$$

et donc $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma)) \leq \sum_{i=1}^n \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(y_i, \epsilon(y_i))) = 0$. Puis, f étant lisse, $\Lambda_1(\Gamma) = \Lambda_1(f(f^{-1}(\Gamma))) = 0$ ce qui est absurde. \square

Soit Γ un voisinage compact de η dans C_η tel que $f(\Gamma) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$ et η_1 donné par le lemme 7.6. Puisque $f(\eta_1) \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ on a aussi $\eta_1 \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$. Alors, comme $f^2(\eta_1) \in f(\Gamma) \subset \mathcal{SPC}(b\Omega)$, le lemme 7.4 montre que C_{η_1} est isolé dans $\mathcal{FPC}(b\Omega)$. Si ϵ est suffisamment petit, on a donc

$$\mathcal{FPC}(b\Omega) \cap B(\eta_1, \epsilon) \subset C_{\eta_1}.$$

Comme par ailleurs $f^{-1}(\Gamma) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 < \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap B(\eta_1, \epsilon)) &= \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap \mathcal{FPC}(b\Omega) \cap B(\eta_1, \epsilon)) \\ &\leq \Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap C_{\eta_1}) \end{aligned}$$

Ainsi $\Lambda_1(f^{-1}(\Gamma) \cap C_{\eta_1}) > 0$, et d'après le théorème de Fatou, $f(C_{\eta_1}) \subset C_{\eta_1}$. On a $C_{\eta_1} \neq C_{\eta_2}$ car sinon $f(C_{\eta_1}) \subset C_{\eta_1} \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$.

De la même façon, on trouve η_2 ayant les propriétés voulues.

• Le théorème de Fatou montre en fait que

$$\begin{cases} f(\mathbb{D}_{\eta_2}) \subset \mathbb{D}_{\eta_1} \\ f(\mathbb{D}_{\eta_1}) \subset \mathbb{D}_{\eta_2} \end{cases}$$

et il s'ensuit que $\{f(0)\} = f(\mathbb{D}_{\eta_2} \cap \mathbb{D}_{\eta_1}) \subset \mathbb{D}_{\eta_1} \cap \mathbb{D}_{\eta_2} = \{0\}$. Ainsi $f(0) = 0$, c'est la contradiction attendue car la dynamique de f est non récurrente.

A ce stade de la preuve, il est bon de remarquer que a ne peut être un point de stricte pseudoconvexité. En effet, si tel était le cas, les images successives des cercles de faible pseudoconvexité resteraient en dehors d'un voisinage fixé de a , ce qui est impossible en vertu du lemme 7.5. Le point a est donc nécessairement un point de faible pseudoconvexité.

Etape 2 : $\mathcal{FPC}(b\Omega) = C_a$. Montrons tout d'abord que $\mathcal{FPC}(b\Omega)$ est connexe, il s'agit de voir que $\mathcal{FPC}(\eta) = \mathcal{FPC}(a)$ pour tout $\eta \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$. Soit V un voisinage de a dans $b\Omega$, d'après le lemme 7.5, il existe un entier n_0 tel que :

$$f^{n_0}(C_x) \cap V \neq \emptyset \quad \forall x \in b\Omega.$$

Comme $f^{-1}(\mathcal{FPC}(b\Omega)) = \mathcal{FPC}(b\Omega)$, il existe $\eta_1 \in \mathcal{FPC}(b\Omega)$ tel que $f^{n_0}(\eta_1) = \eta$. Alors $\mathcal{FPC}(\eta)$ rencontre V car $\mathcal{FPC}(\eta) \supset f^{n_0}(\mathcal{FPC}(\eta_1)) \supset f^{n_0}(C_{\eta_1})$. On a donc $\mathcal{FPC}(\eta) = \mathcal{FPC}(a)$ car V est un voisinage arbitraire de a .

Montrons maintenant que $\mathcal{FPC}(b\Omega) = C_a$. Notons $X := \mathcal{FPC}(b\Omega) = \mathcal{FPC}(a)$. Il s'agit de montrer que $\pi(X) = \pi(a)$. Soit U un voisinage de a sur lequel il existe une trivialisatation locale de la fibration de Hopf vérifiant :

$$\begin{cases} \Phi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \times [-\epsilon, \epsilon] \text{ avec } \pi = \pi_1 \circ \Phi \\ \Phi(a) = (0, 0) \end{cases}$$

Comme U peut être choisi arbitrairement petit, il suffit de montrer que $\pi(X)$ ne rencontre pas le bord de \mathbb{D} . Choisissons C_{η} un cercle de $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ et n_0 un entier tel que $f^{n_0}(C_{\eta}) \subset U$ (voir le théorème 2). Le cercle C_{η} n'est pas contractile dans $b\Omega \setminus X$ car X contient des cercles de la fibration de Hopf (propriété 7.2). Comme, d'après la première étape, $f(\mathcal{FPC}(b\Omega)) \subset \mathcal{FPC}(b\Omega)$, f^{n_0} induit un revêtement fini de $\mathcal{SPC}(b\Omega)$ sur lui-même (voir proposition 2.6). Il s'ensuit que $f^{n_0}(C_{\eta})$ n'est pas contractile dans $U \setminus X$, et donc que $\pi(f^{n_0}(C_{\eta}))$ ne l'est pas dans $\mathbb{D} \setminus \pi(X)$ (lemme 7.3). Comme \mathbb{D} est assimilable à un ouvert de \mathbb{R}^2 , cela n'est possible que si $\pi(X) \cap b\mathbb{D} = \emptyset$.

Etape 3 : f est injective. Soit d le degré topologique de $f|_{b\Omega}$; c'est aussi celui de f . D'après un théorème de Misiurevitch-Przytycki ([21]), l'entropie topologique de $f|_{b\Omega}$ est minorée :

$$h_{top}(f|_{b\Omega}) \geq \log d.$$

D'après le principe variationnel, cette entropie est portée par l'ensemble non-errant ([20], formule 3.3.1) :

$$h_{top}(f|_{b\Omega}) = h_{top}(f|_{NW(f|_{b\Omega})}).$$

Or d'après le théorème 2 et les deux premières étapes, on a $NW(f|_{b\Omega}) \subset C_a$ si bien que

$$h_{top}(f|_{C_a}) \geq \log d.$$

Comme $f(C_a) = C_a$, on voit facilement que $f(\mathbb{D}_a) = \mathbb{D}_a$. Alors $f|_{\mathbb{D}_a}$ est un produit de Blaschke fini qui, vu comme fraction rationnelle \tilde{f} , est de degré $\tilde{d} = \deg(f|_{\mathbb{D}_a})$. Or, comme l'a montré Gromov ([18]), $h_{top}(\tilde{f}) = \log \tilde{d}$, et donc

$$h_{top}(f|_{C_a}) = h_{top}(\tilde{f}|_{C_a}) \leq \log \tilde{d}.$$

Alors $\deg(f|_{\mathbb{D}_a}) = \tilde{d} \geq d = \deg f$ ce qui montre que l'ensemble des valeurs critiques $f(V_f)$ ne contient pas \mathbb{D}_a . Or, il résulte des deux premières étapes que $V_f \subset \mathbb{D}_a$ et $f(\mathbb{D}_a) = \mathbb{D}_a$. Ainsi, $V_f = \emptyset$ et f est injective. \square

A Existence de limite normale de ρ en un point de stricte pseudoconvexité.

Le but de cet appendice est de montrer le lemme 5.3. Nous allons prouver que l'ensemble des points en lesquels ρ possède des limites radiales dans M est dense dans $SPC(b\Omega)$. Fixons pour cela un ouvert arbitraire $U \subset SPC(b\Omega)$.

Commençons par introduire les notations utilisées dans la preuve (on se reportera avec avantage à la figure 1 qui les illustre).

Tout d'abord, quitte à restreindre U et à effectuer un changement de variable holomorphe, on peut supposer que U est formé de points de stricte convexité de $b\Omega$. Soit alors H un hyperplan réel de \mathbb{C}^k tel que $H \cap U \Subset U$. Soit H^+ le demi-espace délimité par H tel que $H^+ \cap U \Subset U$. Pour $\epsilon > 0$, S_ϵ désignera l'ensemble des points de Ω à distance ϵ de U :

$$\begin{aligned} S_\epsilon &= \{p + \epsilon \vec{N}(p), p \in U\} \cap H^+ \\ B_\epsilon &= \{p + r \vec{N}(p), p \in U, r > \epsilon\} \cap H^+ = \cup_{r > \epsilon} S_r, \end{aligned}$$

enfin, $B = \bigcup_{\epsilon > 0} B_\epsilon$.

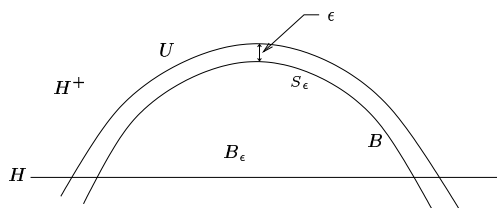


FIG. 1 – Notations de la preuve du lemme 5.3.

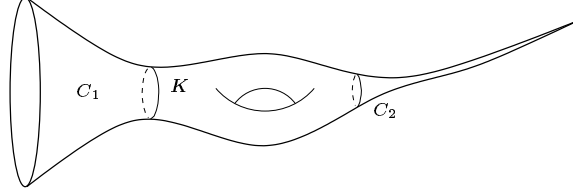
Nous utiliserons les lemmes suivants :

Lemme A.1. *Soit A un ensemble analytique de codimension 1 de \mathbb{C}^k et Λ une fonction p.s.h continue de \mathbb{C}^k , non constante sur A . Alors $\Lambda|_A$ n'a pas de maximum local.*

Lemme A.2. *Soit $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe, radialement propre. Alors $Im\Phi$ est dense dans \mathbb{D} .*

Lemme A.3. Soit M une surface de Riemann de genre fini. Il existe un compact K de M tel que toute composante connexe de $M \setminus K$ est

- soit un anneau $\mathcal{A}(r, 1)$ avec $\mathbb{S}_r \subset K$,
- soit un disque épointé \mathbb{D}^* avec $\mathbb{S}_1 \subset K$.



Nous procédons par l'absurde. On montre par un argument de catégories de Baire que, quitte à restreindre B , l'image de B par ρ évite un compact K de M préalablement fixé. En restreignant ρ à une droite complexe transverse à $b\Omega$, on obtient une application radialement propre d'un disque dans une composante de $M \setminus K$. Cette situation se révèle être impossible.

Preuve du lemme 5.3 : Supposons que $\rho^*(p) \cap M = \emptyset$ pour tout $p \in U$, i.e. ρ est radialement propre en les points de U . Soit K un compact de M donné par le lemme A.3.

Montrons dans un premier temps que, quitte à restreindre U :

$$\rho(B) \cap K = \emptyset \quad (5)$$

Pour cela, soit $r_j \searrow 0$, et

$$E_i = \left\{ p \in U \mid \forall j \geq i, \rho(p + r_j \vec{N}(p)) \notin K \right\}.$$

Comme $\rho^*(p) \cap M = \emptyset$ pour tout $p \in U$ on a $\bigcup_i E_i = U$. D'après le théorème de Baire, il existe donc $j_0 \in \mathbb{N}$ tels que E_{j_0} soit d'intérieur non vide. Quitte à restreindre U , on peut supposer que $E_{j_0} = U$. Alors

$$\rho(S_{r_j}) \cap K = \emptyset \quad \forall j \geq j_0. \quad (6)$$

Soit $z \in B$ et \mathcal{F} la composante connexe de $\rho^{-1}(\rho(z))$ qui contient z . C'est un ensemble analytique de codimension 1. Soit Λ une forme linéaire telle que $H^+ = \{\Lambda > 0\}$. Le principe du maximum appliqué à $\rho|_{\mathcal{F}}$ montre que $\mathcal{F} \cap S_{r_j} \neq \emptyset$, donc que $\rho(B_{r_j}) \subset \rho(S_{r_j})$. Grâce à (6), ceci termine la preuve de (5) puisque

$$\rho(B) \cap K = \rho\left(\bigcup_{j \geq j_0} B_{r_j}\right) \cap K = \bigcup_{j \geq j_0} (\rho(B_{r_j}) \cap K) = \emptyset.$$

Dans un second temps, nous restreignons ρ à une droite complexe générique. Ceci produit encore une application propre par un argument de Lindelöf-Cirka.

Fait Soit l une droite complexe sur laquelle ρ est non constante, qui intersecte B et telle que $l \cap bB \subset U$. Alors $\rho|_{l \cap B}$ est radialement propre.

Concluons la preuve à partir de ce Fait. Comme B est connexe, $\rho(B)$ est inclus dans une composante connexe de $M \setminus K$ d'après (5). L'application ρ' est donc à valeurs dans un disque épointé ou un anneau $\mathcal{A}(r, 1)$. Le Fait précédent montre que les limites radiales de ρ' sont nulles dans le premier cas - c'est impossible d'après le théorème de Fatou - ou de

module 1 dans le second. On peut donc voir ρ' comme une fonction holomorphe à valeurs dans \mathbb{D} radialement propre et évitant un ouvert de \mathbb{D} . En composant à gauche $\rho' : B' \rightarrow \mathbb{D}$ par une représentation conforme de \mathbb{D} sur B' , on produit une fonction holomorphe de \mathbb{D} dans \mathbb{D} radialement propre dont l'image n'est pas dense. Ceci est impossible d'après le lemme A.2. \square

Preuve du Fait : Par commodité, nous noterons $B' = l \cap B$, $U' = l \cap U = bB'$, et $\rho' = \rho|_{B'}$. Pour $p \in U'$, définissons aussi $\vec{N}_l(p)$ le vecteur unitaire normal à U' rentrant dans B' . Montrons que la propriété radiale de ρ implique celle de ρ' .

Comme $i\vec{N}_l(p) \in T_p(U \cap l)$, il s'agit d'un vecteur de la forme $ai\vec{N}(p) + y$ avec $y \in T_p^{\mathbb{C}}U$. On en déduit que

$$\vec{N}_l(p) = a\vec{N}(p) + x, \quad x \in T_p^{\mathbb{C}}U$$

Remarquons que a est positif car $\vec{N}(p)$ et $\vec{N}_l(p)$ sont tous deux des vecteurs rentrants.

Supposons alors qu'il existe une suite de réels $t_k \searrow 0$ telle que $\rho'(p + t_k\vec{N}_l(p))$ converge vers $\beta \in M$. Ceci signifie $\rho(p + at_k\vec{N}(p) + t_kx) \rightarrow \beta$. Des estimations standard de distance de Kobayashi montrent que $d_{K_B}(p + at_k\vec{N}, p + at_k\vec{N} + t_kx) \in O(\sqrt{t_k})$. L'application ρ étant contractante pour la métrique de Kobayashi, $d_{K_M}(\rho(p + at_k\vec{N}), \rho(p + at_k\vec{N} + t_kx))$ tend vers 0. Donc $\rho(p + at_k\vec{N})$ tend vers $\beta \in M$ ce qui est faux puisque ρ est radialement propre. \square

Références

- [1] M. Abate. *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*. Research and Lecture Notes in Mathematics. Complex Analysis and Geometry. Mediterranean Press, Rende, 1989.
- [2] H. Alexander. Proper holomorphic mappings in C^n . *Indiana Univ. Math. J.*, 26(1) :137–146, 1977.
- [3] E. Bedford and S. Bell. Proper self-maps of weakly pseudoconvex domains. *Math. Ann.*, 261(1) :47–49, 1982.
- [4] S. Bell. An extension of Alexander's theorem on proper self-mappings of the ball in C^n . *Indiana Univ. Math. J.*, 32(1) :69–71, 1983.
- [5] S. Bell. Local boundary behavior of proper holomorphic mappings. In *Complex analysis of several variables (Madison, Wis., 1982)*, volume 41 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–7. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [6] M. Berger. *Géométrie. 5*. CEDIC, Paris, 1977. La sphère pour elle-même, géométrie hyperbolique, l'espace des sphères.
- [7] S. Berhanu and G. A. Mendoza. Orbits and global unique continuation for systems of vector fields. *J. Geom. Anal.*, 7(2) :173–194, 1997.
- [8] F. Berteloot. Holomorphic vector fields and proper holomorphic self-maps of Reinhardt domains. *Ark. Mat.*, 36(2) :241–254, 1998.
- [9] F. Berteloot and S. Pinchuk. Proper holomorphic mappings between bounded complete Reinhardt domains in C^2 . *Math. Z.*, 219(3) :343–356, 1995.
- [10] H. Boas and E. Straube. Sobolev estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann operator on domains in C^n admitting a defining function that is plurisubharmonic on the boundary. *Math. Z.*, 206(1) :81–88, 1991.

- [11] B. Chabat. *Introduction à l'analyse complexe. Tome 2.* Traduit du Russe : Mathématiques. "Mir", Moscow, 1990. Fonctions de plusieurs variables. Translated from the Russian by Djilali Embarek.
- [12] E. M. Chirka. *Complex analytic sets*, volume 46 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen.
- [13] B. Coupet, Y. Pan, and A. Sukhov. Proper holomorphic self-maps of quasi-circular domains in \mathbf{C}^2 . *Nagoya Math. J.*, 164 :1–16, 2001.
- [14] K. Diederich and J. E. Fornæss. Proper holomorphic images of strictly pseudoconvex domains. *Math. Ann.*, 259(2) :279–286, 1982.
- [15] C. Dupont. Exemples de Lattès et domaines faiblement sphériques de \mathbf{C}^n . *Manuscripta Math.*, 111(3) :357–378, 2003.
- [16] J. E. Fornæss and N. Sibony. Construction of P.S.H. functions on weakly pseudoconvex domains. *Duke Math. J.*, 58(3) :633–655, 1989.
- [17] F. Forstnerič. Proper holomorphic mappings : a survey. In *Several complex variables (Stockholm, 1987/1988)*, volume 38 of *Math. Notes*, pages 297–363. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [18] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4) :217–235, 2003.
- [19] G. Henkin and R. Novikov. *Proper mappings of classical domains*, volume 1043 of *Lecture Notes in Math*. Springer, Berlin, 1984.
- [20] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [21] M. Misiurewicz and F. Przytycki. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 25(6) :573–574, 1977.
- [22] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger. Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties. *Acta Math.*, 155(1-2) :103–147, 1985.
- [23] S. Pinchuk. The scaling method and holomorphic mappings. In *Several complex variables and complex geometry, Part 1 (Santa Cruz, CA, 1989)*, volume 52 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 151–161. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [24] S. I. Pinchuk. Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 15 :909–917, 959, 1974.
- [25] S. I. Pinčuk. Proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 241(1) :30–33, 1978.
- [26] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of \mathbf{C}^n* , volume 241 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [27] W. Rudin. *New constructions of functions holomorphic in the unit ball of \mathbf{C}^n* , volume 63 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.
- [28] N. Sibony. Une classe de domaines pseudoconvexes. *Duke Math. J.*, 55(2) :299–319, 1987.
- [29] I. H. Tsai. Rigidity of proper holomorphic maps between symmetric domains. *J. Differential Geom.*, 37(1) :123–160, 1993.

- [30] A. E. Tumanov and G. M. Khenkin. Local characterization of analytic automorphisms of classical domains. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 267(4) :796–799, 1982.
- [31] J.-C. Yoccoz. Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, (231) :3–88, 1995. Petits diviseurs en dimension 1.