TD1 : intégration.

Exercice 1 : Intégration par changement de variable. On rappelle la formule :

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx.$$

Montrer que $\int_a^b f(\alpha x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a}^{\alpha b} f(t)dt, \int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt, \int_a^b f(x)dx = \int_{e^a}^{e^b} \frac{f(lnt)}{t}dt,$ et que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{a^2}^{b^2} \frac{f(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}dt.$

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variables proposé.

$$\int_0^a \frac{1}{1+\alpha^2x^2}dx \qquad u = \alpha x$$

$$\int_0^a \frac{1}{\alpha+x^2}dx \qquad u = ?$$

$$\int_a^b e^x dx \qquad x = \ln t$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx \qquad x = \sin t$$

$$\int_a^b \frac{1}{\sin x}dx \qquad x = \cos t$$

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \qquad x = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

Exercice 2 : Intégrale des fonctions rationnelles. Soient a, b, c et δ des nombres réels. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x-a},$$

$$\int \frac{dx}{(x+b)^2+\delta^2},$$

$$\int \frac{x+b}{(x+b^2+\delta^2)}dx,$$

$$\int \frac{xdx}{(x+b)^2+\delta^2},$$

$$\int \frac{dx}{x^2+bx+c} \qquad \text{avec } b^2-4c<0,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+bx+c} \qquad \text{avec } b^2-4c<0.$$

Etant donné une fraction rationnelle, expliquez comment lui calculer une primitive.

Exercice 3 : Calculez l'intégrale suivante à l'aide d'un changement de variables $x = \cos t$:

$$\int \frac{\sin t}{1 + \cos^3 t} dt$$