1. Equations différentielles : Exemples

1.1. **Evolution d'un isotope instable.**

Au temps t_0, considérons un corps de masse m_0 contenant un nombre y_0 d'atomes de carbone 14. Cet isotope est radioactif : le nombre de noyaux se désintégrant à un instant fixé est proportionnel au nombre total de noyaux au même instant. Autrement dit, si l'on note $y(t)$ le nombre de noyaux non désintégrés contenu dans le corps, il existe une constante $\lambda < 0$ telle que l'on ait

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & \lambda y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. .$$

1) (Existence d'une solution) Ce système a des solutions : en effet, si l'on pose $f_\alpha(t) = \alpha e^{\lambda t}$, alors f_α est solution de la première équation, quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$; de plus, si l'on choisit $\alpha = \frac{y_0}{e^{\lambda t_0}}$, la seconde équation est aussi vérifiée.

2) (Unicité de la solution) Soit f une solution du système

$$(PC_0) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & \lambda y(t) \\ y(t_0) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Si f n'est pas identiquement nulle pour $t > 0$, posons $t_1 = \inf\ \{t > t_0,\ \ f(t) \neq 0\}$. Puisque f est continue, on peut affirmer que

• $\lim_{t \to t_1^-} f = f(t_1) = 0$,

• il existe une réel $t_2 > t_1$ tel que sur l'intervalle ouvert $]t_1, t_2[$, f est non nulle. Sur cet intervalle, on peut écrire

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|f(t)|) = \lambda t + C \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = \alpha e^{\lambda t} \quad (\alpha = \pm e^C \in \mathbb{R}^\times) \quad ,$$

• $\lim_{t \to t_1^+} f = f(t_1) = \alpha e^{\lambda t_1} \neq 0$,

d'où une contradiction. Ainsi, f est identiquement nulle pour $t > t_0$.

De la même manière, on montre que f est identiquement nulle pour $t < t_0$. Ainsi, (PC_0) admet pour unique solution la fonction nulle.

Supposons que g et h soient deux solutions de (PC). Alors $g - h$ est solution de (PC_0), ce qui montre que g et h doivent être égales, et donc que (PC) admet une unique solution.

3) (Variation de la condition initiale) Dans les applications, $y(t_0)$ est mesuré, souvent avec une erreur. On sait en général majorer l'erreur relative. Autrement dit, il existe un réel $0 < e_0 < 1$ et un réel $y_0 > 0$ tels que l'on ait

$$y(t_0) \in]y_0(1 - e_0), y_0(1 + e_0)[\quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y(t_0) - y_0}{y_0} \right| < e_0$$

La solution y vérifie donc les inégalités

$$\frac{y_0(1 - e_0)}{e^{\lambda t_0}} e^{\lambda t} \leq y(t) \leq \frac{y_0(1 + e_0)}{e^{\lambda t_0}} e^{\lambda t} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y(t) - \frac{y_0}{e^{\lambda t_0}} e^{\lambda t}}{\frac{y_0}{e^{\lambda t_0}} e^{\lambda t}} \right| < e_0.$$

L'erreur relative sur $y(t)$ n'augmente donc pas lorsque t augmente.

4) (Variation du paramètre) De même, le paramètre λ est mesuré avec une marge d'erreur relative : il existe un réel $\lambda_0 < 0$ et un réel $0 < \nu_0 < 1$ tels que l'on ait $\lambda \in]\lambda_0(1 + \nu_0), \lambda_0(1 - \nu_0)[$. La solution y vérifie donc les inégalités

$$\frac{y_0}{e^{\lambda_0(1+\nu_0)t_0}} e^{\lambda_0(1+\nu_0)t} \leq y(t) \leq \frac{y_0}{e^{\lambda_0(1-\nu_0)t_0}} e^{\lambda_0(1-\nu_0)t} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{y(t) - \frac{y_0}{e^{\lambda_0 t_0}} e^{\lambda_0 t}}{\frac{y_0}{e^{\lambda_0 t_0}} e^{\lambda_0 t}} \right| < \max \left(\left| \frac{1 - e^{-\lambda_0 \nu_0 t}}{e^{-\lambda_0 \nu_0 t_0}} \right|, \left| \frac{1 - e^{\lambda_0 \nu_0 t}}{e^{-\lambda_0 \nu_0 t_0}} \right| \right) .$$

L'erreur commise sur $y(t)$ augmente donc exponentiellement avec avec t. Pour avoir une bonne idée de la valeur de $y(t)$ pour t grand, il faut donc connaitre λ avec une très grande précision (relativement aux autres grandeurs).

5) Application : des expériences permettent de faire les mesures suivantes :

• Si le temps est mesuré en années, on a $-1,212.10^{-4} \leq \lambda \leq -1,209.10^{-4}$.

• Pendant la vie d'un être humain, le carbone 14 de l'atmosphère (qui se forme en haute altitude) est respiré et assimilé, et entretient un nombre de noyaux de carbone 14 par gramme d'os oscillant entre $3,152.10^8$ et $3,154.10^8$.

• Dans un crâne d'humain retrouvé dans la grotte de Cro Magnon, on détecte une concentration de noyaux de carbone 14 par gramme d'os comprise entre $8,791.10^6$ et $8,793.10^6$.

De ces trois données, on peut tirer une estimation du temps passé depuis la mort de l'homme de Cro magnon : appelons-le T . On a

$$3,152.10^8.e^{-1,212.10^{-4}T} \leq y(T) \leq 3,154.10^8.e^{-1,209.10^{-4}T} \quad \text{et} \quad 8,791.10^6 \leq y(T) \leq 8,793.10^6$$

ce qui fournit les inégalités

$$T \geq \frac{1}{-1,212.10^{-4}} \ln(\frac{8,793.10^6}{3,152.10^8}) \sim 29531 \qquad \text{et} \qquad T \leq \frac{1}{-1,209.10^{-4}} \ln(\frac{8,791.10^6}{3,154.10^8}) \sim 29612$$

et donc l'estimation

$$T = 29571 \pm 0,1\% \ .$$

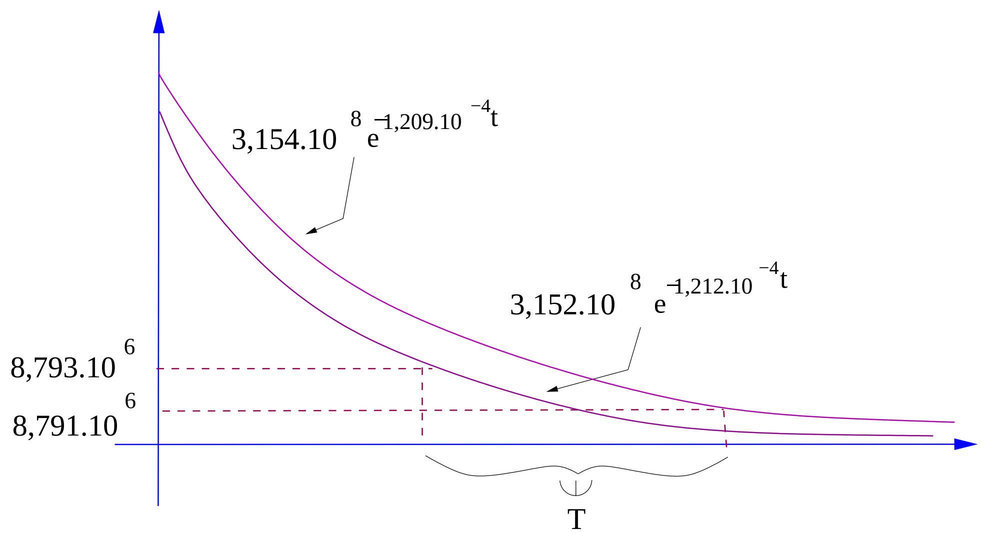

FIG. 1.1. Datation au carbonne 14

1.2. **Dynamique des populations.**
On considère une population $y(t)$ évoluant avec le temps t. Si l'on note a le taux de fertilité de la population, et M la population maximale admise par l'environnement, un modèle crédible pour l'évolution de $y(t)$ est le suivant :

$$y'(t) = ay(t) - a\frac{y^2(t)}{M} \ .$$

En gros, celui-ci dit que si la population est loin d'être maximale ($y(t) << M$), alors l'accroissement au temps t est presque proportionnel à la population (la condition imposée par l'environnement est négligeable), tandis que si la population est proche de M, l'accroissement est presque nul (d'ailleurs, si $y(t) = M$, on a $y'(t) = 0$: la population n'évolue pas).

1) Existence de solutions : Soit y_0 la population au temps t_0. Le système

$$(PC)' \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{M}\right) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admet au moins une solution. Posons en effet $y(t) = \frac{1}{f(t)}$. Le système (PC) devient

$$(PC)'' \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -f'(t) & = & af(t) - \frac{a}{M} \\ f(t_0) & = & \frac{1}{y_0} \end{array} \right. \quad ,$$

qui admet une solution presque évidente : $f(t) = Ce^{-at} + \frac{1}{M}$ avec $C = \frac{y_0 - \frac{1}{M}}{e^{-at_0}}$. On en déduit qu'une solution de (PC) est $y(t) = \frac{M}{Ae^{-a(t-t_0)}+1}$ avec $A = \frac{M}{y_0} - 1$.

2) La solution en question est unique (même démonstration pour $(PC)''$ que dans le premier exemple).

3) Oublions un instant la motivation qui nous a mené à l'étude de cette équation, et intéressons nous aussi aux cas où y_0 peut être négatif, ou bien supérieur à M. Ci dessous, on a tracé les graphes des solutions en prenant $t_0 = 0$ et des valeurs variées de y_0 :

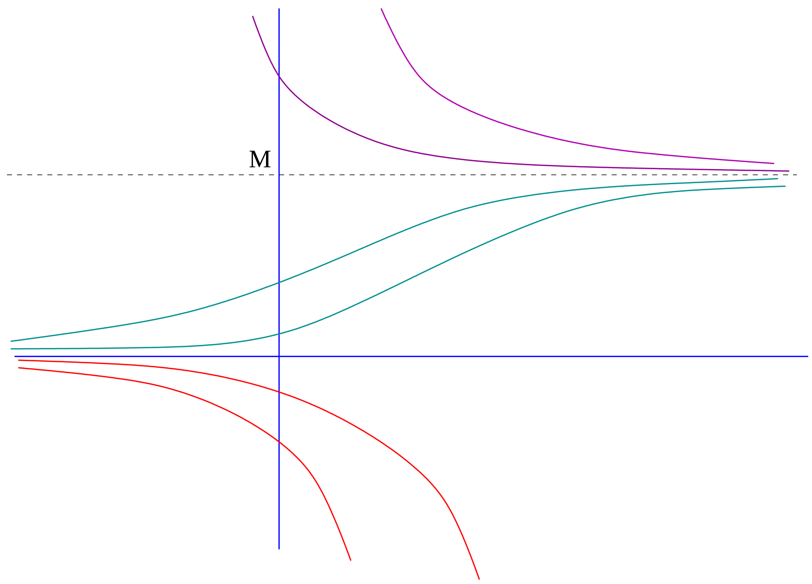

Fig. 1.2. Quelques solutions de $(PC)'$

1.3. **Les équations différentielles de Clairaut.**
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle équation différentielle de Clairaut associée à g l'équation

$$y(t) = ty'(t) + g(y'(t)) \ .$$

Dans cet exemple, nous prendrons $g(x) = x^2$ si bien que notre équation est en fait

$$(C) \quad y(t) = ty'(t) + y'(t)^2 \ .$$

Dérivons la une fois : on obtient

$$(C)' \quad y''(t)[t + 2y'(t)] = 0 \ .$$

On voit donc apparaître deux cas :

• soit c'est y'' qui vaut 0, ce qui implique l'égalité $y(t) = at + b$, et en reportant dans (C), on voit que l'on doit avoir $b = a^2$,

• soit c'est $t + 2y'(t)$ qui est nul, ce qui implique l'égalité $y(t) = -\frac{t^2}{4} + c$, et en reportant dans (C), on obtient $c = 0$.

1) Il n'existe pas toujours de solution : choisissons $y(0) = -1$; dans le cas 1, puisque b doit être positif, aucune des droites de la forme $y(t) = at + b$ ne peut vérifier cette condition, et il est clair que la solution donnée par le cas 2 ne vérifie pas non plus cette condition.

2) Lorsqu'il existe une solution, elle n'est pas forcément unique : choisissons $y(0) = 1$; alors les deux solutions $y(t) = -xt + 1$ et $y(t) = t + 1$ vérifient cette condition initiale.

3) Pire : comme on le voit sur la figure ci-dessous, la connaissance d'une solution au voisinage de la condition initiale ne détermine en rien son comportement futur : on peut commencer en $(0, 1)$ par suivre la droite $y = -t + 1$, puis suivre la courbe $y = -\frac{t^2}{4}$, puis un peu plus loin prendre la droite $y = -2t + 4$.

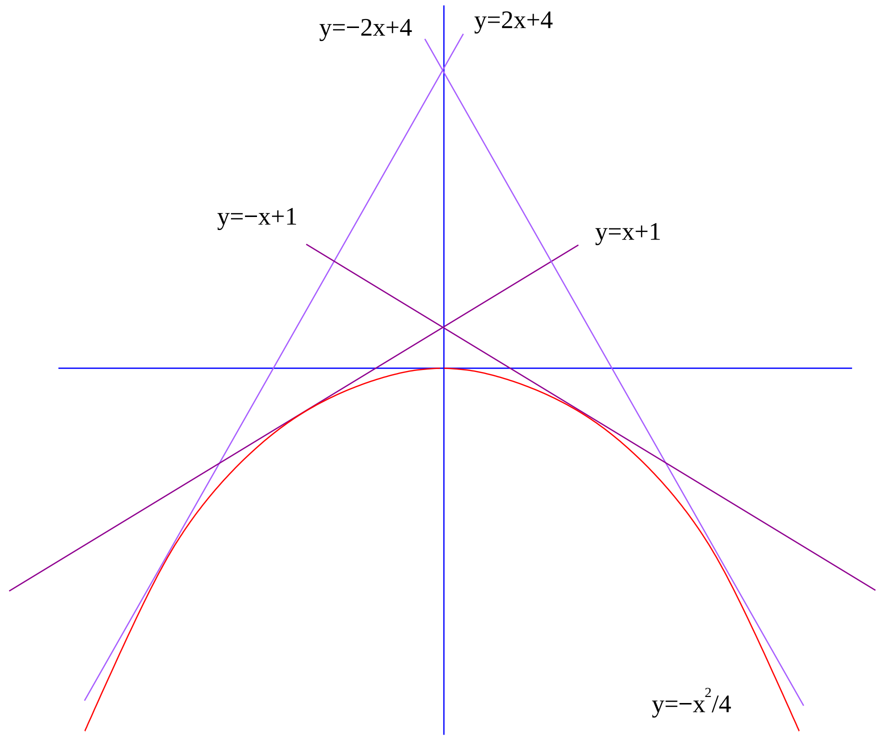

FIG. 1.3. Quelques solutions de l'équation (C)

1.4. **Les équations différentielles de Riccati.**
Il s'agit d'équations différentielles du type

$$(R) \quad y'(t) = q_1(t) + q_2(t)y(t) + q_3(t)y(t)^2$$

où q_1, q_2 et q_3 sont des fonctions fixées. Il existe toute une théorie (Liouville, Picard, Vessiot) permettant de démontrer qu'à part pour des formes très particulières des fonctions q_1, q_2 et q_3, il est *impossible* d'écrire explicitement les solutions exactes de cette équation. Cela signifie que si l'on admet les fonctions polynômiales, circulaires, exponentielles, logarithmiques et les opérations de somme, produit, exponentiation et primitive comme outils pour les assembler (dans quelque ordre que ce soit, et autant de fois qu'on le veut), on n'arrivera jamais à construire une solution de (R).

• Un cas particulier dans lequel on sait résoudre l'équation (on dit : par quadrature) est celui de l'équation de Bernouilli, dans lequel la fonction $q_1(t)$ est nulle :

$$(B) \quad y'(t) = q_2(t)y(t) + q_3(t)y^2(t)$$

qui, admet pour solution passant par (t_0, y_0) la fonction

$$f(t) = \frac{y_0 e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}}{1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u} \quad .$$

En effet, on a $f(t_0) = \frac{y_0 e^0}{1-0} = y_0$ et

$$f'(t) = \frac{y_0 q_2(t) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s} \left(1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u\right) - \left(-y_0 q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) y_0 e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}}{\left(1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{y_0 q_2(t) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s} \left(1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u\right) - \left(-y_0 q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) y_0 e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}}{\left(1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u\right)^2} \\
&= q_2(t) \frac{y_0 e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}}{1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u} + q_3(t) \left(\frac{y_0 e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}}{1 - y_0 \int_{t_0}^t \left(q_3(u) e^{\int_{t_0}^t q_2(s)\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}u}\right)^2 \\
&= q_2(t)y(t) + q_3(t)y^2(t) \quad .
\end{aligned}$$

• Par contre, Liouville a démontré que l'équation

$$(B_m) \quad y'(t) = at^m + by^2(t)$$

avec a et b deux réels non nuls est résoluble par quadrature si et seulement si m est de la forme

$$m = \frac{-4h}{2h \pm 1} \qquad (h \in \mathbb{N}) \ .$$

Cela ne signifie pas du tout que dans les autres cas il n'existe pas de solution, mais seulement que les solutions ne peuvent être explicitées.

2. Equations différentielles ordinaires

Définition 2.1.

• Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction. Soit $I \subset]a,b[$ un intervalle. On dit qu'une fonction dérivable $g : I \to]c,d[$ est **une solution de l'équation différentielle associée à** F si l'on a

$$g'(t) = F(t, g(t)) \quad \forall t \in I \ .$$

• Soit (t_0, y_0) un élément de D. On dit qu'une fonction dérivable $g : I \to]c,d[$ est **une solution du problème de Cauchy**

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

si l'on a

$$\begin{cases} g'(t) &= F(t, g(t)) \quad \forall t \in I \\ g(t_0) &= y_0 \end{cases} .$$

On obtient une idée géométrique du problème, de la façon suivante : en chaque point (t,y) de $]a,b[\times]c,d[$, on attache le vecteur de coordonnées $(1, F(t,y))$ (on appelle le résultat de cette opération le champ de vecteurs associé à F). Trouver une solution de l'équation différentielle revient à déterminer les courbes $(t, g(t))$ tangentes en chaque point à l'un de ces vecteurs.

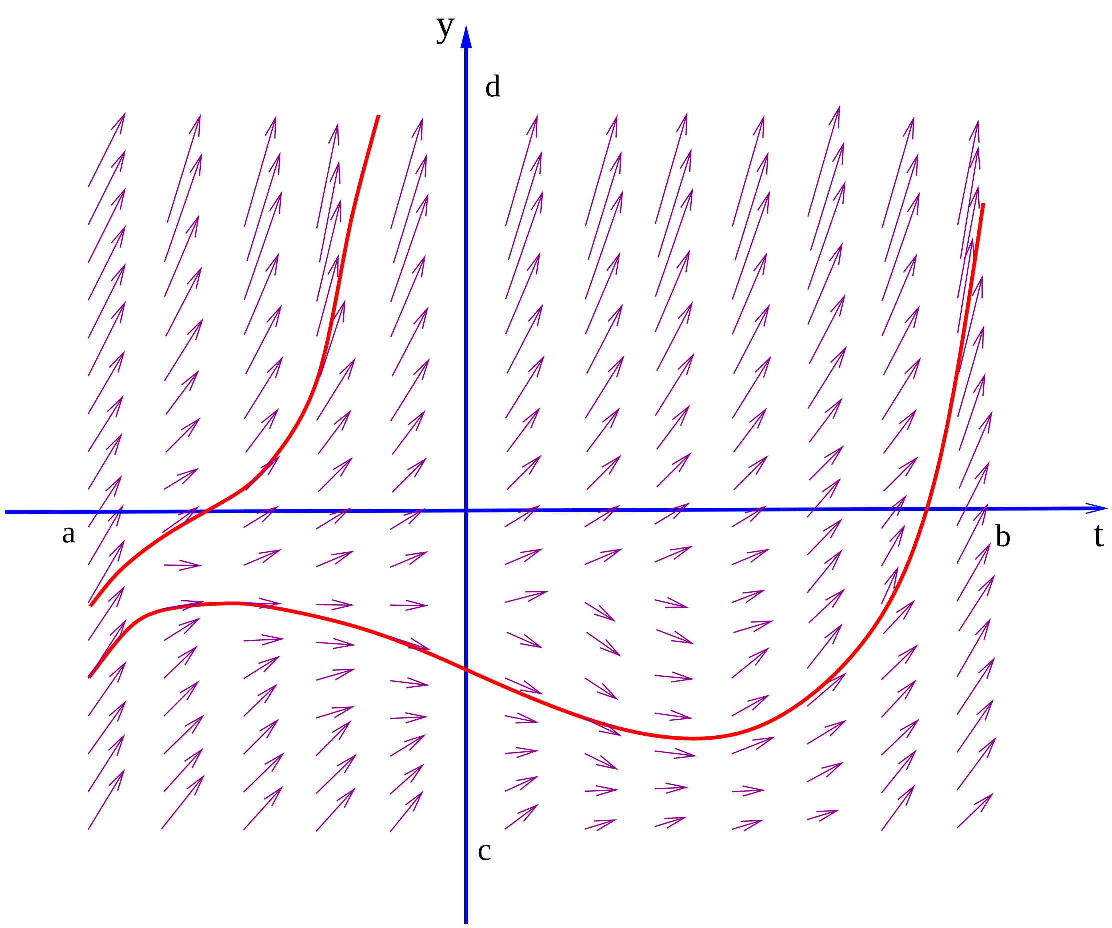

Fig. 2.1. Deux courbes intégrales correspondant à des valeurs initiales différentes

Exemple : Considérons l'équation différentielle ordinaire associée à la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x,y) = 2\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ F(0,0) = 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Autrement dit, on étudie $y' = 2\frac{xy}{x^2+y^2}$. Le champ de vecteurs associé à F est facile à dessiner, puisque l'on l'égalité

$$F(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)) = \sin(2\theta) \ .$$

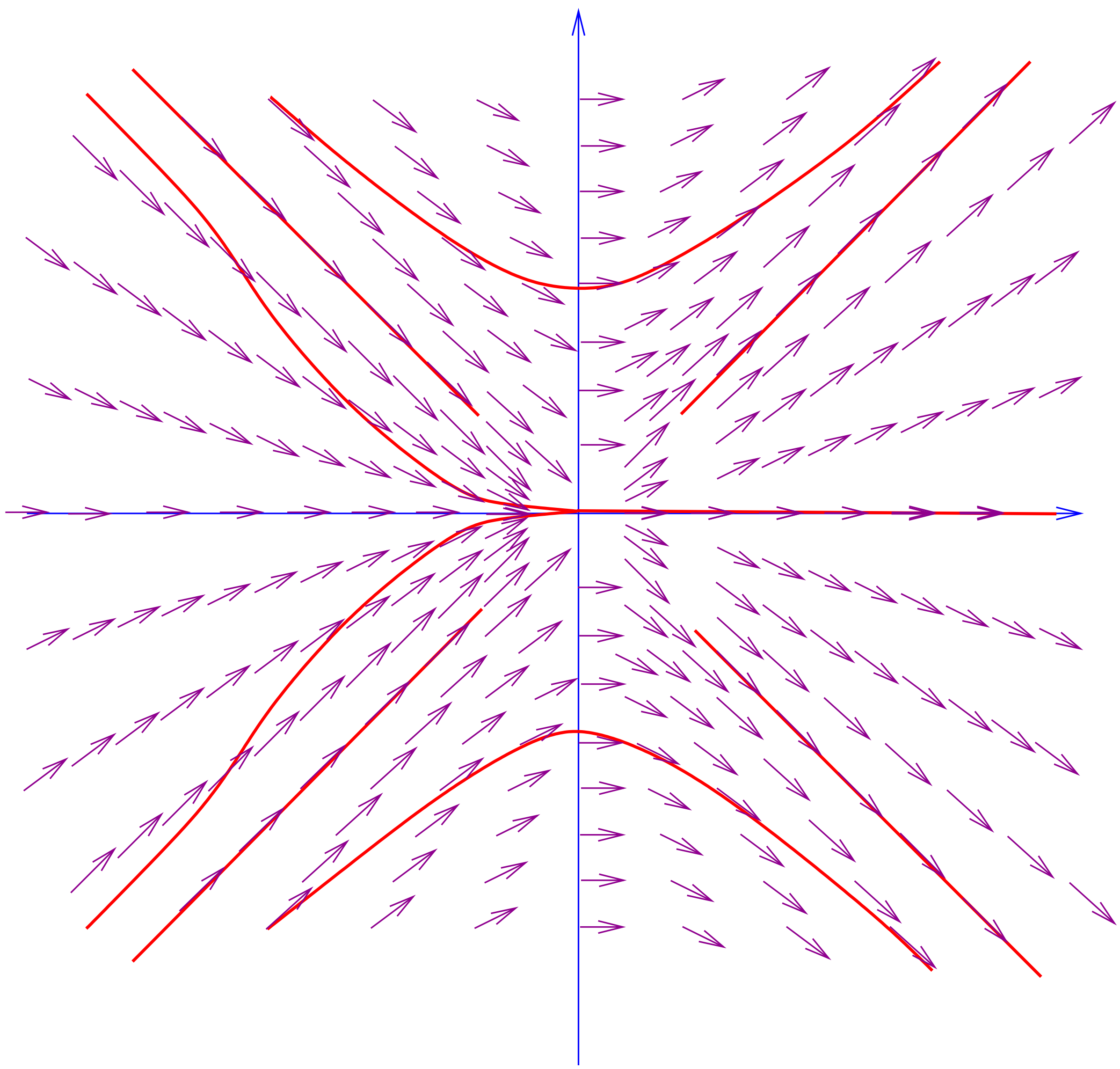

FIG. 2.2. Le champ de vecteurs associé à F et quelques solutions

Sans connaître explicitement les solutions, nous pouvons déjà tirer les enseignements suivants :

- Par le point $(0,3)$ passe une unique solution $t \mapsto g(t)$, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et admet la droite d'équation $y = x$ pour asymptote.

- Il existe de nombreuses solutions passant par le point $(0,0)$.

- Si l'on choisit deux conditions initiales très proches (par exemple les point $(-1, 1-10^{-6})$ et $(-1, 1+10^{-6})$, le comportement d'une solution vérifiant ces conditions initiales est très différent au bout d'un temps très long (la première tend vers 0 tandis que la seconde tend vers $+\infty$).

2.0.1. *Problèmes à étudier.* Au vu des exemples précédents, il est naturel de se poser de nombreuses questions, parmi lesquelles :

Question 1 : (existence) Soit (t_0, y_0) un point de D. Existe-t-il une solution y du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad ?$$

Question 2 : (unicité) Si la réponse à la question 1 est oui, existe-t-il d'autres solutions ?

Question 3 : (quadrature) Si la réponse à la question 1 est oui, est-il possible d'expliciter une solution ?

Question 4 : (approximation) Si la réponse à la question 3 est non, est-il possible de trouver des approximations aussi bonnes qu'on le veut d'une solution ? Que peut-on dire du comportement des solutions ?

Question 5 : (continuité en la condition initiale) Si les réponses aux questions 1 et 2 sont positives, les solutions passant par deux conditions initiales proches restent-elles proches ?

Question 6 : (continuité en les paramètres) Si les réponses aux questions 1 et 2 sont positives, et si la fonction F dépend d'un paramètre (par exemple λ dans le premier exemple), les solutions associées à la même condition initiale, mais pour deux paramètres proches restent-elles proches ?

3. Quelques cas où l'on sait trouver des solutions explicites

Dans cette section, nous allons donner quelques recettes pour résoudre des équations différentielles par quadrature. Avant de commencer, remarquons que l'on sait résoudre par quadrature l'équation différentielle

$$y'(t) = a(t)$$

(lorsque a est continue). En effet, le théorème fondamental de l'intégration nous dit que la fonction

$$f(t) = C + \int_{t_0}^{t} a(s) \mathrm{d}s$$

où C est une constante, est dérivable, et que sa dérivée est $f'(t) = a(t)$.

3.1. Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre.

Soit J un intervalle, et $a : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue fixée. On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$(H) \quad y'(t) = a(t).y(t) \ ,$$

autrement dit, on recherche les solutions de l'équations différentielle associée à

$$F : \begin{array}{rcl} J \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & a(u)v \end{array}$$

Les équations différentielles de ce type sont appelées **équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre**.

Remarquons tout de suite que si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux solutions de (H), alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions $\lambda f : I \to \mathbb{R}$ et $f + g : I \to \mathbb{R}$ sont aussi solutions de (H).

D'autre part, on remarque que si f est solution de (H), et si f est non nulle, alors on a

$$\ln(|f(t)|)' = \frac{f'(t)}{f(t)} = a(t)$$

ce qui mène au résultat :

Théorème 3.1. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

a) Les solutions de (H) sont toutes de la forme

$$f(t) = C.e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \qquad (C \in \mathbb{R}) \quad .$$

b) Pour tout couple $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution $f : J \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t).y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad ,$$

qui est définie par

$$f(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} \quad .$$

3.2. **Equations différentielles linéaires.**
Soit J un intervalle, $a : J \to \mathbb{R}$ et $b : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues fixées. On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$(L) \quad y'(t) = a(t).y(t) + b(t) \ ,$$

autrement dit, on recherche les solutions de l'équations différentielle associée à

$$\begin{array}{rccc} F: & J \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & a(u)v + b(u) \end{array}$$

Les équations différentielles de ce type sont appelées **équations différentielles linéaires du premier ordre**.

Remarquons tout de suite que si f et g sont des solutions de (L), alors $f - g$ est une solution de

$$(H) \quad y'(t) = a(t).y(t) \ ,$$

dont on a vu que les solutions sont de la forme $C.e^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}$.

Pour trouver les solutions de (L), on utilise la méthode de **variation de la constante** (due à Lagrange) : on cherche les solutions de (E) sous la forme $f(t) = C(t).e^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}$ (autrement dit, on prend la solution de (H), et l'on remplace la constante C par une fonction $C(t)$, d'où le nom de la méthode). On obtient l'équation

$$f'(t) = C'(t).e^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s} + C(t).a(t).e^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s} = a(t)f(t) + b(t)$$

qui implique l'égalité

$$C'(t) = \frac{b(t)}{e^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}}$$

(le fait que l'exponentielle n'est jamais nulle légitime ce quotient) et finalement

$$C(t) = D + \int_{t_0}^t \frac{b(u)}{e^{\int_{t_0}^u a(s)\mathrm{d}s}}\mathrm{d}u \ ,$$

où D est une nouvelle constante. On obtient donc :

Théorème 3.2. *Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $a : J \to \mathbb{R}$ et $b : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.*
a) Les solutions de (L) sont toutes de la forme $f : J \to \mathbb{R}$ avec

$$f(t) = D.e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}.\int_{t_0}^t \frac{b(u)}{e^{\int_{t_0}^u a(s)\,ds}}du \qquad (C \in \mathbb{R}) \quad .$$

b)Pour tout couple $(t_0, y_0) \in J \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution $f : J \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & a(t).y(t) + b(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. ,$$

qui est définie par

$$f(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}.\int_{t_0}^t \frac{b(u)}{e^{\int_{t_0}^u a(s)\,ds}}du \ .$$

3.3. **Equations différentielles à variables séparables.**
Soient J et K deux intervalles, $a : J \to \mathbb{R}$ et $g : K \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues fixées. On s'intéresse ici à l'équation différentielle

$$(VS) \quad y'(t) = a(t)g(y(t)) \ ,$$

autrement dit, on recherche les solutions de l'équations différentielle associée à

$$\begin{array}{rccc} F: & J \times K & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & a(u).g(v) \end{array}$$

Supposons que g est non nulle sur K. On peut alors écrire

$$(VS) \ \Leftrightarrow \ y'(t).\frac{1}{g(y(t))} = a(t) \ .$$

A cause de cette dernière égalité, on dit que les équations de ce type sont des **équations différentielles à variables séparables.**
Soit $G : K \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de $v \mapsto \frac{1}{g(v)}$. Constatons qu'alors

a) on a l'égalité $(G \circ y)'(t) = y'(t).\frac{1}{g(y(t))}$.

b) La fonction G est continue et strictement monotone (puisque c'est la primitive d'une fonction continue $(t \mapsto \frac{1}{g(t)})$ qui garde un signe contant). Soit L l'image de G. Il existe donc une fonction réciproque $\tilde{G} : L \to K$.

Soit d'autre part $t \mapsto A(t)$ une primitive de $t \mapsto a(t)$. On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} (VS) & \Leftrightarrow & y'(t).\frac{1}{g(y(t))} = a(t) \\ & \Leftrightarrow & (G \circ y)'(t) = A'(t) \\ & \Leftrightarrow & (G \circ y)(t) = A(t) + cte \\ & \Leftrightarrow & G(y(t)) = A(t) + cte \\ & \Leftrightarrow & \tilde{G} \circ G(y(t)) = \tilde{G}(A(t) + cte) \\ & \Leftrightarrow & y(t) = \tilde{G}(A(t) + cte) \end{array} .$$

Attention ! Il est très important de prendre “la bonne” fonction $\tilde{G}$. Voir les exercices de la partie 6.2.

Cas particulier : si $a(t) \equiv 1$. On obtient une équation du type

$$(A) \quad y' = g(y) \ ,$$

Les équations différentielles de ce type sont appelées **équations différentielles autonomes**, car dans leur écriture la variables t n'apparait pas. Elles sont essentielles en physique, puisque les lois permettant de mettre le monde en équation ne dépendent pas du temps. Remarquons que dans ce cas, si $t \mapsto f(t)$ est solution, il en va de même de $t \mapsto f(t + C)$ pour toute constante C.

4. Etude qualitative pour F continue et lipschitzienne en la seconde variable

4.1. **Rappels sur les fonctions de deux variables.** Soient I et J deux intervalles et

$$F : \begin{array}{ccc} I \times J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & F(x, y) \end{array}$$

une fonction de deux variables.

Définition 4.1. La fonction F est dite continue si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de I qui converge vers un élément x de I, pour toute suite $(y_n)_n$ d'éléments de J qui converge vers un élément y de J, la suite $\left(F(x_n, y_n)\right)_n$ converge vers $F(x, y)$.

Pour $a \in I$ fixé, on note $F_{x=a}(y) = F(a, y)$ et pour $b \in J$ fixé, on note $F_{y=b}(x) = F(x, b)$:

$$F_{y=b} : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x, b) \end{array} \quad \text{et} \quad F_{x=a} : \begin{array}{ccc} J & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & F(a, y) \end{array} .$$

Ces deux fonctions d'une variable sont appelées fonctions partielles associées à F.

Remarque : Si la fonction F est continue, alors les deux fonctions partielles sont continues. La réciproque est fausse comme le montre l'exemple classique de la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\left\{ \begin{array}{ll} F(x, y) = 2\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq 0 \\ F(0, 0) = 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Les fonctions partielles de F sont toutes continues (par exemple, $F_{x=0}(y) = 0 = F_{y=0}(x)$) mais la fonction F n'est pas continue (par exemple, $F(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$ pour tout n).

Définition 4.2. Soit $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et (a, b) un point de $I \times J$. On pose

$$(\partial_x F)(a, b) = F'_{y=b}(a) \quad \text{et} \quad (\partial_y F)(a, b) = F'_{x=a}(b)$$

et l'on appelle ces deux nouvelles fonctions de deux variables les dérivées partielles de F.

Théorème 4.3. *Soit $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Supposons que la deuxième dérivée partielle $\partial_y F$ de F est partout définie et qu'il existe un réel $K > 0$ tel que l'on ait une majoration*

$$|\partial_y F(a, b)| < K \qquad (\forall (a, b) \in I \times J) \ .$$

Alors la fonction F est K-lipschitzienne en sa seconde variable, autrement dit on a la propriété

$$|F(a, b) - F(a, c)| \leq K.|c - b| \qquad (\forall a \in I, \ \forall b \in J, \ \forall c \in J) \ .$$

Théorème 4.4. *Soit $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Supposons que les deux dérivées partielles $\partial_x F$ et $\partial_y F$ de F sont partout définies et qu'il existe un réel $K > 0$ tel que l'on ait une majoration*

$$|\partial_x F(a, b)| < K \ \ et \ \ |\partial_y F(a, b)| < K \quad (\forall (a, b) \in I \times J) \ .$$

Alors la fonction F est K-lipschitzienne, autrement dit on a la propriété

$$|F(a, b) - F(a', b')| \leq K. \left(|a' - a| + |b' - b|\right) \qquad (\forall a \in I, \ \forall b \in J, \ \forall c \in J) \ .$$

Remarque : ceci implique en particulier que la fonction est continue sur $I \times J$.

4.2. **Le théorème de Cauchy-Lipschitz.**

Théorème 4.5. *Soit $D=]a,b[\times]c,d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une fonction*

- continue en la première variable,

- lipschitzienne en la seconde variable,

- bornée.

Soit (t_0, y_0) un point de D. Alors on peut trouver un réel $\beta > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & F(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

admette une unique solution $y :]t_0-\beta, t_0+\beta[\to]c,d[$.

Démonstration : Elle sera assez longue. Commençons avec quelques remarques :

• une fonction $g : I \to]c,d[$ est solution de (PC) si et seulement si l'égalité

$$g(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))\mathrm{d}s$$

est vérifiée (pour tout $t \in I$).

• on peut bien supposer (et on le fera dans la suite) que t_0 est le milieu de l'intervalle $]a,b[$ et que y_0 est le milieu de l'intervalle $]c,d[$.

• On notera dans la suite K pour le coefficient de Lipschitz, et M pour le majorant.

Définissons par récurrence, pour α assez petit, la suite de fonctions

$$g_0(t) = y_0 \qquad g_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, g_n(s))\mathrm{d}s \quad (t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[)\,.$$

Si l'on arrive à démontrer que la suite de fonctions $(t \mapsto g_n(t))_n$ converge, on peut espérer que la limite sera solution.

1) Avant cela, nous devons nous assurer que la suite en question est bien définie, ce qui revient à vérifier que pour α assez petit, g_n prend sur $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$ des valeurs dans $]c,d[$.

Il est clair que g_0 est définie sur $]a,b[$ tout entier, puisque constante. Voyons ce qu'il en est de g_1. On a

$$g_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)\mathrm{d}s \;\Rightarrow\; |g_1(t) - y_0| \le M|t-t_0|.$$

Donc en prenant $\alpha = \min(\frac{d-c}{2M}, \frac{b-a}{2})$, on aura bien

$$t \in]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\;\Rightarrow\; g_1(t) \in]c,d[\;.$$

Une petite récurrence montre qu'il en sera de même de g_n pour tout n.

2) Montrons maintenant que la suite $(t \mapsto g_n(t))_n$ converge. Pour $0 < \beta < \alpha$, on notera dans la suite $I^\beta =]t_0-\beta, t_0+\beta[$ et pour $n \ge 1$ on notera

$$\varepsilon_n^\beta = \sup_{t \in]t_0-\beta, t_0+\beta[} |g_n(t) - g_{n-1}(t)| \;.$$

On a alors

$$|g_{n+1}(t) - g_n(t)| \le \int_{t_0}^{t} |f(s, g_n(s)) - f(s, g_{n-1}(s))|\mathrm{d}s \le \int_{t_0}^{t} K|g_n(s) - g_{n-1}(s)|\mathrm{d}s \le |t-t_0|.K.\varepsilon_n < \beta K \varepsilon_n^\beta \;.$$

On obtient ainsi les inégalités

$$\varepsilon_{n+1}^\beta < \beta K \varepsilon_n^\beta < (\beta K)^2 \varepsilon_{n-1}^\beta < \cdots < (\beta K)^n \varepsilon_1^\beta \;,$$

et donc, pour deux entiers $n > N$, les inégalités

$$\sup_{t \in]t_0-\beta, t_0+\beta[} |g_n(t) - g_N(t)| \le (\beta K)^n \varepsilon_1^\beta + (\beta K)^n \varepsilon_1^\beta + \cdots + (\beta K)^N \varepsilon_1^\beta = (\beta K)^N.\varepsilon_1^\beta.\frac{1-(\beta K)^{n-N}}{1-\beta K} \;.$$

Finalement, si l'on choisit $0 < \beta < \alpha$ tel que l'on ait $\beta K < 1$, on en déduira l'inégalité

$$\sup_{t \in]t_0-\beta, t_0+\beta[} |g_n(t) - g_N(t)| \le (\beta K)^N.\varepsilon_1^\beta.\frac{1}{1-\beta K} \;.$$

Puisqu'alors $(\beta K)^N$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini, cela montre que pour tout t, la suite $(g_n(t))_n$ est une suite de réels convergente. On note $g : I^\beta \to]c,d[$ la fonction définie par

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) \;.$$

Posons

$$e_n^\beta = \sup_{t\in]t_0-\beta,t_0+\beta[}|g(t)-g_n(t)| \ .$$

On a en particulier montré ci-dessus l'inégalité

$$e_n^\beta \le (\beta K)^N.\varepsilon_1^\beta.\frac{1}{1-\beta K} \ .$$

3) La fonction $g : I^\beta \to]c,d[$ construite ci-dessus est solution du problème de Cauchy (PC). Pour vérifier ce point, il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité

$$|g(t) - y_0 - \int_{t_0}^t f(t,g(t))\mathrm{d}t| < \varepsilon \ .$$

Or il existe (d'après la partie 2) un entier N tel que l'on ait $\varepsilon_n^\beta < \varepsilon/2\beta$ et $e_n^\beta < \varepsilon/2$ pour tout $n > N$. On a alors les inégalités

$$\begin{array}{rcl} |g(t)-y_0-\int_{t_0}^t f(t,g(t))\mathrm{d}t| & = & |g(t)-y_0-\int_{t_0}^t f(t,g_{n+1}(t))\mathrm{d}t + y_0 + \int_{t_0}^t f(t,g_{n+1}(t))\mathrm{d}t - y_0 - \int_{t_0}^t f(t,g(t))\mathrm{d}t| \\ & \le & |g(t)-y_0-\int_{t_0}^t f(t,g_{n+1}(t))\mathrm{d}t| + |\int_{t_0}^t f(t,g_{n+1}(t))\mathrm{d}t - \int_{t_0}^t f(t,g(t))\mathrm{d}t| \\ & \le & e_n^\beta + |\int_{t_0}^t f(t,g_{n+1}(t))\mathrm{d}t - \int_{t_0}^t f(t,g(t))\mathrm{d}t| \\ & \le & e_n^\beta + \beta\varepsilon_n^\beta \ < \varepsilon \end{array}$$

Remarque : cet argument montre en particulier que g est une fonction continue et dérivable.

4) Unicité de la solution : si g et h sont deux solutions de notre problème de Cauchy, alors on a

$$|g(t)-h(t)| = \int_{t_0}^t f(t,g(t)) - f(t,h(t))\mathrm{d}t \le K\int_{t_0}^t |g(t)-h(t)|\mathrm{d}t \le K\max_{[t_0,t]}|g-h|.|t-t_0| \ .$$

(La première inégalité est due au fait que f est K lipschitzienne en sa seconde variable, et la seconde vient de ce qu'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné est bornée et atteint son maximum.)

Ainsi, si l'on choisit γ tel que l'on ait $\gamma K < 1$, on obtient l'inégalité

$$|g(t)-h(t)| \le \frac{1}{2}\max_{[t_0-\gamma,t_0+\gamma]}|g-h|$$

ce qui n'est possible que si ce maximum vaut 0.

4.3. **Solutions maximales.**

Soient $J =]a,b[$ et $K =]c,d[$ deux intervalles. Soit $F : J\times K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit (t_0,y_0) un élément de $J\times K$. On a vu qu'on peut trouver (sous certaines conditions sur F) un petit intervalle $]t_0-\beta,t_0+\beta[$ sur lequel il existe une solution $g :]t_0-\beta,t_0+\beta[\to]c,d[$ de l'équation différentielle associée à F et soumise à la condition initiale $g(t_0) = y_0$. Peut-on trouver un intervalle un peu plus grand sur lequel il existe une solution du même problème de Cauchy ?

Le théorème suivant montre qu'il existe un plus grand intervalle sur lequel on peut trouver une solution, appelée solution maximale.

Théorème 4.6. *Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne en la seconde variable. Soit (t_0,y_0) un point de D. Alors il existe un intervalle ouvert $I_{max} =]\omega_-,\omega_+[$ contenant t_0 tel que*

a) l'équation différentielle associée à F admette une solution $y : I_{max} \to]c,d[$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$,

b) pour toute solution $z : I \to]c,d[$ de l'équation différentielle associée à F vérifiant la condition initiale $z(t_0) = y_0$, on ait

$$I \subset I_{max} \quad et \quad z(t) = y(t) \ \ (\forall t \in I) \quad .$$

On peut alors se demander comment caractériser ω_- et ω_+. La réponse est donnée dans le résultat suivant :

Théorème 4.7. *Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, lipschitzienne en la seconde variable. Soit (t_0,y_0) un point de D. Soit $g :]\omega_-,\omega_+[\to]c,d[$ la solution maximale de l'équation différentielle associée à F vérifiant la condition initiale $z(t_0) = y_0$. Alors*

- soit $\omega_+ = b$,

- soit on a l'égalité $\lim_{t\to\omega_+} g(t) \in \{c,d\}$.

4.4. **Continuité en la condition initiale.**

Théorème 4.8. *Soit $D =]a,b[\times]c,d[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, K-lipschitzienne en la seconde variable. Soient t_0 et t_1 des éléments de $]a,b[$ et y_0 et y_1 des éléments de $]c,d[$. Supposons que*

a) Il existe un réel M tel que l'on ait l'inégalité $|F(x,y)| < M \quad (\forall (x,y) \in D)$

b) Il existe un intervalle $]\alpha,\beta[$ contenant t_0 et t_1 et deux fonctions $g_0 :]\alpha,\beta[\to]c,d[$ et $g_1 :]\alpha,\beta[\to]c,d[$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} g_0'(t) & = & F(t, g_0(t)) \\ g_0(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} g_1'(t) & = & F(t, g_1(t)) \\ g_1(t_1) & = & y_1 \end{array} \right. .$$

Pour $\varepsilon > 0$, posons $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1} e^{-K(\beta-\alpha)}$. Alors on a la propriété

$$[|y_1 - y_0| < \delta \text{ et } |t_1 - t_0| < \delta] \Rightarrow [|g_1(t) - g_0(t)| < \varepsilon \ \forall t \in]\alpha, \beta[] \quad .$$

4.5. **Continuité en le paramètre.**

On s'intéresse ici à une équation différentielle dépendant d'un paramètre. C'est par exemple le cas de l'équation différentielle

$$y'(t) = \lambda y(t) \ ,$$

qui dépend du paramètre λ.

Si l'on se donne deux valeurs assez proches de λ_0 et λ_1 et une même condition initiale $y(t_0) = y_0$, est-il vrai que les solutions f_{λ_0} et f_{λ_1} des deux équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \lambda_0 y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \lambda_1 y(t) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

restent proches ?

Plus précisément, on peut se demander, lorsque l'on se donne $t_1 > t_0$, ainsi qu'une erreur admise ε, si l'on peut trouver un réel strictement positif δ tel que l'on ait

$$|\lambda_1 - \lambda_0 0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{\lambda_1}(t_1) - f_{\lambda_0}(t_1)| < \varepsilon \quad .$$

Dans ce cas particulier, il est facile de voir que la réponse est positive (cf. le premier exemple 1.1)

Pour obtenir un résultat plus général, il faut considérer qu'une équation différentielle dépendant d'un paramètre λ est du type

$$y'(t) = F(t, y(t), \lambda)$$

où F est une fonction de 3 variables. Supposons que celle-ci soit continue, K-lipschitzienne en la seconde variable, et P-lipschitzienne en la troisième variable, autrement dit telle que l'on ait

$$|F(x,y,z) - F(x,y,z')| < P\,|z - z'| \quad (\forall x, y, z, z') \ .$$

Soient g la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & F(t, y(t), \lambda_1) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

et h la solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & F(t, y(t), \lambda_2) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array} \right.$$

Posons

$$\varepsilon(x) = |h(t_0 + x) - g(t_0 + x)| \ .$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(x) & = & \left|\int_0^x F(t_0+s, h(t_0+s), \lambda_2) - F(t_0+s, g(t_0+s), \lambda_1) \mathrm{d}s\right| \\ & \leq & \int_0^x |F(t_0+s, h(t_0+s), \lambda_2) - F(t_0+s, g(t_0+s), \lambda_1)| \,\mathrm{d}s \\ & \leq & \int_0^x |F(t_0+s, h(t_0+s), \lambda_2) - F(t_0+s, g(t_0+s), \lambda_2)| \,\mathrm{d}s \ + \\ & & \int_0^x |F(t_0+s, g(t_0+s), \lambda_2) - F(t_0+s, g(t_0+s), \lambda_1)| \,\mathrm{d}s \\ & \leq & \int_0^x K\varepsilon(s)\mathrm{d}s + \int_0^x P\,|\lambda_1 - \lambda_2|\,\mathrm{d}s \\ & \leq & K\int_0^x \varepsilon(s)\mathrm{d}s + Px\,|\lambda_1 - \lambda_2| \end{array}$$

Dans le pire des cas, on aura une égalité

$$\varepsilon(x) = K\int_0^x \varepsilon(s)\mathrm{d}s + Px\,|\lambda_1 - \lambda_2| \ ,$$

équation différentielle d'où l'on tire, en tenant compte de la condition initiale $\varepsilon(0) = 0$,

$$\varepsilon(x) = \frac{P\,|\lambda_1 - \lambda_2|}{K}(e^{Kx} - 1) \ .$$

On a donc le résultat :

Théorème 4.9. *Soit $D =]a,b[\times]c,d[\times]k,l[$ une partie de $\mathbb{R}^2$. Soit $F : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue, K-lipschitzienne en la seconde variable, P-lipschitzienne en la troisième variable. Soient $t_0 \in]a,b[$, $y_0 \in]c,d[$, et λ_1, λ_2 deux éléments de $]k,l[$.Soient g la solution du problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & F(t,y(t),\lambda_1) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

et h la solution du problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & F(t,y(t),\lambda_2) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

alors on a l'inégalité

$$|g(t_0+x) - h(t_0+x)| \leq \frac{P\,|\lambda_1 - \lambda_2|}{K}(e^{Kx} - 1) \ .$$

5. Etude quantitative

5.1. **La méthode d'Euler.** On cherche une solution approchée de l'équation différentielle

$$y' = f(x,y) \qquad y(a) = y_a \quad (\star)$$

sur l'intervalle $I = [a,b]$. Pour cela,

- on suppose qu'il existe une solution $y : [a,b] \to \mathbb{R}$,
- on choisit un entier N, on pose $h = \frac{b-a}{N}$ et $x_n = a + nh$, et l'on découpe l'intervalle I en N morceaux identiques :

$$\begin{array}{rcccccccc} I & = & [a\,,\,a+h] & \cup & [a+h\,,\,a+2h] & \cup & \ldots & \cup & [a+(N-1)h\,,\,b] \\ & = & [x_0,x_1] & \cup & [x_1,x_2] & \cup & \ldots & \cup & [x_{N-1},x_N] \end{array} \ ,$$

- on définit une suite $(y_n)_n$ par récurrence en posant

$$(\spadesuit) \qquad \left\{\begin{array}{l} y_0 = y_a \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \end{array}\right. \ ,$$

- pour mesurer l'erreur, on introduit

$$\varepsilon_n = |y(x_n) - y_n|$$

et

$$e_N = \max_{0\leq n\leq N} \varepsilon_n \ .$$

- La formule de Taylor donne :

$$\begin{array}{lrcll} & y(x_{n+1}) & = & y(x_n) + hy'(c) & (c \in]x_n, x_{n+1}[) \\ (\clubsuit) & y(x_{n+1}) & = & y(x_n) + hf(c,y(c)) & (c \in]x_n, x_{n+1}[) \end{array}$$

d'où l'on tire, en soustrayant $(\spadesuit)$:

$$(\diamondsuit) \quad y(x_{n+1}) - y_{n+1} \ = \ y(x_n) - y_n + h\left[f(c,y(c)) - f(x_n,y_n)\right] \quad (c \in]x_n, x_{n+1}[) \ .$$

- Supposons maintenant que f est K-Lipschitzienne. En particulier, on a l'inégalité

$$|f(x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2) - f(x,y)| \leq K(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|) \quad (\forall x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) \ .$$

Supposons aussi que f est bornée sur le domaine d'étude : $|f(x,y)| < M$.

Alors on a les inégalités

$$\begin{array}{rcl} |f(c,y(c)) - f(x_n,y_n)| & \leq & |f(c,y(c)) - f(c,y(x_n))| + |f(c,y(x_n)) - f(x_n,y(x_n))| + |f(x_n,y(x_n)) - f(x_n,y_n)| \\ & \leq & K|y(c) - y(x_n)| + K|c - x_n| + K|y(x_n) - y_n| \\ & \leq & K\int_{x_n}^{c} |f(t,y(t))|\,\mathrm{d}t + Kh + K\varepsilon_n \\ & \leq & KM(c - x_n) + K(h + \varepsilon_n) \end{array}$$

d'où l'on tire

$$(\heartsuit) \quad |f(c,y(c)) - f(x_n,y_n)| \leq K(\varepsilon_n + (M+1)h) \ .$$

- En associant $(\heartsuit)$ et $(\diamondsuit)$ on obtient ainsi l'inégalité

$$\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n(1 + Kh) + K(M+1)h^2 \ .$$

Par récurrence, on en déduit les inégalités

$$\begin{array}{rcl} e_N & \leq & K(M+1)h^2(1+(1+Kh)+\cdots+(1+Kh)^{N-1}) \\ & \leq & K(M+1)h^2\frac{1-(1+Kh)^N}{1-(1+Kh)} \\ & \leq & (M+1)h\left(\left(1+\frac{K(b-a)}{N}\right)^N-1\right) \\ & \leq & (M+1)\frac{b-a}{N}\left(e^{K(b-a)}-1\right) \end{array} \quad .$$

Théorème 5.1. *Soit $f:[a,b]\times]c,d[\to\mathbb{R}$ une fonction K-lipschitzienne, dont la valeur absolue est bornée par M. Soit $y_a\in]c,d[$. Soit $y:[a,b]\to]c,d[$ une solution du problème de Cauchy*

$$y'=f(x,y) \qquad y(a)=y_a \quad .$$

Soit $\varepsilon>0$ un nombre réel. Alors pour $N>\frac{b-a}{\varepsilon}(M+1)(e^{K(b-a)}-1)$, le N-ième terme de la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{l} y_0=y_a \\ y_{n+1}=y_n+\frac{b-a}{N}f(a+\frac{n}{N}(b-a),y_n) \end{array}\right.$$

est une approximation à ε près de $y(b)$. Autrement dit, on a

$$|y(b)-y_N|<\varepsilon \quad .$$

6. Exercices

6.1. **Equations différentielles linéaires.**

1) Tracer le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y'(t) = t$, puis résoudre cette équation différentielle.

2) Tracer le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y'(t) = y(t)$, puis résoudre cette équation différentielle.

3) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+1 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+t \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+t^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t)+15-17t+12t^2 \\ y(0) & = & 10 \end{array}\right.$$

4) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}y(t) \qquad y'(t) = \frac{1}{t^3}y(t) \qquad y'(t) = \frac{1}{t}y(t)$$

puis les suivantes

$$y'(t) = \frac{1}{t^2}y(t) + \frac{1}{t^2} \qquad y'(t) = \frac{1}{t^3}y(t) + \frac{1}{t^5} \qquad y'(t) = \frac{1}{t}y(t) + 3t^3$$

5) Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'(t) = \sin(t)y(t) \qquad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2} \qquad y'(t) = e^t y(t)$$

puis les suivantes

$$y'(t) = \sin(t)y(t) + \sin(2t) \qquad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2} + \frac{e^{\arctan(t)}}{(t+1)(1+t^2)} \qquad y'(t) = e^t y(t) + e^{3t}$$

6) Résoudre l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{ccc} y'(t) + \frac{y(t)}{t\ln(t)} & = & \frac{1}{t} \\ y(e) & = & 3 \end{array}\right.$$

7) Equation de Bernoulli

a) Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + ty^2(t)$ (on pourra remarquer que si l'on pose $v(t) = \frac{-1}{y(t)}$, cette équation différentielle devient $v'(t) = -v(t) + t$).

b) Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + ty^n(t)$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + y^2(t)[\cos(t) - \sin(t)]$.

d) Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + y^n(t)[\cos(t) - \sin(t)]$, pour $n \in \mathbb{Z}$.

8) Résoudre l' équation différentielle

$$\sin(y(t)).y'(t) = \cos(t)\left[2\cos y - \sin^2(t)\right] \qquad \text{(poser } v(t) = \cos(y(t))\text{)}$$

6.2. **Equations différentielles autonomes et à variables séparables.**

1) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = e^{y(t)} \qquad y'(t) = 1 + y^2(t)$$

2) Quelles sont les primitives de la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$.

a) Quelle est l'unique primitive G de f définie sur $\mathbb{R}_+^\times$telle que l'on ait $G(1) = 1$? Tracer son graphe. Tracer le graphe de la fonction réciproque $\tilde{G}$.

b) Quelle est l'unique primitive H de f définie sur $\mathbb{R}_-^\times$telle que l'on ait $H(-1) = -1$? Tracer son graphe. Tracer le graphe de la fonction réciproque $\tilde{H}$.

c) Résoudre les équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & \frac{y(t)}{1+y^2(t)} \\ y(2) & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & \frac{y(t)}{1+y^2(t)} \\ y(2) & = & -1 \end{array} \right.$$

3) On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = \tan(y(t)) \ .$$

a) Tracer le champ de vecteurs associé à (E).

b) Quelles sont les solutions de (E) ?

c) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{\pi}{4}$.

d) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = -\frac{\pi}{4}$.

e) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{3\pi}{4}$.

f) Tracer la solution de (E) vérifiant $y(5) = 0$.

4) On considère l'équation différentielle

$$(E) \ \ y'(t) = \frac{1}{\sin y(t)} \ .$$

a) Tracer le champ de vecteurs associé à (E).

b) Indépendament, tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \arccos(\cos(x))$.

c) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(y(t)) = -t + C$ pour toute constante C.

d) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

e) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(5) = \frac{5\pi}{4}$.

f) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(2) = \frac{11\pi}{4}$

g) Trouver la solution de (E) vérifiant $y(3) = -\frac{\pi}{4}$.

5) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'(t) = (t + t^2)e^{y(t)} \qquad y'(t) = \frac{1 + y^2(t)}{\sqrt{1 - t^2}} \qquad y'(t) = \frac{\sin(t)}{1 + y^2}$$

6.3. **Exemples.**

1) Dans une culture de bactéries, le taux d'accroissement (nombre de naissances - nombre de morts) est proportionnel au nombre d'individus présents.

a) Si l'on constate que le nombre de bactéries a doublé au bout d'une heure, que peut-on s'attendre à observer après 12 heures ?

b) Si l'on constate que le nombre de bactéries est 10^4 au bout de 3 heures, et 4.10^4 au bout de 5 heures, combien y avait-il de bactéries initialement ?

2) Une substance chimique A se dissout dans de l'eau. Au temps t l'accroissement de substance dissoute est proportionnel au produit de [la quantité non encore dissoute] par [la différence entre [la concentration de la solution lorsqu'elle est saturée] et [la concentration au temps t]].

On sait que 100g d'une solution saturée contiennent 50g de la substance A, et que lorsque l'on plonge 30g de la substance A dans 100g d'eau, 10g sont dissouts en 2 heures.

Quelle quantité sera dissoute au bout de 5 heures ?

Combien de temps faut-il pour qu'il ne reste plus qu'un gramme de la substance A non encore dissout ?

Répondre à la même question lorsque l'on plonge la même quantité de substance A dans L litres d'eau. Que peut-on dire lorsque L tend vers l'infini ?

3) Un parachutiste saute d'un hélicoptère (supposé fixe) à une altitude de 1000m.

Quelle est sa vitesse au bout de 10 secondes ? (On utilisera la valeur $g = 9,8 m.s^{-2}$, et l'on négligera la résistance de l'air). Quelle est alors son altitude ?

A ce moment, il ouvre son parachute. La résistance de l'air devient plus importante : la force exercée (vers le haut) par l'air est de $\frac{P}{25}v^2$, le poids total du parachutiste et de son équipement étant P. Calculer la vitesse du parachutiste en fonction du temps.

Au bout de combien de temps le parachutiste touche-t-il terre ?

4) Trouver la forme d'un miroir (fixe) tel que les rayons provenant d'une source lumineuse (fixe) soient tous réflechis dans la même direction.

6.4. **Méthode d'Euler.**

1) Que donne la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & f(t) \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right. \quad ?$$

2) En utilisant la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & y(t) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad ,$$

trouver une suite convergeant vers e^5.

3) (La méthode d'Euler peut donner des informations d'assez mauvaise qualité)

Que donne la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & -2y(t) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad ?$$

4) Savez-vous résoudre l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & t^3 + t^2 y(t) + t y^2(t) \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. \quad ?$$

Vérifier que le théorème de cauchy-Lipschitz s'applique à cette situation. Il existe donc une unique solution f.

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(2)$.

6.5. **Dépendance en les paramètres.**

1) Reprendre l'exercice 3 de la partie 6.3 en considérant que la constante de gravitation est $g = 9,8\ \pm 0,1\ m.s^{-2}$.

2) On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \frac{y(t)}{\sqrt{\lambda+t}} \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. .,$$

et l'on sait que λ vaut à peu près 1. Quelle précision doit-on avoir sur λ pour connaître $y(10)$ à 10^{-1} près ?

3) On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \lambda e^{-y(t)} \\ y(0) & = & 1 \end{array} \right. .,$$

et l'on sait que λ vaut à peu près 1. Quelle précision doit-on avoir sur λ pour connaître $y(10)$ à 10^{-1} près ?

6.6. **Dépendance en la condition initiale.**

1) Reprendre l'exercice 3 de la partie 6.3 en considérant que l'hélicoptère est à une altitude de $1000m \pm 10m$.

2) On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & \frac{y(t)}{\sqrt{1+t}} \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. .,$$

et l'on sait que y_0 vaut à peu près 1. Quelle précision doit-on avoir sur y_0 pour connaître $y(10)$ à 10^{-1} près ?

3) On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{lcl} y'(t) & = & e^{-y(t)} \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right. .,$$

et l'on sait que y_0 vaut à peu près 1. Quelle précision doit-on avoir sur y_0 pour connaître $y(10)$ à 10^{-1} près ?