

# Invariants de Welschinger

ALEXANDRU OANCEA  
(IRMA Strasbourg)

Séminaire Bourbaki, 2 avril 2011

# Plan de l'exposé

- 1 Introduction
- 2 Détails de la construction
- 3 Résultats d'optimalité
- 4 Développements

# Un problème énumératif

*Combien de courbes rationnelles de degré  $d$  passent par  $3d - 1$  points génériques de  $\mathbb{P}^2$  ? (sur  $\mathbb{C}$ , respectivement sur  $\mathbb{R}$ )*

Degrés de liberté :  $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$  degré  $d \geq 1$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow (P/R, Q/R) : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^2$

$$(3d + 3) - \underbrace{1}_{\text{constante multiplicative}} - \underbrace{3}_{\text{automorphismes}} = 3d - 1$$

## Théorème (Kontsevich '94)

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$  Le nombre  $N_d$ ,  $d \geq 2$  de courbes rationnelles passant par  $3d - 1$  points génériques vérifie

$$N_d = \sum_{k+\ell=d} N_k N_\ell (k^2 \ell^2 C_{3d-4}^{3k-2} - k^3 \ell C_{3d-4}^{3k-1}).$$

Le nombre  $N_d$  ne dépend pas du choix des points.

# Calculs en degrés $d \leq 3$ dans le cas complexe

- $N_1 = 1$  par deux points passe une unique droite ;
- $N_2 = 1$  par cinq points génériques passe une unique conique ;
- $N_3 = 12$  (Schubert)

8 points génériques déterminent uniquement un pinceau de cubiques dont le lieu de base les contient. Les cubiques rationnelles sont les cubiques singulières de ce pinceau.

Éclatement du lieu de base :

- ▶  $\chi(\tilde{\mathbb{P}}^2) = 12$
  - ▶ les fibres génériques sont des courbes elliptiques ( $\chi = 0$ )
  - ▶ génériquement, les fibres singulières sont nodales ( $\chi = 1$ )  $\rightsquigarrow N_3 = 12$
- $N_4 = 620$  (Zeuthen)

Développements engendrés par ce type de problème énumératif (sur  $\mathbb{C}$ ) :

- Invariants de Gromov-Witten : énumération de courbes de genre  $g$  soumises à des conditions de tangence et à des conditions d'incidence non nécessairement ponctuelles. Formules de récurrence (Caporaso-Harris, Ionel-Parker)
- Produit quantique sur la cohomologie d'une variété symplectique  $\rightsquigarrow$  applications en dynamique hamiltonienne
- Symétrie miroir (dualité symplectique – complexe)

# Le cas réel - l'exemple des cubiques

Nouveauté : le nombre de courbes **réelles** dépend du choix des points.

## Notation

$\mathcal{R}_r^d(\underline{x}) =$  ensemble des courbes rationnelles réelles de degré  $d$  qui interpolent une collection  $\underline{x}$  avec  $r$  points réels ;  $R_r^d(\underline{x}) = \#\mathcal{R}_r^d(\underline{x})$ .

- $R_r^1 = 1$  par deux points une unique droite ;
- $R_r^2 = 1$  par cinq points une unique conique ;
- $R_r^3(\underline{x}) \geq r$  & toute valeur  $\{r, r+2, \dots, 12\}$  est réalisable (Kharlamov)

Éclatement  $\rightarrow$  lieu réel  $\mathbb{R}\tilde{\mathbb{P}}^2$  fibre sur  $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$ ,  $\chi = -r$

Fibres singulières = cubiques ayant un nœud réel

- $c_-$  courbes ayant un nœud solitaire,  $\chi = 1$
- $c_+$  courbes ayant un nœud non-solitaire,  $\chi = -1$



$$r = |c_- - c_+| \leq c_- + c_+ = R_r^3 \leq 12$$

# Borne inférieure pour $R_r^d(\underline{x})$ , invariant de Welschinger

$r$  fixé,  $\underline{x}$  avec  $r$  points réels ( $\underline{x}$  générique  $\Rightarrow$  courbes immergées)

## Théorème (Welschinger 2003)

$C$  courbe rationnelle réelle dans  $\mathbb{P}^2$  interpolant  $\underline{x}$  générique

- $m(C)$  = # nœuds réels solitaires : masse de  $C$ .
- $\varepsilon(C) = (-1)^{m(C)}$  : signe de Welschinger de  $C$ .

L'entier

$$\chi_r^d(\underline{x}) = \sum_{C \in \mathcal{R}_r^d(\underline{x})} \varepsilon(C) \in \mathbb{Z}$$

ne dépend pas du choix générique de  $\underline{x}$ . On note  $\chi_r^d = \chi_r^d(\underline{x})$ .

$$|\chi_r^d| \leq R_r^d(\underline{x}) \leq N_d$$

# Conséquences de l'existence des invariants de Welschinger I

Théorème (Itenberg, Kharlamov, Shustin 2004)

*Équivalence asymptotique* ( $d \rightarrow \infty$ )

$$\log \chi_{3d-1}^d \sim \log N_d \sim 3d \log d.$$

Théorème (Itenberg, Kharlamov, Shustin 2003)

$$|\chi_{3d-1}^d| \geq d!/2.$$

**Méthode : géométrie tropicale**

(théorème de correspondance de Mikhalkin)

! Avant la découverte des invariants de Welschinger, on ne savait même pas démontrer l'existence d'**une** courbe rationnelle réelle en degré  $d \geq 4$ .

**Remarque :**  $r = 3d - 1$  valeur maximale (collection totalement réelle)

### Théorème (Welschinger 2007)

*On suppose  $r = 0, 1$ . La borne inférieure  $|\chi_r^d|$  est atteinte lorsque les points non-réels de  $\underline{x}$  sont choisis suffisamment proches d'une conique imaginaire pure.*

**Méthode : théorie symplectique des champs** (théorème de compacité de Bourgeois, Eliashberg, Hofer, Wysocki, Zehnder)

**Remarque :**  $r = 0, 1$  – hypothèse de maximalité sur le nombre de paires de points complexes conjugués dans  $\underline{x}$ .

**Calculs explicites (sans ordinateur !)** :  $\chi_1^4 = 0$ ,  $\chi_0^5 = 64$ ,  $\chi_1^6 = 1024$ ,  
 $\chi_0^7 = -14336$ ,  $\chi_1^8 = -280576$  (Welschinger 2007).

# Changement de cadre : géométrie symplectique réelle

## Définition

Variété symplectique réelle  $(X^{2n}, \omega, c_X)$  :

- $\omega$  forme symplectique  $\omega^n \neq 0$  et  $d\omega = 0$  ;
- $c_X$  involution anti-symplectique  $c_X \circ c_X = \text{Id}_X$  et  $c_X^* \omega = -\omega$ .

Exemples :

- $(\mathbb{P}^n, \omega_{FS}, \text{conj})$  ; les variétés projectives définies sur  $\mathbb{R}$ .
- $(T^*L, d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$ ,  $c_L : (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (-\mathbf{p}, \mathbf{q})$ .

## Lemme

S'il est non-vide, le lieu réel  $\mathbb{R}X = \text{Fix}(c_X)$  est une sous-variété lisse lagrangienne :  $\dim \mathbb{R}X = n$  et  $\omega|_{T\mathbb{R}X} = 0$  (! peut-être non-connexe).

voisinage de  $\mathbb{R}X \subset X \simeq$  voisinage  $0_{\mathbb{R}X} \subset T^*\mathbb{R}X$

# Structures presque-complexes

## Point de vue (Gromov 1985)

Variétés symplectiques = analogues “flexibles” des variétés de Kähler

$\mathcal{J}_\omega$  : espace des structures presque-complexes compatibles avec  $\omega$

- $J \in \text{End}(TX)$  de classe  $C^\ell$ ,  $\ell \gg 1$  ;
- $J^2 = -\text{Id}$  ;
- $\omega(\cdot, J\cdot)$  métrique riemannienne.

## Lemme (Gromov)

$\mathcal{J}_\omega$  est une variété de Banach contractile.

$\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega \subset \mathcal{J}_\omega$  : lieu fixe de l'involutions  $J \mapsto -dc_X \circ J \circ dc_X$ .

## Lemme (Welschinger)

$\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$  est une variété de Banach contractile.

# Courbes $J$ -holomorphes $u : (\mathbb{P}^1, j) \rightarrow (X, J)$

$J \in \mathcal{J}_\omega \rightsquigarrow$  opérateur de Cauchy-Riemann non-linéaire (elliptique)

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J(u) \circ du \circ j)$$

On se donne :

- $d \in H_2(X; \mathbb{Z})$  et un entier  $0 \leq r \leq k_d = c_1(X)d - 1$ ,  $r \equiv k_d \pmod{2}$
- $L \subset \mathbb{R}X$  composante connexe
- $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_{k_d}\}$  collection réelle avec  $r$  points réels, tous situés sur  $L$

$\rightsquigarrow$  on marque  $\underline{z} = \{z_1, \dots, z_{k_d}\} \subset \mathbb{P}^1$  collection réelle de points mobiles

## Définition

Espace de modules de courbes  $J$ -holomorphes *réelles* simples interpolant  $\underline{x}$

$$\mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J) = \{u : \bar{\partial}_J u = 0, u_*[\mathbb{P}^1] = d, u(\underline{z}) = \underline{x}, u \circ \text{conj} = c_X \circ u\} / PGL_2$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J) = 2 + c_1(X)d + (c_1(X)d - 1) - 3 - 2(c_1(X)d - 1) = 0.$$

# Invariant $\chi_r^d(L)$ des variétés symplectiques réelles dim. 4

$J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$  **générique**  $\rightsquigarrow$

- l'espace  $\mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J)$  est compact & constitué de courbes immergées.
- $C \in \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J) \rightsquigarrow$  masse  $m(C) =$  nombre de nœuds réels solitaires.

Définition (Welschinger 2003)

Etant donnés  $\underline{x}$  et  $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$  générique, l'**invariant de Welschinger** est

$$\chi_r^d(L; \underline{x}, J) = \sum_{C \in \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J)} \varepsilon(C) \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon(C) = (-1)^{m(C)}.$$

Théorème (Welschinger 2003)

$\chi_r^d(L; \underline{x}, J)$  ne dépend ni du choix de  $\underline{x}$ , ni du choix de  $J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$  générique.

**Notation :**  $\chi_r^d(L)$ .

# Preuve de l'invariance I : points vs. structure presque-complexe

## Lemme

Deux collections  $\underline{x}_0$  et  $\underline{x}_1$  avec  $r$  points réels tous situés sur la même composante de  $\mathbb{R}X$  sont reliées par une isotopie symplectique réelle.

## Démonstration.

- (i) On interpole via une famille  $\underline{x}_t$ ,  $t \in [0, 1]$ .  
(ii) On construit une isotopie  $\phi_t : X \rightarrow X$  hamiltonienne t.q.  $\phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}_t$

$$\frac{d}{dt}\phi_t = X_{H_t} \circ \phi_t$$

avec  $\omega(X_{H_t}, \cdot) = dH_t$  et  $H_t \circ c_X = -H_t$ . □

**Conséquence** :  $\mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}_0, J_0) \simeq \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}_1, \phi_{1*}J_0) \rightsquigarrow$  il suffit de montrer l'invariance par déformation de  $J$  à  $\underline{x}$  fixé.

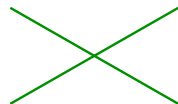
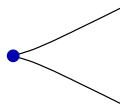
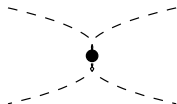
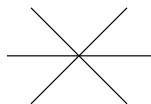
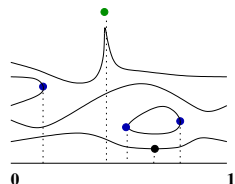
# Preuve de l'invariance II : description des murs

Soit  $(J_t)$ ,  $t \in [0, 1]$  chemin **générique** dans  $\mathbb{R}\mathcal{J}_\omega$ . Il existe

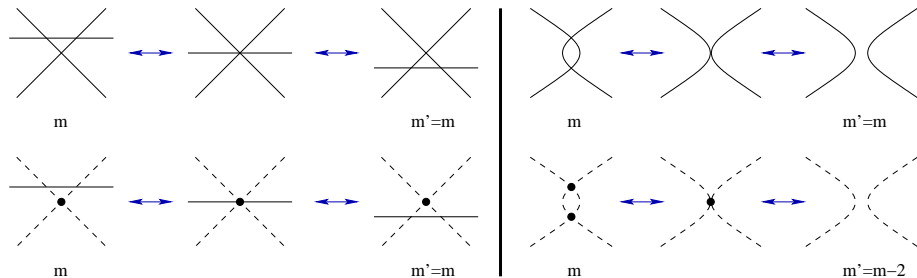
$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N < 1$$

tels que  $\chi_r^d(L; \underline{x}, J_t)$  est défini et localement constant pour  $t \neq t_i$ , et pour  $t = t_i$  l'espace  $\mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J_{t_i})$  contient une courbe ayant

- un point triple réel ;
- un point de tangence de deux branches ;
- un point de rebroussement de première espèce ;
- deux composantes irréductibles.



# Preuve de l'invariance III : le mur des points triples et celui des points de tangence



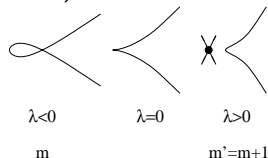
Croisement du mur :

la parité de la masse est constante  $\rightsquigarrow$  le signe de Welschinger est constant

# Preuve de l'invariance IV : le mur des courbes cuspidales

I **Modèle local holomorphe**  $u_\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2, z \mapsto (z^2, z^3 + \lambda z), \lambda$  réel

$$z = \pm\sqrt{-\lambda} : \text{nœud réel} \begin{cases} \text{non-solaire,} & \lambda < 0, \\ \text{solaire,} & \lambda > 0. \end{cases}$$



## II Mur

$\mathcal{C} = \{(u, J) : J \in \mathbb{R}\mathcal{J}_\omega, u : B^2 \rightarrow B^4 \text{ courbe réelle } J\text{-holomorphe cuspidale}\}$

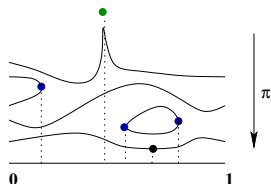
–  $(u_\lambda, J_{\text{std}})$  intersecte  $\mathcal{C}$  transversalement en  $\lambda = 0$

– argument de déformation  $\rightsquigarrow$  **tout** chemin  $(u_\lambda, J_\lambda)$  transverse à  $\mathcal{C}$  vérifie

$$m' = m + 1$$

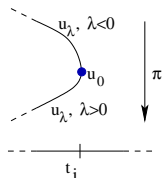
# Le mur des courbes cuspidales (suite)

III Espace de modules à paramètres  $\mathcal{R} = \bigsqcup_t \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J_t) \xrightarrow{\pi} [0, 1]$



$C$  courbe cuspidale = pt critique non-dégénéré de  $\pi$

**Lemme.** (Welschinger + Ivashkovich-Shevchishin)  
Une paramétrisation locale  $(u_\lambda, J_\lambda)$  de  $\mathcal{R}$  au voisinage de  $C$  intersecte transversalement le mur  $C$



IV Fin preuve Pour  $t < t_i$  les deux courbes  $J_t$ -holomorphes non-cuspidales proches de  $C$  ont des masses de parités différentes

# Preuve de l'invariance $V$ : le mur des courbes réductibles

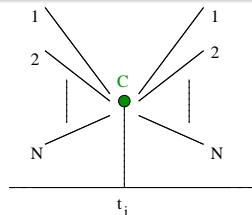
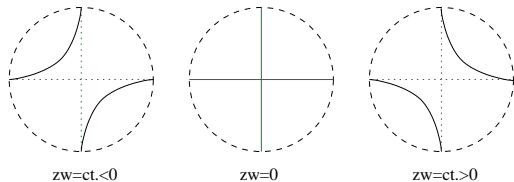
$$\begin{array}{l} \overline{\mathcal{R}}_r^d(L; \underline{x}, J) \\ \text{espace des courbes stables} \\ (\simeq \text{réductibles}) \end{array} \rightsquigarrow \overline{\mathcal{R}}_{univ}(\underline{x}) = \bigsqcup_J \overline{\mathcal{R}}_r^d(L; \underline{x}, J) \xrightarrow{\pi} \mathcal{J}_\omega$$

## Lemme

$C \in \overline{\mathcal{R}}_r^d(L; \underline{x}, t_i)$  réductible à deux composantes  $C_1 \cap C_2 = \{p_1, \dots, p_N\}$

Il existe un voisinage  $\mathcal{W} \subset \overline{\mathcal{R}}_{univ}$  de  $C$  tel que

$J_t$  proche de  $J_{t_i} \Rightarrow \pi^{-1}(J_t) \cap \mathcal{W}$  contient  $N$  courbes obtenues chacune en lissant l'un des nœuds réels  $p_i$ .



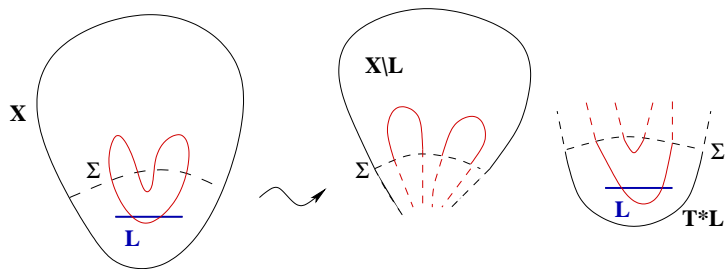
# Changement de cadre : théorie symplectique des champs

**But :** montrer que la borne inférieure  $|\chi_r^d|$ ,  $r = 0, 1$  est parfois atteinte.

**Idée.** Écrire  $X = T^*L \sqcup X \setminus L$

Déformation de  $J$  vers " $\partial\mathcal{J}_\omega$ " :  $J$  acquiert une singularité le long de

$$\Sigma = \partial(\text{voisinage de } L) \longleftrightarrow ST^*L = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) : |\mathbf{p}| = 1\}$$



# Structures presque complexes cylindriques



$\alpha = \mathbf{p}d\mathbf{q}|_{\Sigma}$  forme de contact  $\alpha \wedge d\alpha > 0$

- $\xi = \ker \alpha$  structure de contact
- $R_{\alpha}$  champ de Reeb : flot géodésique
- $\mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$  flot  $\rightsquigarrow$  isomorphisme : voisinage de  $\Sigma \simeq ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times \Sigma, d(e^t \alpha)$

$J$  cylindrique sur  $\mathbb{R} \times \Sigma$

- $J$  préserve  $\xi$ ,  $J \frac{\partial}{\partial t} = R_{\alpha}$ , invariante par translation en  $t$

$J$  a un cou de longueur  $2A$

- $J$  cylindrique via difféo croissant  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \simeq ] - A, A[$

$J$  singulière le long de  $\Sigma$

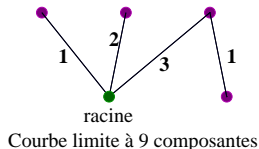
- $J$  définie sur  $X \setminus \Sigma$  & cylindrique via difféo<sup>+</sup>  $] - \varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\} \simeq \mathbb{R}^*$

$$J_{\nu} \rightarrow J_{\infty} \text{ singulière} \iff J_{\nu} \text{ cou de longueur } A_{\nu} \rightarrow \infty$$

# Codage d'une courbe limite réelle (mod $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) par un arbre

## Courbe limite réelle $C$

- domaine = surface de Riemann épointée
- asymptote aux pointes à des orbites de Reeb fermées
- unique composante  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -invariante, les autres composantes sont conjuguées



- **racine** = quotient de l'unique composante  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -invariante
- **sommet** = quotient d'une paire de composantes conjuguées
- **arête** = paire d'asymptotes communes, avec multiplicité

**Hypothèse de travail.**  $L = S^2$  ou  $L = \mathbb{R}P^2$ , métrique courbure constante

$(\dot{S}, u)$  composante de la courbe limite :  $v$  nombre de pointes,  $\chi = 2 - v$

Flot Reeb linéarisé trivialisé  $\left\{ \begin{array}{l} \text{le fibré tangent} \\ \text{le fibré normal} \end{array} \right.$  aux asymptotes

$\bar{\mu} = 2 \times$  l'obstruction à étendre à  $\dot{S}$  la trivialisatation du fibré tangent à  $X$

$\mu = 2 \times$  l'obstruction à étendre à  $\dot{S}$  la trivialisatation du fibré normal

$$\bar{\mu} = \mu + 2\chi$$

$$\dim \mathcal{M}_u = \underbrace{2\chi + \bar{\mu}}_{\text{Cauchy-Riemann}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 4v}_{\text{Morse-Bott}} - \underbrace{(6 - 2v)}_{\text{automorphismes}} = \mu + 2$$

# Optimalité de la borne $|\chi_r^d|$ , $r = 0, 1$ pour $\mathbb{P}^2$ (I)

**Hypothèse.**  $L = S^2$ , ou  $L = \mathbb{R}P^2$  et  $X \simeq \mathbb{P}^2 \# 2k\bar{\mathbb{P}}^2$ ,  $k \leq 3$ .

**Théorème (Welschinger 2007)**

*La borne  $|\chi_r^d|$  est atteinte lorsque  $r = 0, 1$  pour des structures presque complexes génériques ayant un cou suffisamment long au voisinage de  $L$ .*

**Preuve.** Etirement du cou  $J_\nu \rightarrow J_\infty \rightsquigarrow C_\nu \rightarrow C$  codée par arbre enraciné

- 1 la composante  $C_{s_0}$  codée par la racine est un cylindre ayant comme asymptotes deux orbites de Reeb simples (conjuguées)
- 2 un tel cylindre est plongé
- 3 tous les nœuds réels sont solitaires

$$m(C_\nu) \equiv \frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2) \pmod{2}$$

# Optimalité (II) – composantes simples

Preuve de **1** (racine = cylindre simple) pour  $L = S^2$  ( $r = 1$ )

A arbre  $\equiv$  courbe limite  $\left\{ \begin{array}{l} v \text{ nombre total d'arêtes, } k \text{ multiplicité totale} \\ \mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \text{ sommets dist. paire/impair de } s_0 \end{array} \right.$

Dans  $\mathcal{S}_0$ .  $\mu_s = \bar{\mu}_s - 2\chi_s = 2k_s - 2\chi_s$  (indice Maslov=indice Morse)

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_0} \mu_s = 2k + 2v - 4\#\mathcal{S}_0 + 2.$$

Dans  $\mathcal{S}_1$ .  $\mu_s + 2 \geq 2\#\text{pts marqués sur } C_s$  (courbes simples + généralité)

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_1} \mu_s \geq -2\#\mathcal{S}_1 + (c_1(X)d - 2).$$

Somme.  $v = \#\mathcal{S}_0 + \#\mathcal{S}_1 - 1$  (arbre)

$$\underbrace{c_1(X)d - 2}_{\text{deg.fib.normal}} = \sum_s \mu_s \geq 2k - 2\#\mathcal{S}_0 + (c_1(X)d - 2) \geq c_1(X)d - 2$$

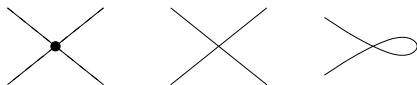
Égalité  $\Rightarrow$  sommets de  $\mathcal{S}_0 =$  feuilles,  $s_0$  inclus, arêtes multiplicité = 1  $\square$

# Retour sur les signes de Welschinger en dimension $n = 2$

$C \in \mathcal{R}_r^d(L; \underline{x}, J)$  courbe réelle immergée  $\rightsquigarrow \frac{1}{2}(d^2 - c_1(X)d + 2)$  nœuds

Le signe  $\varepsilon(C)$  est déterminé par l'une quelconque des quantités suivantes :

- $m(C)$  le nombre de nœuds réels solitaires
- le nombre de nœuds réels non-solitaires
- la parité du “nombre de tours” réalisé par  $\mathbb{R}C$  dans  $L$



## Mesure du nombre de tours

- structure *Spin* si  $L$  orientable ;
- structure  $Pin^\pm$  si  $L$  non-orientable

$\rightsquigarrow$   $\begin{cases} \text{Signes en dimension } n \geq 3 \\ \text{Invariance en dimension 3} \end{cases}$   
(Welschinger)

# Problèmes ouverts & points de vue alternatifs

## Problèmes ouverts

- 1 Invariants en dimension  $n \geq 4$  ( $n = 3$  OK Welschinger 2005)
- 2 Invariants relatifs + formules de récurrence générales

Étirement du cou (Welschinger 2007)

$$\chi_r^d = \chi_{T^*L} * GW_{X \setminus L}$$

## Constructions alternatives

- 1 Géométrie tropicale (Mikhalkin, Itenberg, Kharlamov, Shustin, Brugallé, Gathmann, Markwig, ...)  
Formule de Caporaso-Harris (Itenberg, Kharlamov, Shustin 2009)
- 2 Espaces de modules de disques à bord sur  $\mathbb{R}X$  (Solomon, Cho, Fukaya, ...)

**Mystère.** Symétrie miroir “ouverte” ? (Pandharipande, Solomon, Walcher)

Merci de votre attention !