

**VOLUME ET COURBURE TOTALE POUR LES
HYPERSURFACES DE L'ESPACE EUCLIDIEN**

**VOLUME AND TOTAL CURVATURE FOR
HYPERSURFACES OF EUCLIDEAN SPACE**

ALEXANDRU OANCEA

CMAT, Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France.

Email: oancea@math.polytechnique.fr

et

UMPA, ENS Lyon,
46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France.

RÉSUMÉ. Nous étudions des analogues en dimension supérieure de l'inégalité de Burago $A(S) \leq R^2 T(S)$, avec S une surface fermée de classe C^2 immergée dans \mathbb{R}^3 , $A(S)$ son aire et $T(S)$ sa courbure totale. Nous donnons un exemple explicite qui prouve qu'une inégalité analogue de la forme $\text{vol}(M) \leq C_n R^n T(M)$, avec $C_n > 0$ une constante, ne peut être vraie pour une hypersurface fermée M de classe C^2 dans \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 3$. Nous mettons toutefois en évidence une condition suffisante sur la courbure de Ricci sous laquelle l'inégalité est vérifiée en dimension $n = 3$. En dimension arbitraire nous démontrons des inégalités valables pour des hypersurfaces localement strictement convexes. La première inégalité a un caractère semi-local et majore le volume d'un compact K de M par la courbure totale d'un ouvert U localement strictement convexe qui le contient. Nous présentons différentes autres inégalités impliquant la courbure totale et ayant un caractère isopérimétrique. Au passage, nous obtenons une inégalité isopérimétrique "inverse" valable dans les espaces à courbure constante.

ABSTRACT. We study higher dimensional analogues of Burago's inequality $A(S) \leq R^2 T(S)$, where S is a closed surface C^2 immersed in \mathbb{R}^3 , $A(S)$ is the area and $T(S)$ is the total curvature. We construct an explicit example showing that an analogous inequality of the form $\text{vol}(M) \leq C_n R^n T(M)$, with $C_n > 0$ a constant, cannot hold for an arbitrary closed C^2 immersed hypersurface M of \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 3$. Nonetheless, we exhibit a sufficient condition on the Ricci curvature of M which ensures the inequality in dimension $n = 3$. In arbitrary dimension we prove some inequalities that hold for locally strictly convex hypersurfaces. The first such inequality is of a semi-local nature and bounds the volume of a compact set $K \subset M$ by the total curvature of a locally strictly convex open set U containing it. We prove various other inequalities having an isoperimetric flavour and show that they are optimal. We also prove a "reverse" isoperimetric inequality holding in constant curvature spaces.

Mots-clés: Hypersurfaces - Courbure totale - Inégalités isopérimétriques.
Classification math. : 52A40 - 53A07 - 53C21.

1. INTRODUCTION

Une immersion isométrique d'hypersurface $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^2 est localement rigide en dehors du lieu des points de courbure nulle et on s'attend à ce que les propriétés métriques de M déterminent de nombreuses propriétés de φ . Il y a pourtant peu de résultats quantitatifs qui estiment des caractéristiques extrinsèques en termes d'objets intrinsèques et qui soient valables en toute dimension (voir [BZ] pour plus de références).

Le résultat qui est à la source du présent travail est une inégalité de Burago [BZ] §6.2 en dimension $n = 2$: si $T(M) = \int_M |K| dV$ désigne la courbure totale de l'immersion, R est le rayon d'une boule contenant $\varphi(M)$ et $A(M)$ désigne l'aire de M , alors

$$(1) \quad A(M) \leq R^2 T(M)$$

avec égalité uniquement pour le plongement isométrique standard de la sphère de rayon R . Nous nous sommes posés la question de savoir s'il y a un analogue de (1) en dimension supérieure. La réponse est *négative* pour ce qui est d'une inégalité globale du type

$$(2) \quad \text{vol}(M) \leq C_n R^n T(M) ,$$

avec C_n une constante dépendant uniquement de la dimension. Néanmoins, nous obtenons en dimension $n = 3$ une condition suffisante sous laquelle (2) est vraie, ainsi que des inégalités à caractère isopérimétrique *semi-local* faisant intervenir la courbure totale et qui sont valables pour des bouts d'hypersurface localement strictement convexes.

L'article est structuré comme suit. Nous présentons dans la section 2 un exemple explicite qui prouve qu'il ne peut pas y avoir d'inégalité générale de type (2) en dimension $n \geq 3$. La section 3 développe des formules intégrales concernant les polynômes symétriques des courbures principales et la fonction support de l'immersion. Elles généralisent celles déjà obtenues par Minkowski et Kubota dans le cas convexe [BF] et par Hsiung [Hs] dans le cas non-convexe. Elles sont utilisées d'une part pour donner des conditions intrinsèques suffisantes pour l'inégalité globale en dimension $n = 3$ et d'autre part pour raffiner par la suite l'inégalité semi-locale. Nous obtenons notamment la

Proposition 1. *Soit $\varphi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ une immersion isométrique de classe C^2 avec M une variété riemannienne lisse compacte sans bord. On suppose que $\varphi(M) \subset B^4(0, R)$. Si M vérifie $\text{Ric} \geq -\alpha/R^2$ avec $0 < \alpha < 6$ alors*

$$\text{vol}(M) < \frac{6}{6 - \alpha} R^3 T(M) .$$

Dans la section 4 nous obtenons des inégalités à caractère semi-local valables pour des bouts d'hypersurface localement strictement convexes. On utilise une méthode d'estimation a-priori pour les équations de Monge-Ampère réelles développée par Rauch et Taylor [RT] et reprise par Aubin [Au]. L'opérateur de type Monge-Ampère qui apparaît naturellement dans notre contexte est $f \mapsto \det(H_f + f\text{Id})$ agissant sur les fonctions définies sur S^n . La présence de l'expression $H_f + f\text{Id}$ suggère une relation - qui nous reste pour l'instant cachée - avec la théorie spectrale du laplacien sur S^n . Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1. *On suppose que $M \subset B^{n+1}(0, R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Soit $U \subset M$ un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante C_n qui dépend uniquement de la dimension telle que, si $K \subset U$ est un compact, on ait*

$$(3) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} T(U)$$

et

$$(4) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^{n-1}} T(U) + \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K) ,$$

où $T(U) = \int_U |K| dV$ désigne la courbure totale de U et $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ est la distance sphérique locale entre K et ∂U (voir la définition 1).

Le terme $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ tend vers zéro lorsque U approche K . Cela fait que l'estimation (4) est d'autant meilleure que le compact K est situé à une grande distance du lieu des points de courbure nulle. L'obtention de (4) à partir de (3) à l'aide des formules intégrales globales de type Minkowski occupe la section 4.6. Nous y démontrons aussi la suivante inégalité isopérimétrique.

Proposition 4. *Soit $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion isométrique de surface dont l'image est contenue dans la boule de rayon R . Soit $U \subset M$ un ouvert à bord lisse. Alors*

$$\text{Aire}(U) \leq R^2(T(U) + \frac{1}{2}\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U}) + \frac{1}{2R}\text{Long}(\partial U)) .$$

On a noté $\text{Gauss}_{\partial U}$ l'image de ∂U par l'application de Gauss.

L'optimalité de l'inégalité (4) est discutée dans la section 5 et l'article clôt sur la suivante inégalité isopérimétrique inverse traitée dans l'appendice.

Proposition 7. *Soit D un ouvert borné de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n ou de la sphère \mathbb{S}^n . Si D vérifie la propriété que, pour tout $x \in D$, il existe une boule $B(d) \subset D$ de rayon d qui contient x , alors*

$$\frac{\text{vol}_n D}{\text{vol}_{n-1} \partial D} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)} .$$

On a égalité si et seulement si D est une union disjointe de boules de rayon d .

Remerciements. Ce travail a été préparé sous la direction bienveillante et inspirée de Claude Viterbo, qui saura trouver ici l'expression de ma gratitude. J'ai profité de remarques, suggestions ou patience d'écoute de la part de Jérôme Bertrand, Charles Boubel, Emmanuel Ferrand, Taoufik Hmidi, Nicolae Mihalache, Liviu Ornea, Ferit Oztürk, Pierre Pansu, Jean-Marc Schlenker et Costin Vâlcu. Je leur suis reconnaissant.

Ce travail a été rendu possible grâce à une Allocation de Recherche de l'Ecole Doctorale de Mathématiques de la Région Paris-Sud, couplée avec un poste de moniteur offert par le Laboratoire de Mathématiques de l'Université Paris-Sud.

2. UN CONTRE-EXEMPLE EN DIMENSION $n \geq 3$

Nous construisons pour tout $n \geq 3$ une suite $(M_k^n)_{k \geq 1}$ d'hypersurfaces compactes plongées dans \mathbb{R}^{n+1} , difféomorphes à \mathbb{S}^n et de diamètre extérieur borné, telles que

$$\frac{\text{vol}(M_k^n)}{T(M_k^n)} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty ,$$

où $T(M) = \int_M |K| dV$ désigne la courbure totale de M et $K = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ est la courbure de Gauss-Kronecker, égale au produit des courbures principales de M . La courbure totale mesure avec multiplicités le volume recouvert sur \mathbb{S}^n par l'application de Gauss définie sur M .

L'exemple prouve que l'inégalité (2) ne peut être vérifiée telle quelle en dimension au moins 3 : tout ce que l'on peut espérer de mieux est d'exhiber des classes de variétés intéressantes d'un point de vue géométrique qui la satisfont. Ceci justifie en particulier la proposition 1. La construction que je présente m'a été suggérée par Jean-Marc Schlenker.

Soit

$$\chi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

une fonction C^∞ telle que $\text{supp } \chi \subseteq [-4\pi, 4\pi]$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ sur $[-2\pi, 2\pi]$ et $|\chi'| \leq 1$. Nous définissons aussi

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \chi(x_1) \dots \chi(x_n)$$

et on a $|\frac{\partial \psi}{\partial x_i}| \leq 1$, $\text{supp } \psi \subseteq [-4\pi, 4\pi]^n$, $\psi \equiv 1$ sur $[-2\pi, 2\pi]^n$ et $0 \leq \psi \leq 1$.

Considérons la fonction

$$F_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$F_k(x) = \frac{\sin kx_1}{k^\alpha} \cdot \psi(x).$$

Nous définissons une hypersurface M_k dans \mathbb{R}^{n+1} en tronquant le graphe de F_k au delà de $|x_i| = 4\pi$ et en le refermant de façon lisse par une demi-sphère. Pour tout k , l'hypersurface M_k est contenue dans la boule de rayon 8π .

Prouvons que la famille M_k fournit un contre-exemple à la conjecture, c'est-à-dire

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(M_k)}{T(M_k)} \longrightarrow \infty.$$

Tous les équivalents qui suivent seront considérés pour $k \rightarrow \infty$. Montrons d'abord que $\text{vol}(M_k) \sim k^{1-\alpha}$. On a

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_1} = k^{1-\alpha} \cos kx_1 \psi(x) + k^{-\alpha} \sin kx_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial x_i} = k^{-\alpha} \sin kx_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \quad 2 \leq i \leq n$$

et ceci entraîne

$$\text{vol}(\text{graph}(F_k|_{[-4\pi, 4\pi]^n})) = \int_{[-4\pi, 4\pi]^n} \sqrt{1 + |dF_k|^2} dV \sim k^{1-\alpha} \int_{-2\pi}^{2\pi} |\cos kx_1| dx_1.$$

La dernière expression est équivalente à $k^{1-\alpha}$ et, par conséquence, on aura aussi $\text{vol}(M_k) \sim k^{1-\alpha}$.

D'un autre côté, la normale unitaire au graphe de F_k est

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + |dF_k|^2}} \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_n}, -1 \right)$$

et son image est contenue dans un tube autour du grand cercle déterminé sur \mathbb{S}^n par le plan $x_{n+1} O x_1$. Le rayon de ce tube est équivalent à $\max_{2 \leq i \leq n} |\frac{\partial F_k}{\partial x_i}| \sim k^{-\alpha}$. Puisque chaque point en dehors du grand cercle est touché au plus k fois on déduit

$$T(M_k) \leq Ck(k^{-\alpha})^{n-1} = Ck^{1-(n-1)\alpha},$$

où C est une constante qui ne dépend que de n .

Pour une autre constante C' on aura

$$\frac{\text{vol}(M_k)}{T(M_k)} \geq C' k^{(n-2)\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

et ceci montre la validité de la construction.

Il est intéressant de remarquer l'apparition de l'exposant $n - 2$. Ceci est à relier au fait que l'inégalité (2) est valable en dimension $1 \leq n \leq 2$.

3. FORMULES INTÉGRALES GLOBALES

Nous présentons des généralisations des formules intégrales de Minkowski [BF, Hs] qui impliquent la fonction support d'une immersion et les polynômes symétriques en les courbures principales. On récupère la preuve [BZ] de (1), une preuve simple de (2) en dimension $n = 1$ ou lorsque M est le bord d'un convexe (théorème d'Archimède), ainsi qu'une condition suffisante en dimension $n = 3$.

3.1. Notations. Nous allons adopter un point de vue intrinsèque : l'hypersurface sera représentée par une immersion isométrique $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, où M^n est une variété riemannienne fermée orientée de dimension n . Soit $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ le champ normal unitaire sur (M, φ) et, suivant [BZ], mettons

$$p = \langle \varphi, \nu \rangle, \quad q = |\varphi - \langle \varphi, \nu \rangle \nu|.$$

La fonction p est appelée "fonction support" de (M, φ) et q est la longueur de la composante de φ tangente à $\varphi(M)$. Elles vérifient

$$p^2 + q^2 = |\varphi|^2.$$

Pour des vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$, on note (u_1, \dots, u_{n+1}) le volume du parallélépipède orienté qu'ils déterminent. Pour des fonctions sur M à valeurs vectorielles $u_1, \dots, u_k \in C^\infty(M, \mathbb{R}^{n+1})$ et des 1-formes sur M à coefficients vectoriels $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{n+1} \in \Omega^1(M, \mathbb{R}^{n+1})$, où $\alpha^j = \sum_1^n \alpha_i^j dy^i$ et $\{y^i\}$ est un système local de coordonnées sur M , on définit la $n - k + 1$ -forme sur M

$$\begin{aligned} & (u_1, \dots, u_k, \alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{n+1}) \\ &= \sum_{i_k, \dots, i_{n+1}} (u_1, \dots, u_k, \alpha_{i_k}^{k+1}, \dots, \alpha_{i_{n+1}}^{n+1}) dy^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dy^{i_{n+1}}. \end{aligned}$$

Dans l'expression ci-dessus, l'interversion de deux vecteurs ou d'un vecteur et d'une 1-forme change le signe. Par contre, l'interversion de deux 1-formes ne change pas le signe.

Si k_1, \dots, k_n sont les courbures principales de M , on note

$$S_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} k_{i_1} \dots k_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n$$

le k -ième polynôme symétrique élémentaire en les courbures principales. On pose $S_0 = 1$. On a $S_k = \tilde{S}_k / k!$ avec

$$\tilde{S}_k = \sum_{i_1, \dots, i_k \text{ distincts}} k_{i_1} \dots k_{i_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Posons aussi

$$S_k^i = k_i \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{k-1} : i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_{k-1}} \right) = k_i S_{k-1}(k_1, \dots, \hat{k}_i, \dots, k_n).$$

On remarque $S_2^i = \text{Ric}(e_i, e_i)$, avec e_i la direction de courbure correspondant à k_i .

3.2. Formules de Minkowski généralisées.

Proposition 2. Soient e_i les directions de courbure sur M . Pour $1 \leq k \leq n$ et $l \geq 1$, l'identité intégrale suivante est vérifiée

$$(5) \quad \begin{aligned} & (n-k+1) \int_M p^{l-1} S_{k-1} dV \\ &= k \int_M p^l S_k dV - (l-1) \int_M p^{l-2} \left(\sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV . \end{aligned}$$

Démonstration. Nous allons calculer pour $1 \leq k \leq n$ et $l \geq 1$ la différentielle extérieure

$$\begin{aligned} d(p^{l-1}(\underbrace{\varphi, \nu, d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k})) &= \\ (l-1)p^{l-2} dp \wedge (\underbrace{\varphi, \nu, d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) &- \\ p^{l-1}(\underbrace{\nu, d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k+1}) + p^{l-1}(\underbrace{\varphi, d\nu, \dots, d\nu}_k, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) &. \end{aligned}$$

Autour de tout point $x \in M$ on peut choisir un système de coordonnées $\{y^i\}$ tel que, au point x , les $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1 \dots n}$ forment une base orthonormée et orientée avec $e_i = \varphi_* \frac{\partial}{\partial y^i}$ des directions de courbure au point $\varphi(x)$. Les suivantes égalités sont valables au point x :

$$(6) \quad \begin{aligned} d\nu &= \sum k_i e_i dy^i , \\ d\varphi &= \sum e_i dy^i , \\ \langle e_i, e_j \rangle &= \delta_{ij}, \quad e_1 \times \dots \times e_n = \nu . \end{aligned}$$

Dans un tel système de coordonnées on a

$$(7) \quad \begin{aligned} & (\underbrace{\nu, d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k+1}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (\nu, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k-1)} dy^{\sigma(1)} \dots dy^{\sigma(n)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k-1)} \right) (\nu, e_1, \dots, e_n) dy^1 \dots dy^n \\ &= (-1)^n (n-k+1)! (k-1)! S_{k-1} dV , \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} & (\underbrace{\varphi, d\nu, \dots, d\nu}_k, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} (\varphi, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(k)} dy^{\sigma(1)} \dots dy^{\sigma(n)} \\ &= (n-k)! k! S_k(\varphi, e_1, \dots, e_n) dV \\ &= (-1)^n (n-k)! k! p S_k dV . \end{aligned}$$

On a utilisé les identités

$$(\nu, e_1, \dots, e_n) = (-1)^n (e_1, \dots, e_n, \nu) = (-1)^n \langle e_1 \times \dots \times e_n, \nu \rangle = (-1)^n ,$$

$$(\varphi, e_1, \dots, e_n) = (-1)^n (e_1, \dots, e_n, \varphi) = (-1)^n \langle e_1 \times \dots \times e_n, \varphi \rangle = (-1)^n p .$$

Pour ce qui est du premier terme on a

$$dp = d \langle \varphi, \nu \rangle = \sum k_i \langle \varphi, e_i \rangle dy^i ,$$

$$\begin{aligned} & (\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n : \sigma(n)=i} (\varphi, \nu, e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(n-1)} dy^{\sigma(1)} \dots dy^{\sigma(n-1)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\sigma \in S_n : \sigma(n)=i} k_{\sigma(1)} \dots k_{\sigma(n-1)} \right) (\varphi, \nu, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n) dy^1 \dots d\hat{y}^i \dots dy^n \\ &= (n-k)! (k-1)! \times \\ & \quad \times \sum_{i=1}^n \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{k-1} : i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_{k-1}} \right) (-1)^{n+i} \langle \varphi, e_i \rangle dy^1 \dots d\hat{y}^i \dots dy^n . \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} (9) \quad & dp \wedge (\varphi, \nu, \underbrace{d\nu, \dots, d\nu}_{k-1}, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-k}) \\ &= (-1)^{n-1} (n-k)! (k-1)! \left(\sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{i_1 < \dots < i_{k-1} : i_j \neq i} k_{i_1} \dots k_{i_{k-1}} \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) \right) dV \\ &= (-1)^{n-1} (n-k)! (k-1)! \left(\sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV \end{aligned}$$

et, finalement,

$$\begin{aligned} & (l-1)(n-k)! (k-1)! p^{l-2} \left(\sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV + \\ & + (n-k+1)! (k-1)! p^{l-1} S_{k-1} dV - (n-k)! k! p^l S_k dV = \text{forme exacte} . \end{aligned}$$

Il suffit maintenant d'intégrer cette dernière identité sur M .

□

3.3. Applications. a) Formules de Minkowski. Prendre $l = 1$ pour obtenir

$$(10) \quad (n-k+1) \int_M S_{k-1} dV = k \int_M p S_k dV, \quad 1 \leq k \leq n .$$

b) L'inégalité (2) pour $n = 1$. Prendre $k = n = 1$ dans les formules de Minkowski pour obtenir, lorsque C est une courbe immergée dans le plan

$$l(C) = \int_C p K dl .$$

Ceci implique tout de suite $l(C) \leq RT(C)$, avec égalité si et seulement si C est le plongement standard du cercle de rayon R .

c) Expression du volume de M en termes de courbure moyenne. Prendre $k = 1$ dans (10) pour obtenir

$$(11) \quad \text{vol}(M) = \frac{1}{n} \int_M p H dV .$$

d) Expression du volume de M en termes de courbure de Gauss. Prendre $l = k$ dans (5) pour obtenir

$$(12) \quad (n - k + 1) \int_M p^{k-1} S_{k-1} dV = k \int_M p^k S_k dV - (k - 1) \int_M p^{k-2} \left(\sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV .$$

En additionnant les identités (12) pour $1 \leq k \leq n$ nous trouvons

$$(13) \quad \text{vol}(M) = \int_M \left(p^n - \frac{n-1}{n} p^{n-2} q^2 \right) K dV - \sum_{k=2}^{n-1} C_{n,k} \int_M p^{k-2} \left(\sum_{i=1}^n S_k^i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \right) dV ,$$

$$\text{avec } C_{n,k} = \frac{(k-1)!}{n(n-1)\dots(n-k+2)} \cdot \frac{k-1}{n-k+1} .$$

e) Preuve de (2) lorsque M est le bord d'un convexe (théorème d'Archimède). Toutes les courbures principales sont alors positives et on obtient $\text{vol}(M) \leq \int_M \left(p^n - \frac{n-1}{n} p^{n-2} q^2 \right) K dV \leq R^n T(M) = R^n \text{vol}(S^n)$, avec égalité si et seulement si M est la sphère de rayon R .

f) Preuve de (1) selon [BZ]. Prendre $n = 2$ dans (13) pour obtenir

$$A(M) = \int_M \left(p^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) K dS .$$

Lorsque $\varphi(M) \subset B(0, R)$ on a $p^2 + q^2 \leq R^2$ et cela implique tout de suite $A(M) \leq R^2 T(M)$, avec égalité si et seulement si φ est le plongement standard de la sphère de rayon R dans \mathbb{R}^3 .

g) Condition suffisante pour $n = 3$. D'après (13) on a

$$(14) \quad \text{vol}(M) = \int_M \left(p^3 - \frac{2}{3} p q^2 \right) K dV - \frac{1}{6} \int_M \sum_{i=1}^3 \text{Ric}(e_i, e_i) \langle \varphi, e_i \rangle^2 dV .$$

L'inégalité (2) sera vraie sous la forme $\text{vol}(M) \leq R^3 T(M)$ si M vérifie $\text{Ric} \geq 0$. Mais, pour une hypersurface, ceci équivaut à demander que les courbures sectionnelles de M soient positives ou nulles [Su]. Un théorème de Sacksteder [Sa] assure que toute immersion isométrique de classe C^4 d'une 3-variété à courbure sectionnelle non-négative est forcément convexe et le résultat se ramènerait au théorème d'Archimède. On a toutefois des résultats nouveaux en affaiblissant la condition sur la courbure de Ricci.

Proposition 1. ($n=3$) Soit $\varphi : M^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ une immersion isométrique de classe C^2 d'une variété riemannienne lisse compacte sans bord. On suppose que $\varphi(M) \subset B^4(0, R)$. Si M vérifie $\text{Ric} \geq -\alpha/R^2$ avec $0 < \alpha < 6$, alors

$$\text{vol}(M) < \frac{6}{6-\alpha} R^3 T(M) .$$

Démonstration. On utilise $\sum_i \langle \varphi, e_i \rangle^2 \leq |\varphi|^2 \leq R^2$ dans (14) pour obtenir

$$\text{vol}(M) \leq \int_M (p^3 - \frac{2}{3}pq^2)K dV + \frac{\alpha}{6}\text{vol}(M) .$$

De là on tire $\text{vol}(M) \leq \frac{6}{6-\alpha}R^3T(M)$ puisque $p^2 + q^2 = |\varphi|^2 \leq R^2$. L'égalité n'est pas atteinte puisque cela forcerait $q \equiv 0$ et $p \equiv R$. Dans ce cas l'immersion devrait être le plongement standard de la sphère de rayon R , pour laquelle on a en fait $\text{vol}(\mathbb{S}^3(R)) = R^3T(\mathbb{S}^3(R)) < \frac{6}{6-\alpha}R^3T(\mathbb{S}^3(R))$. □

Il serait bien-sûr intéressant de trouver des contre-exemples à l'inégalité (2) satisfaisant $\text{Ric} \geq -6/R^2 - \epsilon$, mais nous n'en connaissons pas pour l'instant.

4. INÉGALITÉS À CARACTÈRE LOCAL

Comme le montre la section précédente, l'inégalité (2) est valable en petite dimension grâce à l'existence de formules intégrales globales, qui reviennent à la possibilité d'intégrer par parties : une méthode alternative pour obtenir les formules de Minkowski (10) est d'intégrer sur des ouverts constituant un découpage de M et de sommer. Les termes de bord s'annulent deux par deux à cause du choix opposé de l'orientation et, en dimension 2, les termes intérieurs sont contrôlables par la courbure totale. Dans ce qui suit, nous traitons *dans le cas strictement convexe* les termes parasites qui apparaissent en dimension $n \geq 3$ en simulant une intégration par parties où la contribution des termes de bord est compensée par l'utilisation d'un épaissement de l'ouvert relativement compact dont on estime le volume.

Tout ouvert sur lequel l'application de Gauss G est non-dégénérée et injective peut être paramétré par G^{-1} qui, à son tour, s'exprime à l'aide de la fonction support sur \mathbb{S}^n et de sa hessienne. L'inégalité (3) s'exprimera comme une inégalité intégrale qu'on obtient par une technique d'estimation empruntée à la théorie des opérateurs de type Monge-Ampère [Au, RT]. Dans la section 4.5 nous renonçons à l'hypothèse d'injectivité sur l'application de Gauss par un argument de recollement. La section 4.6 utilise les formules intégrales développées précédemment pour obtenir (4). Nous obtenons aussi une inégalité à caractère isopérimétrique en dimension deux.

4.1. Paramétrisation d'Euler. Nous adoptons dans cette section le point de vue immergé, en regardant M comme hypersurface de \mathbb{R}^{n+1} . Soit $U \subset M$ un domaine sur lequel l'application de Gauss $G : U \xrightarrow{\sim} V \subset \mathbb{S}^n$ est injective. Son inverse

$$\phi : V \xrightarrow{\sim} U$$

est une paramétrisation de U et associe à un point θ l'unique x tel que le vecteur θ soit orthogonal à l'hyperplan $T_x M$ tangent à M en x . Si $f(\theta)$ désigne la distance orientée entre l'origine O et $T_x M$, alors l'application f est différentiable sur V et le gradient $\nabla f(\theta) \in T_\theta \mathbb{S}^n$ est bien défini. De plus, on aura

$$\phi(\theta) = x = f(\theta) \cdot \theta + \nabla f(\theta)$$

après des identifications naturelles avec des vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} . En géométrie convexe on appelle f la "fonction support" de U et ϕ la "paramétrisation d'Euler" de l'hypersurface U .

Soient dV et $d\theta$ les éléments de volume sur $U \subset M$ et $V \subset \mathbb{S}^n$ respectivement. Alors

$$dV = \pm \det(\phi_*(\theta)) \cdot d\theta .$$

On calcule maintenant $\phi_* : T_\theta \mathbb{S}^n \rightarrow T_\theta \mathbb{S}^n \equiv T_{\phi(\theta)} M^n \subset T_{\phi(\theta)} \mathbb{R}^{n+1}$. On peut écrire

$$\phi_* Y = Y(f)\theta + fY + D_Y(\nabla f) .$$

Mais $T_{\phi(\theta)} M^n // T_\theta \mathbb{S}^n$ et en prenant ci-dessus la partie tangente à \mathbb{S}^n on a $\phi_* Y = \phi_*^T Y = fY + D_Y^T(\nabla f)$. Cela signifie précisément que

$$\phi_* = H_f + f \cdot Id ,$$

où H_f est la *hessienne* de f sur la sphère \mathbb{S}^n . C'est l'endomorphisme du fibré tangent défini par

$$H_f(\xi) = \nabla_\xi \nabla f .$$

Ceci établit la formule (où le signe dépend des orientations)

$$(15) \quad \text{vol}(U) = \pm \int_V \det(H_f + f \cdot Id) d\theta .$$

Il est utile de voir l'application ϕ comme inverse de l'application de Gauss. Là où cette dernière est un difféomorphisme, la dérivée ϕ_* sera l'inverse de l'application de Weingarten et ses valeurs propres seront les inverses des courbures principales de M . En particulier la signature de ϕ_* sera la même que la signature de l'application de Weingarten. Sur les domaines de signature impaire, ϕ_* change l'orientation et la formule précédente s'écrit avec le signe “-”. Sinon elle s'écrit avec le signe “+”.

4.2. Coordonnées stéréographiques. Dans cette section on exprime la formule intégrale précédente en coordonnées stéréographiques. Soit $\mathbb{S}^n(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = \rho\}$ la sphère de rayon ρ dans \mathbb{R}^{n+1} . Il est bien connu que la projection stéréographique du pôle nord induit sur \mathbb{R}^n une métrique g de composantes

$$g_{ij} = \frac{4}{(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2})^2} \cdot \delta_{ij} .$$

Les coefficients du tenseur de Christoffel sont

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{2}{\rho^2 + |x|^2} \{ \delta_{ik} x^j + \delta_{ij} x^k - \delta_{jk} x^i \} .$$

Pour faciliter l'écriture on note par ∂_i les champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Ce sont des champs orthogonaux dans la métrique sphérique. Le *gradient* sphérique de f satisfait $(\nabla f, \partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ et cela donne

$$\nabla f|_x = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}\right)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \partial_i .$$

La hessienne sphérique de f vérifie

$$\begin{aligned}
H_f(\partial_i) &= \nabla_{\partial_i} \nabla f = \nabla_{\partial_i} \frac{1}{4\rho^4} (\rho^2 + |x|^2)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \partial_j \\
&= \frac{1}{4\rho^4} \cdot \left\{ \partial_i (\rho^2 + |x|^2)^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \cdot \partial_j + (\rho^2 + |x|^2)^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \cdot \partial_j \right. \\
&\quad \left. + (\rho^2 + |x|^2)^2 \cdot \partial_j f \cdot \Gamma_{ij}^l \partial_l \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right)^2 \cdot \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot x^i \partial_j f \cdot \partial_j \\
&\quad - \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot \partial_j f \cdot \{ \delta_{li} x^j + \delta_{lj} x^i - \delta_{ij} x^l \} \partial_l \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right)^2 \cdot \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot \left\{ 2x^i \partial_j f \cdot \partial_j \right. \\
&\quad \left. - \partial_l f \{ \delta_{ji} x^l + \delta_{lj} x^i - \delta_{il} x^j \} \partial_j \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right)^2 \cdot \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot \left\{ 2x^i \partial_j f \cdot \partial_j \right. \\
&\quad \left. - \partial_l f \sum_{j \neq i} \{ \delta_{lj} x^i - \delta_{il} x^j \} \cdot \partial_j - \partial_l f \cdot x^l \cdot \partial_i \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right)^2 \cdot \partial_{ij} f \cdot \partial_j + \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot \left\{ (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) \cdot \partial_j \right. \\
&\quad \left. - (\nabla^{\mathbb{R}^n} f|_x \cdot x) \cdot \partial_i \right\}.
\end{aligned}$$

Dans les formules qui vont suivre les gradients et hessiennes seront implicitement pris par rapport à la métrique euclidienne de \mathbb{R}^n . Dans le cas contraire, on l'indiquera explicitement (par exemple $H_f^{\mathbb{S}^n}$ désignera la hessienne de f calculée dans la métrique sphérique). On peut simplifier l'expression obtenue en posant

$$(16) \quad g = \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} f.$$

Alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) + f \cdot \delta_{ij}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
H_f^{\mathbb{S}^n}(x)(\partial_i) &= \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \left\{ \frac{\rho^2 + |x|^2}{2} \partial_{ij} f \cdot \partial_j + (x^i \partial_j f + x^j \partial_i f) \partial_j \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) (\nabla f \cdot x) \cdot \partial_i \\
&= \frac{1}{2\rho^2} \left(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right) \cdot [H_g - (f + \nabla f \cdot x) \cdot Id](\partial_i).
\end{aligned}$$

Soient maintenant U et V des domaines sur M et respectivement \mathbb{S}^n comme dans §4.1. On choisit un point $N \in \mathbb{S}^n \setminus V$ et on note Ω l'image de V par la projection

stéréographique de N . Alors

$$\begin{aligned} & \int_V (H_f + f \cdot Id) d\theta \\ &= \frac{1}{2^n \rho^{2n}} \int_\Omega (1 + \frac{|x|^2}{\rho^2})^n \cdot \det(H_g + (-f - \nabla f \cdot x + \frac{2\rho^2}{1 + \frac{|x|^2}{\rho^2}} \cdot f)) \cdot \frac{2^n}{(1 + \frac{|x|^2}{\rho^2})^n} dx, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{vol}(U) = \pm \frac{1}{\rho^{2n}} \int_\Omega \det(H_g + R_f \cdot Id) dx .}$$

où on a noté $R_f = -f - \nabla f \cdot x + \frac{2\rho^4}{\rho^2 + |x|^2} \cdot f$. Il est utile de remarquer que

$$R_f = \frac{2}{\rho^2 + |x|^2} [(g - \nabla g \cdot x) + (\rho^4 - \rho^2) \cdot f]$$

En particulier, pour $\rho = 1$ on obtient

$$(17) \quad R_f = \frac{2}{1 + |x|^2} \cdot (g - \nabla g \cdot x) .$$

On note désormais cette dernière quantité par R_g et on pourra écrire

$$\boxed{\text{vol}(U) = \pm \int_\Omega \det(H_g + R_g \cdot Id) dx .}$$

4.3. Formes différentielles. Considérons les 1-formes suivantes :

$$\omega_i = d(\partial_i g) + R_g \cdot dx^i .$$

On a

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = \det(H_g + R_g \cdot Id) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n ,$$

donc

$$\text{vol}(U) = \pm \int_\Omega \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n .$$

Rappelons que $R_g = \frac{2}{1 + |x|^2} (g - \nabla g \cdot x)$ et donc

$$\begin{aligned} dR_g &= -\frac{4}{(1 + |x|^2)^2} (g - \nabla g \cdot x) \cdot (x \cdot dx) - \frac{2}{1 + |x|^2} \cdot \sum_{i=1}^n x^i d(\partial_i g) \\ &= -\frac{2}{1 + |x|^2} \sum_{i=1}^n x^i \cdot \omega_i . \end{aligned}$$

Si on fait la notation $u = \frac{2}{1 + |x|^2}$ on a

$$dR_g = -u \cdot \sum_{i=1}^n x^i \omega_i$$

et

$$(18) \quad d\omega_i = dR_g \wedge dx^i = -u \sum_{j=1}^n x^j \omega_j \wedge dx^i .$$

C'est l'identité (18) qui est la clé de notre résultat. On pourra la penser comme exprimant une sorte de stabilité des ω_i par différentiation extérieure.

4.4. Une inégalité locale. Etablissons d'abord les notations. Pour des suites d'indices $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_{n-k}) \subset \{1, \dots, n\}$ on note

$$\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \quad \text{et} \quad dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-k}} .$$

Proposition 3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe borné et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que la matrice $H_g + R_g \cdot Id$ soit définie positive sur Ω , où g et R_g sont définies par (16) et (17) avec ρ égal à 1. Soient I, J deux suites d'indices avec $|I| = k$, $|J| = n - k$. Pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une constante $C_k(K, \Omega)$ indépendante de f telle que, pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\Omega)$ avec $\text{supp}(\psi) \subseteq K$, on ait :*

$$\left| \int_{\Omega} \psi \omega_I \wedge dx^J \right| \leq C_k(K, \Omega) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_K |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k .$$

De plus, $C_k(K, \Omega)$ est proportionnelle par une constante indépendante de K et Ω à $(\frac{(1+r)^2}{\delta})^k$, où $2\delta = \text{dist}(K, \partial\Omega)$ et $\Omega \subset \{|x| \leq r\}$.

Démonstration. Donnons d'abord deux majorations pour $|R_g|$ et $|\nabla g|$.

Puisque $\rho = 1$ on a $R_g = \frac{1-|x|^2}{1+|x|^2} \cdot f - \nabla f \cdot x$. Si $\Omega \subset B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ alors on trouve

$$|R_g| \leq |f| + r|\nabla f| \leq (1+r) \cdot (|f| + |\nabla f|) .$$

De même, on a $\nabla g = f \cdot x + \frac{1}{2}(1+|x|^2) \cdot \nabla f$ et, si $\Omega \subset B(0, r)$, alors

$$|\nabla g| \leq r|f| + \frac{1+r^2}{2} |\nabla f| \leq \frac{(1+r)^2}{2} \cdot (|f| + |\nabla f|) .$$

On procède par récurrence sur k . Le premier pas de récurrence est $k = 1$. On supposera $J = (2, \dots, n)$ puisque les autres cas lui sont symétriques. Deux situations se présentent : $I \cap J = \emptyset$ et $I \cap J \neq \emptyset$. Les calculs suivent une idée de Rauch et Taylor [RT] reprise dans Aubin [Au].

- a) $I \cap J = \emptyset$. On a successivement

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi (\partial_{11}g + R_g) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \int_K |(\partial_{11}g + R_g)| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \sup_K |\psi| \int_K (\partial_{11}g + R_g) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n . \end{aligned}$$

La dernière égalité fait usage de la positivité de la matrice $H_g + R_g \cdot Id$. Soit maintenant γ une fonction à support compact dans $C^\infty(\Omega)$ telle que $\gamma|_K \equiv 1$ et $0 \leq \gamma \leq 1$. On peut la choisir telle que $|\nabla \gamma| \leq 1/\delta$. Alors

$$\begin{aligned} \int_K (\partial_{11}g + R_g) dx &\leq \int_{\Omega} \gamma (\partial_{11}g + R_g) dx , \\ \int_{\Omega} \gamma \partial_{11}g dx &= - \int_{\Omega} \partial_1 \gamma \cdot \partial_1 g dx \leq \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\partial_1 \gamma| \cdot \sup_{\Omega} |\partial_1 g| \\ &\leq \frac{1}{\delta} \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \frac{(1+r)^2}{2} \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) , \\ \int_{\Omega} \gamma R_g dx &\leq \text{vol}(\Omega) \cdot (1+r) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) , \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\left| \int_{\Omega} \psi \omega_1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \leq C(r, \frac{1}{\delta}) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) .$$

- b) $I \cap J \neq \emptyset$. Soit $i \in [2, n]$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_i \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi \partial_{1i} g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \int_K |\partial_{1i} g| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \int_K ((\partial_{11} g + R_g) + (\partial_{ii} g + R_g)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq C(r, \frac{1}{\delta}) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} |\psi| \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) . \end{aligned}$$

La dernière inégalité est une conséquence immédiate du point a), tandis que le fait crucial

$$|\partial_{1i} g| \leq \frac{1}{2} ((\partial_{11} g + R_g) + (\partial_{ii} g + R_g))$$

découle de la positivité de la matrice $H_g + R_g \cdot Id$. Cette dernière inégalité reste valable pour des mineurs d'ordre quelconque d'une matrice définie positive. Considérons deux suites d'indices $I = (i_1, \dots, i_k)$, $J = (j_1, \dots, j_{n-k}) \subset \{1, \dots, n\}$. On note \tilde{J} la suite complémentaire de J . Pour une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $M[I, \tilde{J}]$ la matrice carrée construite sur les lignes I et les colonnes \tilde{J} de M et $M_{I, \tilde{J}}$ son déterminant (par exemple, pour $k = 1$ on a $M_{I, \tilde{J}} = m_{ij}$).

Si M est définie positive alors

$$\forall i, j \in \overline{1, n}, |M_{ij}| \leq \frac{1}{2} (M_{ii} + M_{jj})$$

puisque $M_{\{i, j\}, \{i, j\}} \geq 0$. De plus, une fois l'orientation fixée sur \mathbb{R}^n (représentée - par exemple - par la base canonique (e_1, \dots, e_n)), M détermine naturellement un endomorphisme *défini positif* sur $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ muni de la métrique induite par \mathbb{R}^n . Sa matrice dans la base $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ a comme entrées justement les $M_{I, \tilde{J}}$. On trouve donc l'inégalité

$$\forall I, J, |I| = k, |J| = n - k : |M_{I, \tilde{J}}| \leq \frac{1}{2} (M_{I, I} + M_{\tilde{J}, \tilde{J}}) .$$

On suppose maintenant l'inégalité vraie pour $k - 1$ et on la prouve pour k . Les hypothèses sont $\text{supp}(\psi) \subseteq K$, $|I| = k$, $|J| = n - k$. On note $M = H_g + R_g \cdot Id$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \psi \omega_I \wedge dx^J \right| &= \left| \int_{\Omega} \psi M_{I, \tilde{J}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \right| \\ &\leq \sup_K |\psi| \int_K |M_{I, \tilde{J}}| dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \int_K (M_{I, I} + M_{\tilde{J}, \tilde{J}}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} \sup_K |\psi| \left(\int_K \omega_I \wedge dx^{\tilde{I}} + \int_K \omega_{\tilde{J}} \wedge dx^J \right) . \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver les estimations pour $J = \tilde{I}$. Comme avant, soit γ une fonction à support compact dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que $\gamma|_K \equiv 1$, $0 \leq \gamma \leq 1$ et $\text{dist}(\text{supp}(\gamma), \partial\Omega) \geq \delta/2$. On peut la choisir telle que $|\nabla \gamma| \leq 1/\delta$. Alors

$$\begin{aligned} \int_K \omega_I \wedge dx^{\bar{I}} &\leq \int_{\Omega} \gamma \omega_I \wedge dx^{\bar{I}} \\ &= \int_{\Omega} \gamma d(\partial_{i_1} g) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}} + \int_{\Omega} \gamma R_g dx^{i_1} \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}}. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma R_g dx^{i_1} \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}} \\ \leq C_{k-1}(r, \frac{4}{\delta}) \cdot \sup_{\Omega} |\gamma \cdot R_g| \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ \leq (1+r) \cdot 4^{k-1} \cdot C_{k-1}(r, \frac{1}{\delta}) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k. \end{aligned}$$

Après une intégration par parties on obtient aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \gamma d(\partial_{i_1} g) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}} \\ = - \int_{\Omega} \partial_{i_1} g d\gamma \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}} \\ - \sum_{l=2}^k \int_{\Omega} \gamma \partial_{i_1} g \omega_{i_2} \wedge \dots \wedge dR_g \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k} \wedge dx^{\bar{I}} \\ = - \int_{\Omega} \partial_{i_1} g (\partial_s \gamma dx^s) \wedge \omega_{I-\{i_1\}} \wedge dx^{\bar{I}} \\ + \sum_{l=2}^k \int_{\Omega} \gamma \partial_{i_1} g \frac{2}{1+|x|^2} \omega_{i_2} \dots (x^s \omega_s) \wedge dx^{i_1} \dots \omega_{i_k} \wedge dx^{\bar{I}} \\ \leq n C_{k-1}(r, \frac{4}{\delta}) \frac{(1+r)^2}{2} \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) \frac{1}{\delta} \text{vol}(\Omega) \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ + (k-1) C_{k-1}(r, \frac{4}{\delta}) \frac{(1+r)^2}{2} \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|) \text{vol}(\Omega) \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^{k-1} \\ \leq (n+k-1) \frac{(1+r)^2}{2} \frac{1}{\delta} 4^{k-1} C_{k-1}(r, \frac{1}{\delta}) \text{vol}_{\mathbb{R}^n}(\Omega) \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k. \end{aligned}$$

Cela donne l'estimation finale

$$\int_K \omega_I \wedge dx^{\bar{I}} \leq ((n+k-1) \frac{(1+r)^2}{2} + 1+r) 4^{k-1} \frac{1}{\delta} C_{k-1}(r, \frac{1}{\delta}) \text{vol}(\Omega) \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k,$$

ou bien

$$|\int_K \psi \omega_I \wedge dx^{\bar{I}}| \leq C_k(r, \frac{1}{\delta}) \sup_{\Omega} |\psi| \text{vol}(\Omega) \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^k,$$

avec la constante équivalente à $(\frac{1}{\delta})^k$ et r^{2k}

$$C_k(r, \frac{1}{\delta}) = ((n+k-1) \frac{(1+r)^2}{2} + 1+r) 4^{k-1} \frac{1}{\delta} C_{k-1}(r, \frac{1}{\delta}).$$

Cela achève la démonstration. \square

Corollaire 1. *Avec les notations de la proposition 3, si $H_g + R_g \cdot \text{Id}$ est définie positive sur l'ouvert borné $\Omega \subset \{|x| \leq r\}$ alors pour tout compact $K \subseteq \Omega$ il existe une constante $C(K, \Omega)$ telle que*

$$\int_K \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \leq C(K, \Omega) \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot \sup_{\Omega} (|f| + |\nabla f|)^n .$$

Cette constante est proportionnelle à $(\frac{(1+r)^2}{\delta})^n$, où $\delta = \text{dist}(K, \partial\Omega)$.

Dans l'inégalité ci-dessus, le terme de gauche représente le volume d'un compact de M sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et injective, tandis que le membre de droite représente le volume d'un épaississement par δ de son image dans \mathbb{R}^n par la composée de la projection stéréographique avec l'application de Gauss. Si $r \leq 1$, la distance euclidienne est comparable à la distance mesurée sur \mathbb{S}^n et on en déduit le

Corollaire 2. *Soit $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion isométrique d'hypersurface dont l'image est contenue dans la boule $B^{n+1}(0, R)$. Soit $U \subset M$ un ouvert strictement convexe sur lequel l'application de Gauss est injective et d'image contenue dans une demi-sphère. Il existe une constante C_n indépendante de U et de M telle que, si $K \subset U$ est un compact, on a*

$$(19) \quad \text{vol}(K) \leq C_n R^n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} T(U) .$$

Ici $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ représente la distance entre K et ∂U mesurée sur \mathbb{S}^n via l'application de Gauss, définie comme

$$(20) \quad \begin{aligned} d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) &= \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(\text{Gauss}(K), \text{Gauss}(\partial U)) \\ &= \min_{x \in K} \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(\text{Gauss}(x), \text{Gauss}(\partial U)) . \end{aligned}$$

Il faut souligner le fait que la Proposition 3 n'est pas un ingrédient indispensable pour le Corollaire 2, alors qu'elle le sera pour le Théorème 3. Le Corollaire 2 peut être démontré directement comme suit lorsque U est un ouvert strictement convexe. L'inégalité d'Archimède (section 3.3) assure que $\text{vol}(K)$ est borné supérieurement par $R^n \text{vol}(\mathbb{S}^n)$. D'un autre côté, si $B(d)$ désigne une boule géodésique de rayon d dans \mathbb{S}^n , la fonction $\text{vol} B(d)/d^n$ est décroissante pour $0 < d \leq \pi/2$ et en particulier elle est bornée inférieurement par $\frac{1}{2} \text{vol}(\mathbb{S}^n)/(\pi/2)^n$. On déduit que $T(U)/(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n \geq \text{vol} B(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))/(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n$ admet la même borne inférieure. L'inégalité (19) est alors valable avec $C_n = \pi^n/2^{n-1}$.

4.5. Globalisation. Dans ce qui suit nous expliquons comment on peut éliminer les deux dernières hypothèses sur l'application de Gauss dans le corollaire 2. L'application de Gauss sera notée G ou *Gauss* et la courbure totale $T(U)$ d'un domaine U sera parfois notée $\text{vol}(\text{Gauss}_U)$. Donnons d'abord la

Définition 1. *Soit $U \subset M$ un ouvert sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et $K \subset U$ un compact. La distance sphérique locale entre K et ∂U est*

définie comme

$$\begin{aligned}
(21) \quad \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) &= \min_{x \in K} \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère} \\ \text{Gauss}|_{\mathcal{U}} \text{ injective}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}) \\
&= \min_{x \in K} \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}) .
\end{aligned}$$

Les deux quantités ci-dessus sont égales en vues de la non-dégénérescence de Gauss sur U . Pour montrer l'égalité il suffit de voir que, pour $x \in K$ fixé et \mathcal{U} satisfaisant $x \in \mathcal{U} \subset U$ et $\text{Gauss}(\mathcal{U}) \subset \text{demi-sphère}$, il existe un $x \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ sur lequel Gauss est injective et tel que $d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}) = d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}')$. Or, par définition de $d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U})$, l'application $G|_{\mathcal{U}}$ est propre au dessus de la boule ouverte $B_{\mathbb{S}^n}(G(x), d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}))$. Comme c'est aussi un difféomorphisme local on déduit que c'est un revêtement. L'ouvert \mathcal{U}' cherché sera la feuille qui contient x .

Théorème 2. Soit $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une immersion isométrique d'hypersurface dont l'image est contenue dans la boule $B^{n+1}(0, R)$. Soit $U \subset M$ un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante \bar{C}_n indépendante de U et de M telle que, si $K \subset U$ est un compact, on a

$$(22) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n R^n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U) .$$

Ici $\text{vol}(\text{Gauss}_U)$ représente le volume recouvert sur \mathbb{S}^n par l'application de Gauss restreinte à U compté avec multiplicités.

Avant de prouver le théorème nous donnons quelques propriétés de la distance $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$.

- (i) si l'application de Gauss est non seulement non-dégénérée sur U , mais aussi injective et d'image contenue dans une demi-sphère (i.e. sous les hypothèses du corollaire 2), on a $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$;
- (ii) on a toujours $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) > 0$ et

$$d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \leq \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \leq \frac{\pi}{2} .$$

Il se peut toutefois que $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ soit nulle si on n'impose pas l'injectivité de G sur U , à savoir lorsque l'image de ∂U recoupe l'image de K ;

- (iii)

$$\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(\partial K, \partial U) ;$$

- (iv) définissons une semidistance sur M par

$$d_{\mathbb{S}^n}(x, y) = \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(\text{Gauss}(x), \text{Gauss}(y)) .$$

Cette semi-distance est non-dégénérée sur un ouvert U si et seulement si l'application de Gauss est injective sur U . La notation $d_{\mathbb{S}^n}$ est justifiée par l'identité

$$d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = \min_{x \in K, y \in \partial U} d_{\mathbb{S}^n}(x, y) .$$

Pour une application de Gauss non-injective les boules

$$B_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r) = \{y \in M : d_{\mathbb{S}^n}(x, y) < r\}, \quad r > 0$$

sont en général disconnexes. Définissons la *boule connexe* de rayon r centrée en x comme

$$\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r) = \text{la composante connexe de } x \text{ dans } B_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r), \quad r > 0,$$

avec la convention $\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, 0) = \{x\}$. Définissons aussi le *rayon sphérique d'injectivité de l'application de Gauss* en x comme

$$R_x = \sup \{r : d_{\mathbb{S}^n} \text{ non-dégénérée sur } \tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, r)\}.$$

Si l'application de Gauss est non-dégénérée en x alors $R_x > 0$ par injectivité locale. Le lemme qui suit sera fondamental dans la preuve du théorème 2.

Lemme 1. *Soit U un ouvert sur lequel l'application de Gauss est non-dégénérée et $K \subset U$ un compact. Pour tout $x \in K$ on a $R_x \geq \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$.*

Démonstration du lemme 1. L'énoncé du lemme est en fait une reformulation géométrique des définitions. Soit $x \in K$. Il suffit de montrer

$$R_x \geq \sup_{\substack{U \supseteq \mathcal{U} \ni x \\ \text{Gauss}|_{\mathcal{U}} \text{ injective}}} d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U}).$$

Soit \mathcal{U} tel que $\text{Gauss}|_{\mathcal{U}}$ injective. Alors, par définition, $\tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U})) \subseteq \mathcal{U}$ et donc $R_x \geq d_{\mathbb{S}^n}(x, \partial \mathcal{U})$, ce qui achève la preuve. \square

De ce fait on peut regarder la quantité $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ comme fournissant une borne inférieure uniforme sur K pour les rayons d'injectivité de l'application de Gauss.

Démonstration du théorème 2. Il suffit de faire la démonstration pour $R = 1$. Nous allons fournir un argument de recollement. Il est possible de sous-diviser K en compacts K' et de choisir autour de chaque K' un ouvert $U' \subset U$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- la restriction de l'application de Gauss à chaque U' est injective et d'image contenue dans une demi-sphère ;
- $d_{\mathbb{S}^n}(K', \partial U') \geq \frac{1}{C} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$, avec C une constante universelle indépendante de la dimension ;
- une intersection non-vide d'ouverts U' compte au plus D_n éléments, avec D_n une constante dépendant uniquement de la dimension.

Une fois une telle sous-division de K construite, on applique le corollaire 2 pour chaque couple (K', U') et on trouve :

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) = \sum \text{vol}(K') &\leq C_n \sum \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K', \partial U'))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_{U'}) \\ &\leq C_n \frac{C^n}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \sum \text{vol}(\text{Gauss}_{U'}) \\ &\leq D_n C_n \frac{C^n}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U) \\ &= \bar{C}_n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(\text{Gauss}_U), \end{aligned}$$

avec $\bar{C}_n = C^n D_n C_n$.

Remarquons d'abord qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas où $Gauss$ est non-dégénérée sur \bar{U} : on pourra ensuite considérer une exhaustion de U par des ouverts relativement compacts contenant K . Par continuité de la distance $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}$ l'inégalité pour U lui-même s'ensuivra. On travaillera par la suite sous cette hypothèse.

La construction de la sous-division $\{(K', U')\}$ se fait en deux étapes.

Etape 1 : réduction au cas où $Gauss(U)$ est contenu dans une demi-sphère. Fixons une triangulation $\{T_i\}$ de la sphère \mathbb{S}^n telle que chaque simplexe soit contenu dans une boule de rayon $\frac{3\pi}{8}$. Pour chaque T_i considérons le voisinage $V_i = \{p \in \mathbb{S}^n : \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(p, T_i) < \frac{\pi}{8}\}$. Tout V_i sera contenu dans une demi-sphère et chaque V_i intersectera au plus c_n autres V_j , avec c_n une constante qui dépend de la triangulation. La constante c_n sera désormais fixée, et il est facile d'obtenir des estimations sur c_n en fonction de n en construisant une triangulation explicite.

On construit maintenant une division de K et U en prenant des préimages par $Gauss$. Soient U_i^l les composantes connexes de $G^{-1}(V_i) \cap U$. Puisque G est un difféomorphisme local au voisinage de \bar{U} , celles-ci coïncident avec les intérieurs des composantes connexes de $G^{-1}(\bar{V}_i) \cap \bar{U}$, et ces dernières sont en nombre fini par compacité de \bar{U} . Donc les U_i^l sont en nombre fini.

Soient $K_i^l = G^{-1}(T_i) \cap K \cap U_i^l$. Les K_i^l ne sont pas nécessairement connexes, mais ils sont d'intérieurs disjoints et on a

$$\bigcup_l K_i^l = G^{-1}(T_i) \cap K.$$

Ainsi $\{(K_i^l, U_i^l)\}_{i,l}$ forme une sous-division de (K, U) et $G(U_i^l)$ est inclus dans une demi-sphère par construction. De plus,

$$\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_i^l, \partial U_i^l) = \min\{\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_i^l, \partial U), \frac{\pi}{8}\} \geq \frac{1}{4}\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$$

et le nombre de U_i^l qui s'intersectent à la fois est borné par c_n .

Il suffira ainsi de trouver pour chaque couple (K_i^l, U_i^l) une sous-division avec les propriétés désirées. Si les constantes qui apparaîtront sont notées C' et D'_n , alors la construction aura été faite dans le cas général avec $C = 4C'$, $D_n = c_n \cdot D'_n$.

Remarque : Pour minimiser la constante finale il faudra trouver un bon rapport entre le c_n et la largeur de l'épaissement V_i de chaque T_i . La constante finale sera meilleure avec un c_n petit et un épaisseur large. Or ces deux demandes sont antagoniques et le produit des deux quantités est minimisé par un certain choix de triangulation. Dans notre cas, on ne s'intéresse pas à la meilleure constante et on cherche juste une information qualitative.

Etape 2 : on suppose désormais que $Gauss(U)$ est inclus dans une demi-sphère. Soit

$$\delta = \frac{1}{15} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U).$$

Le lemme 1 assure que $Gauss$ est injective sur $\tilde{B}(x, 15\delta) = \tilde{B}_{d_{\mathbb{S}^n}}(x, 15\delta)$ pour tout $x \in K$. Soit $(\tilde{B}(x_i, 3\delta))_{i=1, N}$ un recouvrement fini *minimal* de K par des boules de rayon 3δ centrées en des points de K . On pose

$$B_i = \tilde{B}(x_i, 3\delta), \quad U_i = \tilde{B}(x_i, 4\delta), \quad i = 1, N,$$

$$K_1 = \text{cl}(\tilde{B}(x_1, 3\delta) \cap K),$$

$$K_i = \text{cl} \left(\tilde{B}(x_i, 3\delta) \cap \left(K \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} K_j \right) \right), \quad i = 2, \dots, N,$$

où “cl” désigne l’adhérence d’un ensemble. Alors $\{(K_i, U_i)\}$ est un découpage de (K, U) et nous affirmons qu’il vérifie les conditions désirées.

Par construction et hypothèse l’application de Gauss est injective et d’image contenue dans une demi-sphère sur chaque U_i . De plus,

$$d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i) \geq \delta = \frac{1}{15} \bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U).$$

Il ne reste plus qu’à estimer le nombre de U_i qui peuvent s’intersecter à la fois. On utilise le

Lemme 2. *Soit $x \in \mathbb{S}^n$, $r < \frac{\pi}{2}$ et $C \subset B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$ un fermé. Il existe un recouvrement de C par au plus 2^n boules de rayon r centrées en des points de C .*

Démonstration du lemme 2. Soit b_n le cardinal d’une triangulation de $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_{\mathbb{S}^n}(x, \frac{\pi}{2})$ par des simplexes de diamètre plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Pour tout $r < \frac{\pi}{2}$ il existe alors une triangulation de $\partial B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$ avec b_n simplexes de diamètre plus petit que r . Les préimages des simplexes par projection radiale dans $B_{\mathbb{S}^n}(x, r) \setminus \{x\}$ déterminent avec x une décomposition $\{S\}$ de $B_{\mathbb{S}^n}(x, r)$ en b_n sous-ensembles de diamètre plus petit que r . Si C intersecte un S , alors la boule de rayon r centrée en un point quelconque de $C \cap S$ contient S et en particulier $C \cap S$. On prend une telle boule pour chaque S qui intersecte C pour obtenir un recouvrement de C avec au plus b_n boules. A titre d’exemple, on peut prendre $b_1 = 2$, $b_2 = 4$. On prouve alors par récurrence que $b_n = 2^n$ convient. □

Suite de la démonstration du théorème 2. Deux boules $U_i = \tilde{B}(x_i, 4\delta)$ et $U_j = \tilde{B}(x_j, 4\delta)$ peuvent s’intersecter uniquement si $x_j \in \text{cl} \tilde{B}(x_i, 8\delta)$. Soit $e(n, \delta, x_i)$ le nombre minimal de boules de rayon 3δ avec centres dans $\tilde{B}(x_i, 11\delta)$ nécessaires pour recouvrir $\text{cl}(\tilde{B}(x_i, 11\delta) \setminus \tilde{B}(x_i, 4\delta))$. Alors U_i peut intersecter au plus $2^n \cdot e(n, \delta, x_i)$ parmi les U_j . Dans le cas contraire, avec le Lemme 2 on remplacerait les B_j correspondants par au plus $2^n \cdot e(n, \delta, x_i)$ boules de rayon 3δ centrées en des points de K , sans toutefois diminuer la partie de K qu’elles recouvrent. Mais ceci contredirait la minimalité du recouvrement initial.

La quantité $e(n, \delta, x_i)$ ne dépend pas de x_i car le raisonnement est fait en pratique sur la sphère \mathbb{S}^n . On a de plus

$$e(n, \delta, x_i) = e(n, \delta) \leq e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta) = e(n),$$

où $e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$ désigne la quantité analogue à $e(n, \delta)$ dans l’espace euclidien. Un argument simple d’homotéie montre que $e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$ ne dépend pas de δ , et elle a été notée plus haut par $e(n)$. L’inégalité $e(n, \delta) \leq e_{\mathbb{R}^n}(n, \delta)$ est assurée par le fait que l’application exponentielle est contractante sur un espace à courbure positive : tout recouvrement sur \mathbb{R}^n déterminera par l’exponentielle un recouvrement du même cardinal sur la sphère.

L’existence du découpage est donc prouvée sous l’hypothèse que l’image de l’application de Gauss est contenue dans une demi-sphère avec les constantes $C' = 15$ et $D'_n = 2^n \cdot e(n)$. Son existence dans le cas général est prouvée avec $C = 60$ et $D_n = c_n \cdot 2^n \cdot e(n)$. □

Corollaire 3. Soit $Z \subset M$ le lieu des points de courbure de Gauss nulle. Il existe une constante C_n indépendante de M telle que, pour tout compact $K \subset M$ strictement convexe qui n'intersecte pas Z on a

$$(23) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{1}{(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, Z))^n} \text{vol}(Gauss_M) .$$

Remarques. 1) Le compact K du corollaire 3 peut être disconnexe.

2) Il est intéressant de remarquer le cas $Z = \emptyset$. Ceci correspond à une courbure de Gauss partout positive, donc à une hypersurface convexe (respectivement à une courbe localement convexe dans le cas $n = 1$). Dans cette situation, le terme de (23) impliquant \bar{d} est absorbé dans \bar{C}_n et nous retrouvons l'inégalité d'Archimède (section 3.3) avec une constante plus faible et sans ambition de caractériser le cas d'égalité.

3) L'inégalité (23) a un caractère asymptotique : plus on voudra attraper dans le compact K un volume proche de celui de M , plus la distance $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, Z)$ devient petite et l'estimation grossière. L'inégalité est efficace sur des hypersurfaces enroulées sur elles mêmes (Figure 1b), mais elle demeure très grossière pour des hypersurfaces possédant de grandes régions plates ou ayant un lieu de non-convexité trop riche (Figure 1a).

4) *Question ouverte.* Il est naturel de demander si la Proposition 3 est valide en supposant que la matrice $H_g + R_g \cdot \text{Id}$ est juste non-dégénérée et pas nécessairement définie positive. Cela entraînerait la validité des Corollaires 2 et 3, du Théorème 2 et du Théorème 3 ci-dessous en supposant juste la non-dégénérescence de l'application de Gauss, et pas la convexité stricte de l'ouvert en question. Je n'ai pas pu étendre l'argument de la Proposition 3 dans cette direction.

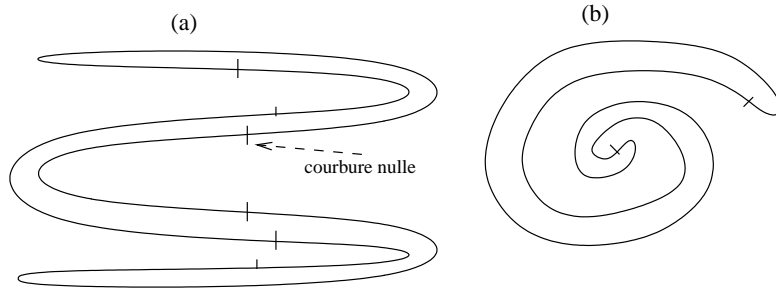


FIGURE 1. Hypersurfaces avec beaucoup/peu de points de faible courbure.

4.6. Techniques globales pour raffiner l'inégalité locale. Revenons dans cette section au point de vue intrinsèque, en considérant M comme variété riemannienne abstraite munie d'une immersion $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Reprenons dans ce contexte les notations de la section 4.1 : $U \subset M$ est un domaine sur lequel l'application de Gauss est injective et évite au moins un point de \mathbb{S}^n , $V = Gauss(U) \subset \mathbb{S}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est l'image de V par la projection stéréographique, alors que $\tilde{\phi} : V \rightarrow U$ est l'inverse de Gauss et $\phi = \varphi \circ \tilde{\phi}$ est la paramétrisation d'Euler.

Ecrivons la formule (11) sur un compact arbitraire à bord lisse $K \subset M$:

$$(24) \quad \text{vol}(K) = \frac{1}{n} \int_K p\mathcal{H}dV + \int_{\partial K} \beta_1 ,$$

avec \mathcal{H} = courbure moyenne sur M et

$$\beta_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (\varphi, \nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1}) .$$

Nous allons estimer les termes intervenant dans (24) par les techniques déjà vues dans 4.4, sous l'hypothèse $\varphi(M) \subset B^{n+1}(0, R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. De façon évidente on a

$$\int_{\partial K} \beta_1 \leq \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K) .$$

Ceci découle de

$$|\beta_1| \leq \frac{1}{n} \text{dvol}_{\partial K} .$$

En effet, soit (f_1, \dots, f_{n-1}) un repère local orthonormé sur ∂K . On a

$$|\beta_1(f_1, \dots, f_{n-1})| = \frac{1}{n} |\det(\varphi, \nu, \varphi_*(f_1), \dots, \varphi_*(f_{n-1}))| \leq \frac{1}{n} |\varphi| \leq \frac{R}{n} ,$$

puisque φ est une isométrie et $\varphi(M)$ est contenue dans la boule de rayon R .

Soit maintenant $U \supset K$ un ouvert localement strictement convexe sur lequel l'application de Gauss est injective, avec ∂U lisse. Nous pouvons alors exprimer les intégrales sur U comme des intégrales sur $V = \text{Gauss}(U)$ et en déduire des majorations sur $\int_K p\mathcal{H}dV$ en utilisant les techniques de la section 4.4. Mettons

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\stackrel{\text{déf.}}{=} p\mathcal{H}dV \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (\varphi, d\nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1}) . \end{aligned}$$

Evaluons $\tilde{\phi}^* \alpha_1$ sur un repère local orthonormé (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{S}^n , qu'on peut choisir comme étant constitué de directions de courbure de M , c'est-à-dire $\phi_* e_i = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i = \frac{1}{k_i}$ et k_i courbure principale de M .

$$\begin{aligned} &\tilde{\phi}^* \alpha_1(e_1, \dots, e_n)|_{\theta} \\ &= \frac{(-1)^n}{(n-1)!} (\varphi, d\nu, \underbrace{d\varphi, \dots, d\varphi}_{n-1})(\tilde{\phi}_* e_1, \dots, \tilde{\phi}_* e_n) \\ &= (-1)^n \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \det(f(\theta)\theta + \nabla f(\theta), e_1, \dots, e_n) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} \\ &= (-1)^n f(\theta) \sum_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_{n-1}} . \end{aligned}$$

On a utilisé $\nu \circ \tilde{\phi} \equiv \text{Id}$, $\varphi \circ \tilde{\phi} \equiv \phi$. La fonction f est définie par $p \circ \tilde{\phi} = f$. Dans la somme ci-dessus apparaissent des mineurs de ϕ_* (dans la base (e_1, \dots, e_n)) d'ordre exactement $n-1$. Par la proposition 3, ils sont contrôlables par $\frac{R^{n-1}}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}}$. Comme $|f| \leq R$ on obtient

$$\left| \int_K p\mathcal{H}dV \right| \leq C_n \frac{R^n}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} T(U) .$$

L'estimation précédente est valable sous des hypothèses d'injectivité sur l'application de Gauss qui sont superflues. La technique de globalisation de la section 4.5 fournit le résultat suivant :

Théorème 3. *Soit $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$ une immersion isométrique d'image contenue dans la boule $B^{n+1}(0, R)$. Soit $U \subset M$ un ouvert localement strictement convexe. Il existe une constante \bar{C}_n indépendante de U et de M telle que, si $K \subset U$ est un compact, on a*

$$(25) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{R^n}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} T(U) + \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K) .$$

Corollaire 4. *Soit $K \subset B^n(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ un compact à bord lisse. On a*

$$(26) \quad \text{vol}(K) \leq \frac{R}{n} \text{vol}(\partial K) .$$

Démonstration du corollaire. Il suffit de faire la démonstration lorsque $R = \text{Circumradius}(K)$. Identifions \mathbb{R}^n avec $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Soit C_i une suite de calottes sphériques de dimension n dont le disque de section est $B^n(0, R)$ et dont le rayon extérieur est égal à λ_i , avec $\lambda_i \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \infty$. Soient K_i les projections verticales de K sur C_i . Alors $\text{vol}(K_i) \rightarrow \text{vol}(K)$, $\text{vol}(\partial K_i) \rightarrow \text{vol}(\partial K)$ et la courbure de Gauss-Kronecker est non-dégénérée sur chaque K_i . Soit $\epsilon > 0$ fixé et soit U_i la calotte sphérique contenant C_i telle que la distance entre ∂U_i et ∂C_i mesurée sur la sphère correspondante soit égale à ϵ . Les paires (U_i, K_i) vérifient les hypothèses du théorème 3. Or il est facile de voir que $T(U_i)/d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i)^{n-1} \rightarrow 0$. En effet, on a $d_{\mathbb{S}^n}(K_i, \partial U_i) = \frac{\epsilon}{\lambda_i}$ et $T(U_i) = \int_0^{\arcsin \frac{R}{\lambda_i + \frac{\epsilon}{\lambda_i}}} \sin^{n-1} t dt$. En passant à la limite selon $i \rightarrow \infty$ on obtient la conclusion. \square

Remarque. L'intérêt du corollaire réside dans ce qu'on peut déduire une forme faible de l'inégalité isopérimétrique par les méthodes du présent article. En effet, l'inégalité (26) est une conséquence directe de l'inégalité isopérimétrique standard : si B' désigne la boule de même volume que K et R' est son rayon, on a $\text{vol}(\partial K)/\text{vol}(K) \geq \text{vol}(\partial B')/\text{vol}(B') = n/R' \geq n/R$.

La descente de l'exposant de n à $n-1$ dans (25) s'appuie sur la formule intégrale de Minkowski (11). On pourrait penser que la formule plus générale (13) permettrait une descente à $n-2$. Pourtant ce n'est pas le cas, car des termes de bord supplémentaires apparaissent et ils ne peuvent être contrôlés de manière raisonnable qu'en dimension deux. Dans ce dernier cas, (13) fournit

$$\text{vol}(K) = \int_K (p^2 - \frac{1}{2}q^2) \mathcal{K} dS + \int_{\partial K} \beta_1 + \int_{\partial K} \beta_2 ,$$

avec

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}(\varphi, \nu, d\varphi) ,$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}p(\varphi, \nu, d\nu)$$

et

\mathcal{K} = courbure de Gauss sur M .

Les inégalités

$$\left| \int_{\partial K} \beta_1 \right| \leq \frac{R}{2} \text{Long}(\partial K)$$

et

$$\left| \int_K \left(p^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) \mathcal{K} dS \right| \leq R^2 T(K)$$

ont déjà été prouvées. Par un calcul similaire à celui exprimant l'image inverse de β_1 on obtient

$$df \wedge \tilde{\phi}^* p(\varphi, \nu, d\nu) = f |df|^2 d\text{vol}_{\mathbb{S}^n} ,$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\phi}^* \beta_2 = -\frac{1}{2} f * df .$$

Or $|df| \leq R$ par la condition $\varphi(M) \subset B(0, R)$, ce qui assure $|*df| \leq R$. Comme f est elle-même bornée par R , on déduit

$$\left| \int_{\partial K} \beta_2 \right| \leq \frac{R^2}{2} \text{Long}(Gauss_{\partial K}) .$$

Il faut remarquer que nous ne supposons pas $Gauss$ comme étant définie positive sur K . Nous en déduisons la

Proposition 4. ($n = 2$) *Soit $\varphi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion isométrique de surface dont l'image est contenue dans la boule de rayon R . Soit $U \subset M$ un ouvert à bord lisse. Alors*

$$(27) \quad \text{Aire}(U) \leq R^2 \left(T(U) + \frac{1}{2} \text{Long}(Gauss_{\partial U}) + \frac{1}{2R} \text{Long}(\partial U) \right) .$$

Remarque : L'inégalité (27) est une inégalité de type isopérimétrique: une correction impliquant la façon dont M est pliée est nécessaire afin de pouvoir borner l'aire d'un domaine par la longueur de son bord.

Le caractère isopérimétrique était aussi directement présent dans (25), cette fois-ci en sens inverse: une correction par le volume du bord est nécessaire afin de pouvoir borner de façon optimale le volume d'un domaine par le volume recouvert sur \mathbb{S}^n par son application de Gauss (l'optimalité est entendue au sens de la puissance à laquelle apparaît $\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ au dénominateur).

5. OPTIMALITÉ DES INÉGALITÉS

Nous discutons l'optimalité des différentes inégalités que nous avons obtenues. *Pour alléger les notations on supposera désormais que l'image de l'immersion est contenue dans la boule unité de \mathbb{R}^{n+1} .*

5.1. Nécessité de considérer un épaissement dans (19). Rappelons l'inégalité (19) :

$$\text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(Gauss_U) .$$

Le membre de droite est optimal au sens où on ne peut remplacer $Gauss_U$ par $Gauss_K$. Sous les hypothèses du corollaire 2 une inégalité du type

$$(28) \quad \text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{d^n} \text{vol}(Gauss_K)$$

ne peut être vraie pour toute hypersurface M strictement convexe et toute paire (U, K) telle que $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) \geq d$ fixé, comme le montre l'exemple suivant.

Pour plus d'aisance dans l'écriture, on fait la construction en dimension 1. On considère la famille d'ellipses

$$E_\epsilon = \{(x, y) : x^2 + \frac{y^2}{\epsilon^2} = 1\} \subset B(0, 1) .$$

On fixe $\frac{\pi}{2} > d > 0$. On choisit $U_\epsilon = \{(x, y) \in E_\epsilon : y > 0\}$ la demi-ellipse supérieure et $K_\epsilon = \{(x, y) \in U_\epsilon : |x| \leq r\}$, avec $0 < r < 1$ fixé. Pour ϵ suffisamment petit on a effectivement $d_{\mathbb{S}^1}(K_\epsilon, U_\epsilon) \geq d$, mais $\text{Long}(K_\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2r$, tandis que $\text{Long}(\text{Gauss}_{K_\epsilon}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$. Ceci montre qu'une inégalité du type (28) ne peut être vérifiée. La même construction fonctionne en dimension supérieure en considérant la famille d'ellipsoïdes

$$E_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 + \frac{x_{n+1}^2}{\epsilon^2} = 1\} \subset B(0, 1) ,$$

ainsi que

$$U_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E_\epsilon : x_{n+1} > 0\} ,$$

$$K_\epsilon = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in U_\epsilon : \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq r^2\} .$$

5.2. Optimalité de l'inégalité (27). Les trois termes $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$, $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$ et $\text{Long}(\partial U)$ constituant la partie droite de l'inégalité sont indépendants, dans le sens qu'aucun d'entre eux ne peut être borné par les deux autres. Dans la figure 2 nous donnons trois exemples de bouts de surfaces à bord dans lesquels deux des trois termes sont négligeables par rapport au troisième. Les termes négligeables sont respectivement : $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$ et $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$ pour (1) ; $\text{Long}(\partial U)$ et $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$ pour (2) ; $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$ et $\text{Long}(\partial U)$ pour (3).

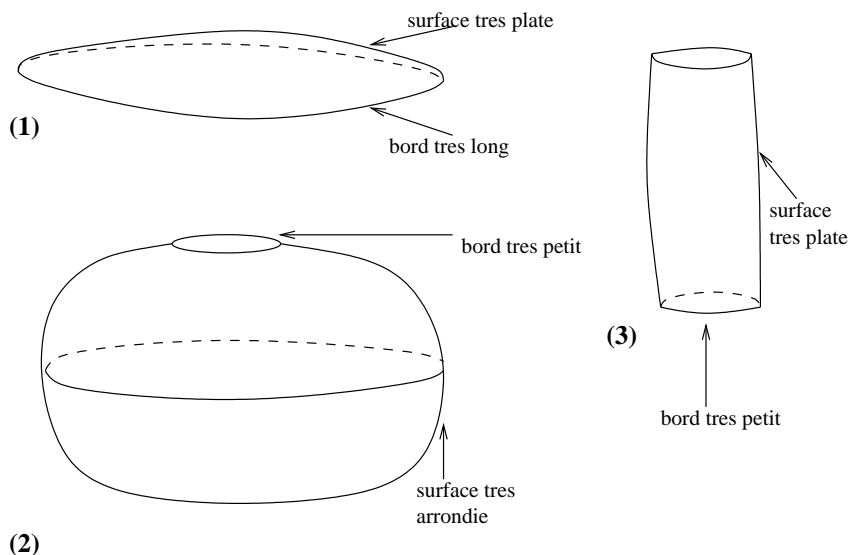


FIGURE 2. Les quantités $\text{Aire}(\text{Gauss}_U)$, $\text{Long}(\text{Gauss}_{\partial U})$ et $\text{Long}(\partial U)$ sont indépendantes.

Les exemples (1) et (2) dans la figure 2 prouvent aussi que les quantités $\text{Aire}(Gauss_U)$ et $\text{Long}(\partial U)$ sont essentielles dans le fonctionnement de l'inégalité (27). On n'a pas encore d'exemple pour montrer que la quantité $\text{Long}(Gauss_{\partial U})$ est aussi essentielle. Il est fort possible qu'une inégalité du type

$$\text{Aire}(U) \leq C \text{Aire}(Gauss_U) + C' \text{Long}(\partial U)$$

soit vérifiée.

5.3. Meilleure estimation pour le volume d'un compact $K \subset M$ fixé.

Plaçons-nous dans le contexte du corollaire 2 : K est un compact admettant un voisinage U sur lequel $Gauss$ est non-dégénérée, injective et d'image contenue dans une demi-sphère. L'inégalité (19) est alors valable :

$$\text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{(d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U))^n} \text{vol}(Gauss_U) .$$

Le but initial de cette étude était de majorer le volume de K par un certain volume recouvert sur \mathbb{S}^n par $Gauss$. Il est évident que, pour une distance $d = d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)$ fixée, la meilleure estimation par (19) est obtenue en choisissant U tel que $Gauss(U) = Gauss(K)_d$, où $Gauss(K)_d$ est l'épaissement par d de $Gauss(K)$:

$$Gauss(K)_d = \{x \in \mathbb{S}^n : \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(x, Gauss(K)) < d\} .$$

On écrira K_d pour l'épaissement par d de K par rapport à la distance sphérique sur U :

$$K_d = \{x \in U : d_{\mathbb{S}^n}(x, K) < d\} .$$

Alors $Gauss(K_d) = Gauss(K)_d$.

Ainsi K_d est le plus petit ouvert U satisfaisant $d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U) = d$ et on a, sous l'hypothèse d'existence d'un U comme ci-dessus,

$$(29) \quad \text{vol}(K) \leq C_n \frac{1}{d^n} \text{vol}(Gauss(K)_d) .$$

Cette écriture de l'inégalité ne fait intervenir de voisinage du compact qu'implicitement. Le d peut varier entre 0 et d_{\max} , où

$$d_{\max} = \max \left\{ d : \exists U \text{ ouvert } \supset K_d \text{ t.q. } Gauss|_U \text{ non-dégénérée, injective et d'image contenue dans une demi-sphère} \right\} .$$

Nous nous intéressons alors à comprendre quel est le minimum du membre de droite dans (29). Le problème plus général à traiter est de trouver

$$\min_{0 < d < d_{\max}} \frac{\text{vol}(A_d)}{d^n}$$

pour $A \subset \mathbb{S}^n$ un compact quelconque inclus dans une demi-sphère \mathcal{D} , A_d un épaissement par d de A et $d_{\max} \leq \text{dist}_{\mathbb{S}^n}(A, \partial \mathcal{D})$. La réponse complète à cette question est fournie par la proposition suivante, démontrée dans un cadre plus général dans l'appendice.

Proposition 5. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{S}^n$ inclus dans une demi-sphère la fonction*

$$f(d) = \frac{\text{vol}(Gauss(K)_d)}{d^n}$$

est décroissante sur l'intervalle $]0, d_{\max}[$.

En particulier, la meilleure estimation dans l'inégalité (29) est obtenue pour $d = d_{\max}$.

5.4. Optimalité de l'inégalité (25). Nous rappelons que *Gauss* est supposée non-dégénérée sur l'ouvert U et $K \subset U$ est un compact. De plus, l'inégalité

$$(30) \quad \text{vol}(K) \leq \bar{C}_n \frac{1}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} \text{vol}(Gauss_U) + \frac{1}{n} \text{vol}(\partial K)$$

fonctionne pour une *immersion* isométrique de U dans \mathbb{R}^{n+1} . Nous allons montrer que les deux termes de droite dans (30) sont essentiels dans le fonctionnement de l'inégalité et que l'exposant $n - 1$ est optimal.

a) Le terme $\text{vol}(\partial K)$ est essentiel. Considérons une suite U_k de bouts de surface définis par

$$(31) \quad U_k = B^{n+1}(0, 1) \cap S^n((0, \dots, 0, -k), k + \frac{1}{k}) .$$

Les U_k sont des héli-sphères de courbure de plus en plus faible, qui tendent avec k vers le disque ouvert

$$D^n(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1 \text{ et } x_{n+1} = 0\} .$$

L'image par *Gauss* de U_k est une boule géodésique sur \mathbb{S}^n centrée au pôle nord, de rayon $\rho_k \rightarrow 0$. Soit K_k la préimage de la boule géodésique fermée de même centre et rayon $\rho_k/2$. Alors $K_k \rightarrow D^n(0, \frac{1}{2})$ (Figure 4, (1)). Par construction $d_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k) = \rho_k/2$, tandis que $\text{vol}(Gauss_{U_k}) \sim \rho_k^n$. Ainsi

$$\frac{\text{vol}(Gauss_{U_k})}{(d_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k))^{n-1}} \sim \rho_k \rightarrow 0$$

devient négligeable devant $\text{vol}(K_k)$. Ceci prouve que le terme $\text{vol}(\partial K)$ est essentiel pour le fonctionnement de l'inégalité (25). Le même exemple prouve que **l'inégalité (22) est optimale** au sens où l'exposant n ne peut être diminué sans ajout de termes supplémentaires.

b) Le terme $\frac{1}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} \text{vol}(Gauss_U)$ est essentiel. Une inégalité du type $\text{vol}(K) \leq C \text{vol}(\partial K)$ ne peut être vraie telle quelle, comme on peut le voir facilement en prenant pour K une sphère dont on a enlevé une boule géodésique arbitrairement petite.

c) L'exposant $n - 1$ dans (22) est optimal pour le coefficient $\frac{1}{n}$ devant $\text{vol}(\partial K)$. A l'intérieur du disque plan

$$D^2(0, 1) = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| < 1 \text{ et } x_3 = \dots = x_{n+1} = 0\}$$

considérons une courbe fermée immergée, appelée γ .

La construction que nous présentons généralise celle des surfaces de rotation dans \mathbb{R}^3 . La courbe γ admet en chaque point un plan normal géométrique de dimension n , et tous ces plans normaux sont canoniquement identifiés par des translations et rotations dans $\mathbb{R}^2 \equiv \{x_3 = \dots = x_{n+1} = 0\}$. Fixons une hypersurface H de dimension $n - 1$ passant par l'origine dans un de ces plan normaux. Son image via les identifications canoniques décrit le long de γ une hypersurface \mathcal{H} de dimension n dans \mathbb{R}^{n+1} qu'on appelle *hypersurface de rotation* définie par H le long de γ .

Nous donnons des exemples de telles hypersurfaces de rotation \mathcal{H} pour lesquelles la différence $\text{vol}(K) - \frac{1}{n} \text{vol}(\partial K)$ est arbitrairement grande et dominée par $\frac{C_n}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-1}} \text{vol}(Gauss_U)$, mais pour lesquelles $\frac{C}{d_{\mathbb{S}^n}(K, \partial U)^{n-2}} \text{vol}(Gauss_U)$ est arbitrairement petit quelle que soit la constante C .

Faisons d'abord une remarque concernant la lissité des hypersurfaces \mathcal{H} construites comme ci-dessus. Comme le montre l'exemple des sphères (pour lesquelles on prend pour γ un cercle et pour H une demi-sphère), \mathcal{H} peut avoir des singularités, issues de l'intersection de "méridiens" H voisins. L'absence de singularités sur un méridien H_p au point $p \in \gamma$ dépend de la courbure de γ en p et de la courbure de H . En termes précis, il faut que la projection de H sur la normale à γ au point p s'éloigne de p d'une distance au plus égale au rayon focal en p . Comme cela on est sûr que les H "voisines" ne s'intersectent pas. En particulier, si la courbure de γ est bornée supérieurement, on peut prendre pour H une hémisphère centrée sur γ , de courbure suffisamment faible. Ceci est le point de départ de notre construction.

Prenons donc pour γ une courbe fermée immergée localement convexe. Pour tout $\delta < 1$ il existe une telle courbe de longueur *arbitrairement grande* contenue dans $D^2(0, \delta)$ et de courbure bornée supérieurement par $2/\delta$. En particulier le rayon focal est minoré par $\delta/2$. Soit \mathcal{H}_k une suite d'hypersurfaces de rotation construites sur γ à partir d'hémisphères de rayon géodésique égal à $r < 1$ et courbure tendant vers 0 avec k . Le r est choisi pour que $\mathcal{H}_k \subset B^{n+1}(0, 1)$. En prenant δ suffisamment petit, le r peut être choisi *arbitrairement proche de 1*.

Prenons $U_k = \mathcal{H}_k$. L'image par Gauss de U_k est un tube de rayon $\rho_k \rightarrow 0$ autour du grand cercle $\bar{D}^2(0, 1) \cap \mathbb{S}^n$, et on définit K_k comme la préimage par Gauss du tube de rayon ρ_k/λ autour du même grand cercle, avec $\lambda > 1$ (Figure 4, (2)). Alors

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_k) &\longrightarrow \text{vol } B^{n-1}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma) = \frac{r}{\lambda} \frac{1}{n-1} \text{vol } \mathbb{S}^{n-2}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma) , \\ \text{vol}(\partial K_k) &\longrightarrow \text{vol } \mathbb{S}^{n-2}\left(\frac{r}{\lambda}\right) \cdot \text{Long}(\gamma) . \end{aligned}$$

Si $\frac{r}{\lambda} > \frac{n-1}{n}$ (ce qui est réalisable pour r, λ proches de 1), alors $\text{vol}(K_k) - \frac{1}{n} \text{vol}(\partial K_k)$ est positif et peut être rendu arbitrairement grand en augmentant $\text{Long}(\gamma)$. Ceci démontre déjà qu'une correction de $\text{vol}(K_k)$ par un terme supplémentaire est nécessaire. D'un autre côté

$$\text{vol}(Gauss_{U_k}) \sim \rho_k^{n-1} \cdot \text{Long}(\gamma) ,$$

$$\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k) = \rho_k \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) .$$

Ceci montre qu'un exposant η strictement plus petit que $n-1$ rendrait la quantité $(\bar{d}_{\mathbb{S}^n}(K_k, \partial U_k))^{-\eta} \cdot \text{vol}(Gauss_{U_k})$ équivalente à $\rho_k^{n-1-\eta} \rightarrow 0$, ne pouvant donc pas dominer $\text{vol}(K_k) - \frac{1}{n} \text{vol}(\partial K_k)$. L'exposant $n-1$ est donc optimal pour le coefficient $\frac{1}{n}$ dans (22). □

Remarque. Le corollaire 4 montre que le coefficient $\frac{1}{n}$ devant le terme $\text{vol}(\partial K)$ est optimal et notre preuve du fait que l'exposant $n-1$ est lui-aussi optimal a utilisé fortement la valeur exacte de celui-ci. Notre exemple ne fonctionne pas si on permet un coefficient plus grand devant $\text{vol}(\partial K)$, mais ceci ne serait pas naturel si on adopte le point de vue isopérimétrique.

6. APPENDICE. UNE INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE INVERSE

Les résultats que nous présentons dans cet appendice ont été motivés par la recherche d'une preuve pour la proposition 5, à son tour motivée par l'étude de la meilleure façon d'estimer le volume d'un compact 5.3. Dans la suite on désignera

par \mathcal{R}^n l'espace euclidien \mathbb{R}^n , la sphère \mathbb{S}^n ou l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Si K est un compact de \mathcal{R}^n et $d > 0$ un réel positif on note

$$K_d = \{ x \in \mathcal{R}^n : d(x, K) < d \} .$$

On note par $B(d)$ une boule ouverte de rayon d dans \mathcal{R}^n . On pose

$$\begin{aligned} d_{\max}(K) &= \pi - \text{Circumradius}(K) , & \mathcal{R}^n &= \mathbb{S}^n , \\ d_{\max}(K) &= +\infty , & \mathcal{R}^n &= \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n . \end{aligned}$$

Nous allons montrer la

Proposition 6. *Pour tout compact $K \subset \mathcal{R}^n$ et pour tout réel $0 < d < d_{\max}(K)$ on a l'inégalité*

$$(32) \quad \frac{\text{vol}_n K_d}{\text{vol}_{n-1} \partial K_d} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

avec égalité si et seulement si K est un ensemble fini de points situés à distance au moins d l'un de l'autre (ou, en d'autres mots, si K_d est une union disjointe de boules de rayon d).

Avant d'en donner la preuve, indiquons un corollaire et une formulation équivalente de la proposition 6.

Corollaire 5. *Sous les hypothèses précédentes et pour $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ on a*

$$\frac{\text{vol}_n K_d}{\text{vol}_{n-1} \partial K_d} \geq \frac{d}{n}$$

En particulier, la fonction

$$(33) \quad f(d) = \frac{\text{vol}_n K_d}{d^n}$$

est décroissante pour $0 < d < d_{\max}(K)$.

Démonstration. Soit α_{n-1} le volume de la sphère unité de \mathbb{R}^n . Il est facile de voir que :

- pour $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n$, on a $\text{vol}_{n-1} \partial B(d) = d^{n-1} \alpha_{n-1}$, $\text{vol}_n B(d) = \int_0^d t^{n-1} \alpha_{n-1} dt = \frac{d^n}{n} \alpha_{n-1}$. Ceci entraîne

$$\frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)} = \frac{d}{n}$$

- pour $\mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n$, on a $\text{vol}_{n-1} \partial B(d) = (\sin d)^{n-1} \alpha_{n-1}$, $\text{vol}_n B(d) = \int_0^d (\sin t)^{n-1} \alpha_{n-1} dt$. Alors on montre que

$$\frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)} = \frac{\int_0^d (\sin t)^{n-1} dt}{(\sin d)^{n-1}} \geq \frac{d}{n}$$

Pour cela il suffit de voir que la fonction $g(d) = n \int_0^d (\sin t)^{n-1} dt - d(\sin d)^{n-1}$ est croissante et nulle en $d = 0$, ce qui assure sa positivité. □

Remarque. Le même résultat n'est pas valable dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , où la fonction $\text{vol}(B(d))/d^n$ est croissante.

Remarque. C'est l'étude de la fonction $f(d)$ dans (33) qui a engendré l'étude de (32). Dans le cas d'un convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ une formule due à Steiner ([BZ], §4.19)

assure que $\text{vol}_n K_d$ est un polynôme de degré n en $d > 0$ ayant les coefficients positifs, d'où la décroissance de f . Dans le cas non-convexe on peut encore écrire $\text{vol}_n K_d$ comme polynôme de degré n en d [Fe], mais uniquement pour des valeurs de d plus petites que le rayon focal de ∂K lorsque celui-ci est lisse, ou plus petites qu'un analogue du rayon focal pour des compacts à bord "raisonnablement" singulier [Fe].

C'est la décroissance de f pour de très petites et de très grandes valeurs de d (dans ce dernier cas, K_d est proche d'une boule de rayon d) qui nous a menés vers l'étude de sa décroissance globale.

Il convient d'observer que la variation de $\text{vol}_n K_d$ peut être très compliquée dans le domaine intermédiaire, notamment à cause de la présence de trous dans K qui peuvent être absorbés dans K_d pour d suffisamment grand.

La classe d'ouverts de \mathcal{R}^n pour lesquels l'inégalité 32 est valable est

$$\mathcal{C}_d = \{D \text{ ouvert borné} \subset \mathcal{R}^n : \forall x \in D, \exists \text{ boule } x \in B(d) \subset D\}$$

De façon évidente, si K est un compact alors

$$(34) \quad K_d \in \mathcal{C}_d$$

La proposition 6 découlera alors de la

Proposition 7. *Pour tout ouvert $D \in \mathcal{C}_d$ on a*

$$(35) \quad \frac{\text{vol}_n D}{\text{vol}_{n-1} \partial D} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

On a égalité si et seulement si D est une union disjointe de boules de rayon d .

C'est cette dernière inégalité qui peut être regardée comme une inégalité isopérimétrique "inverse". Remarquons d'ailleurs que \mathcal{C}_d coïncide avec

$$\mathcal{C}'_d = \{D \text{ ouvert} \subset \mathcal{R}^n : \exists K \text{ compact}, D = K_d\}$$

En effet, l'inclusion $\mathcal{C}'_d \subseteq \mathcal{C}_d$ découle de (34). D'un autre côté tout ouvert $D \in \mathcal{C}_d$ peut s'écrire

$$D = (D_{-d})_d$$

avec

$$D_{-d} = \{x \in D : d(x, \partial D) \geq d\}$$

L'inclusion $(D_{-d})_d \subseteq D$ est valable pour un ouvert arbitraire, n'appartenant pas nécessairement à \mathcal{C}_d . Pour voir l'inclusion inverse, prenons un point $x \in D$ quelconque. Puisque $D \in \mathcal{C}_d$ il existe une boule $x \in B(y, d) \subset D$, ce qui assure que $y \in D_{-d}$. Ceci entraîne $B(y, d) \in (D_{-d})_d$ et donc $x \in (D_{-d})_d$.

On conclut que les propositions 6 et 7 sont équivalentes.

*Démonstration de la proposition 7.*¹ Un ouvert $D \in \mathcal{C}_d$ peut s'écrire comme

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i(d)$$

avec

$$\lim_N \text{vol}_n \bigcup_{i=1}^N B_i(d) = \text{vol}_n D$$

¹Une première preuve, en dimension 2 et pour la métrique euclidienne, m'a été suggérée par Nicolae Mihalache. Je lui en suis vivement reconnaissant.

$$\lim_N \text{vol}_{n-1} \partial \bigcup_{i=1}^N B_i(d) = \text{vol}_{n-1} \partial D$$

Il suffit donc de prouver (35) lorsque D est une union finie de boules de rayon d . On raisonne par récurrence sur N . Lorsque $N = 1$ on a même l'égalité. Pour alléger les notations dans le passage de N à $N + 1$ on note

$$V_N = \text{vol}_n \bigcup_{i=1}^N B_i(d) \quad \partial_N = \text{vol}_{n-1} \partial \bigcup_{i=1}^N B_i(d)$$

Soit

$$U_{N+1} = B_{N+1}(d) \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i(d) \right)$$

Alors (voir aussi la figure 3)

$$V_{N+1} + \text{vol}_n U_{N+1} = V_N + \text{vol}_n B_{N+1}(d)$$

$$\partial_{N+1} + \text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1} = \partial_N + \text{vol}_{n-1} \partial B_{N+1}(d)$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence on déduit

$$\frac{V_{N+1} + \text{vol}_n U_{N+1}}{\partial_{N+1} + \text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \geq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

Pour conclure il suffit alors de montrer que

$$(36) \quad \frac{\text{vol}_n U_{N+1}}{\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \leq \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$$

On utilise maintenant l'inégalité isopérimétrique dans \mathcal{R}^n ([BZ], §10.2.1) : si $B(h)$ désigne la boule de volume égal à $\text{vol}_n U_{N+1}$ on a l'inégalité $\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1} \geq \text{vol}_{n-1} \partial B(h)$. On en déduit

$$\frac{\text{vol}_n U_{N+1}}{\text{vol}_{n-1} \partial U_{N+1}} \leq \frac{\text{vol}_n B(h)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(h)}$$

D'un autre côté, puisque $U_{N+1} \subseteq B_{N+1}(d)$ on a forcément $h \leq d$ et l'inégalité (36) s'ensuit une fois qu'on aura remarqué que la fonction $G(d) = \frac{\text{vol}_n B(d)}{\text{vol}_{n-1} \partial B(d)}$ est strictement croissante en $d > 0$.

- si $\mathcal{R}^n = \mathbb{R}^n$ alors $G(d) = \frac{d}{n}$;
- si $\mathcal{R}^n = \mathbb{S}^n$ alors $G(d) = \frac{\int_0^d (\sin t)^{n-1} dt}{(\sin d)^{n-1}}$. Sa croissance équivaut à la positivité de $G_1(d) = (\sin d)^n - (n-1) \int_0^d (\sin t)^{n-1} dt \cos d$, or $G_1(0) = 0$ et $G_1' \geq 0$;
- si $\mathcal{R}^n = \mathbb{H}^n$ alors $G(d) = \frac{\int_0^d (\sinh t)^{n-1} dt}{(\sinh d)^{n-1}}$. Sa croissance équivaut à la positivité de $G_1(d) = (\sinh d)^n - (n-1) \int_0^d (\sinh t)^{n-1} dt \cosh d$, or $G_1(0) = G_1'(0) = 0$ et $G_1'' \geq 0$.

□

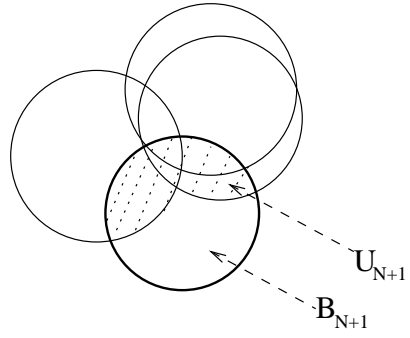


FIGURE 3. Preuve de la proposition 7

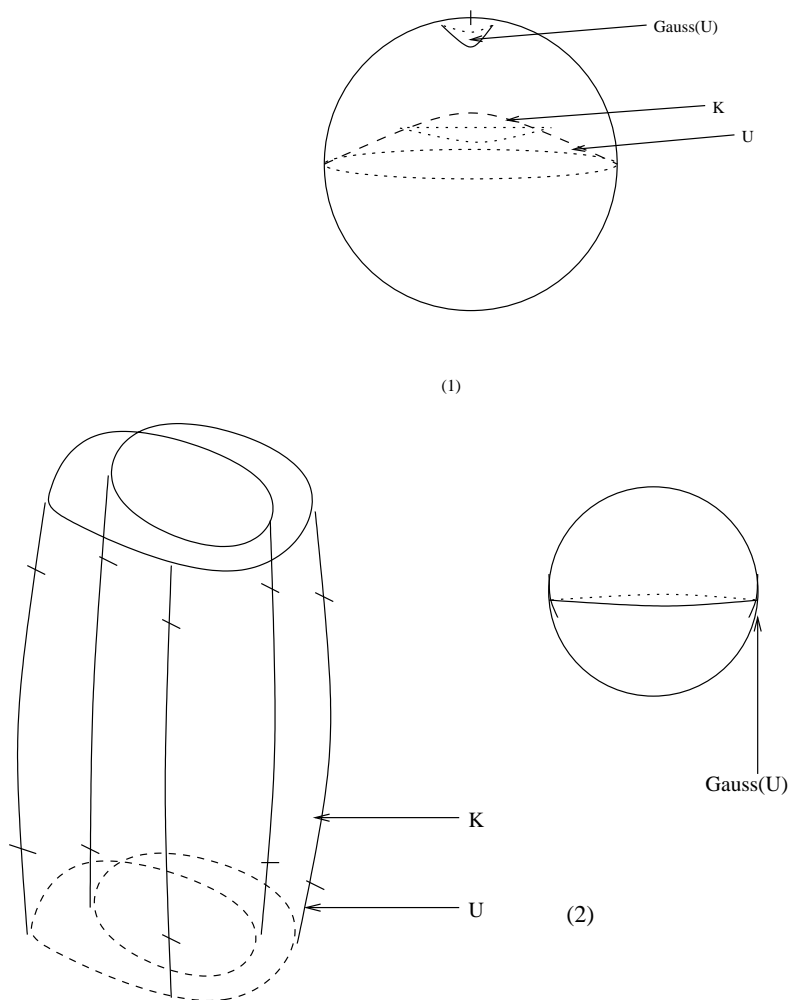


FIGURE 4. Optimalité de l'inégalité (22)

RÉFÉRENCES

- [Au] Aubin, T. : Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer, Berlin, 1982
- [BF] Bonnesen, T. et Fenchel, W. : Theorie der konvexen Körper, Springer, Berlin, 1934
- [BZ] Burago, Yu. D., Zalgaller, V. A. : Geometric Inequalities, Springer, Berlin, 1988
- [Fe] Federer, H. : Curvature measures, Trans. AMS **93**, 418-491 (1959)
- [Hs] Hsiung, C. C. : Some integral formulas for closed hypersurfaces, Math. Scand. **2**, 286-294 (1954)
- [RT] Rauch, J., Taylor, B.A. : The Dirichlet Problem for the multidimensional Monge-Ampère Equation, Rocky Mountain J. of Math. **7**, 345-363 (1977)
- [Sa] Sacksteder, R. : On hypersurfaces with no negative sectional curvatures, Amer. J. Math. **82**, 609-630 (1960)
- [Su] Sugahara, K. : Gap theorems for hypersurfaces in \mathbb{R}^N , Hokkaido Math. J. **14**, 137-142 (1985)