

TD8: Premières notions d'intégration des formes différentielles

1) Fonctions de classe C^l définies sur une sous-variété.

A) Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété fermée de classe C^k et dimension m . Par définition, il existe des ouverts $U_i \subset \mathbb{R}^n$ et des difféomorphismes $\psi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que $\psi_i(W \cap U_i) = \{x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V_i$ et $W \cap U_i$ réalise un recouvrement (ouvert pour la topologie induite) de W .

Soit $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes. On dira que f est de classe C^l , $l \leq k$ si elle vérifie l'une d'entre elles.

i. $f \circ \psi_i^{-1}|_{\{x_{m+1} = \dots = x_n = 0\} \cap V_i} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^l . Prouver que cette propriété ne dépend pas du choix d'un recouvrement (U_i, V_i, ψ_i) comme ci-dessus.

ii. Pour tout point $x \in W$ il existe un voisinage ouvert U_x de x dans \mathbb{R}^n et une fonction $g : U_x \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^l telle que $f|_{W \cap U_x} = g|_{W \cap U_x}$.

iii. Il existe un voisinage ouvert U de W dans \mathbb{R}^n et une fonction $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^l telle que $f = g|_W$.

B) Application aux formes différentielles. La discussion précédente reste valable lorsqu'on considère des fonctions à valeurs vectorielles. Si E désigne un espace vectoriel (réel) de dimension finie, on dit qu'une fonction $f : W \rightarrow E$ est de classe C^l si toutes ses composantes par rapport à une base de E sont de classe C^l . La définition ne dépend pas du choix de la base.

Cela est valable en particulier lorsque $E = \Lambda^r((\mathbb{R}^n)^*)$, $r \geq 0$ et donne la définition d'une r -forme différentielle de classe C^l sur la sous-variété W .

Remarque importante. L'intégrale d'une m -forme σ sur W , $\dim W = m$ est définie de la façon suivante:

$$\int_W \sigma = \sum_i \int_{\psi_i(W \cap U_i)} (\psi_i^{-1}|_*)^*(\rho_i \sigma)$$

avec ρ_i une partition de l'unité subordonnée à U_i . Démontrer que $(\psi_i^{-1}|_*)^*(\rho_i \sigma)$ dépend uniquement des valeurs de σ sur les vecteurs tangents à W .

2) Formes différentielles et théorème de Brouwer en dimension 2.

a) Soit

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Démontrer que α est une 1-forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calculer l'intégrale de α sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$. En déduire que α n'est pas exacte.

b) On note $D^2(\rho) = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \rho\}$, $\rho > 0$. Démontrer qu'il n'y a pas d'application différentiable $r : D^2(1 + \epsilon) \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\epsilon > 0$ telle que $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$. On pourra utiliser le lemme de Poincaré pour la forme $r^*\alpha$.

En déduire qu'il n'y a pas d'application différentiable $r : D^2(1) \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$.

c) Déduire que toute application différentiable $f : D^2(1) \rightarrow D^2(1)$ a un point fixe. Utiliser le théorème d'approximation différentiable pour montrer que toute application continue $f : D^2(1) \rightarrow D^2(1)$ a un point fixe (théorème de Brouwer).

3) Formes différentielles et théorème de Brouwer en dimension supérieure à 2.

On pose $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $n \geq 2$. Assurez-vous que vous savez démontrer que \mathbb{S}^{n-1} est une sous-variété compacte de dimension $n - 1$ dans \mathbb{R}^n . Calculer l'espace tangent en un point $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

a) Soit

$$\sigma = \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Prouver que σ est fermée.

b) Calculer $\int_{\mathbb{S}^2} \sigma$.

c) Soit

$$\alpha = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_n dx_n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{n/2}}$$

définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On considère sur \mathbb{R}^n l'orientation et le produit scalaire habituels. Calculer $*\alpha$ et montrer que c'est une $n - 1$ -forme fermée.

d) Calculer $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} *\alpha$.

e) Montrer, comme dans l'exercice 1, qu'il n'existe pas d'application différentiable ou, respectivement, continue $f : D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ telle que $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{Id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$. Déduire que toute application différentiable ou, respectivement, continue de D^n dans lui-même a un point fixe (théorème de Brouwer).