

TD7: Formes différentielles

Sauf mention explicite, tous les espaces vectoriels ci-dessous sont considérés au dessus de l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dénote par \mathbb{K} l'un de ces deux corps. La dimension des espaces vectoriels en question est finie.

1) Soit α la 1-forme différentielle dans \mathbb{R}^3

$$\alpha = ydx - xdy + dz.$$

a) A quelles conditions (C) doivent satisfaire des fonctions $u(x, y, z)$ et $v(x, y, z)$ de classe C^1 pour que la forme

$$\alpha - vdu$$

soit fermée? Montrer que u et v sont alors indépendantes de z .

b) Peut-on choisir de façon arbitraire $v = V(x, y)$?

c) Montrer que si u et v satisfont aux conditions (C) les trois formes différentielles du , dv et $\alpha - vdu$ sont linéairement indépendantes en chaque point.

2) Soit

$$\omega = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy$$

une forme différentielle de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 . On désigne par $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de \mathbb{R}^3 où ω n'est pas nulle. Soit f une fonction définie et de classe C^∞ au voisinage de p_0 .

a) Montrer que, pour que ω puisse se mettre au voisinage de p_0 sous la forme $\alpha \wedge df$, α étant une 1-forme différentielle de classe C^∞ au voisinage de p_0 , il faut et il suffit que df ne s'annule pas en p_0 et que f soit solution d'une équation aux dérivées partielles que l'on écrira.

b) On pose $\alpha = \lambda dx + \mu dy + \nu dz$; exprimer λ, μ, ν en fonction de $a, b, c, \partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z$ pour que $\alpha \wedge df = \omega$.

3) **Volume et projections.** a) Soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application affine $\phi(x) = Ax + b$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Qui est

$$\phi^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) ?$$

b) Soit $i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n, (x^1, \dots, x^k) \mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$ l'inclusion. Soit $\omega = \sum_I f_I dx^I$, $I = (i_1 < \dots < i_k)$ une k -forme sur \mathbb{R}^n . Calculer $i^*\omega$.

c) Soit $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, k \leq n$ la projection sur les k -premières coordonnées. Qui est $p^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k)$?

4) **Isomorphisme canonique.** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $E = F \oplus G$ une décomposition en somme directe. Montrer qu'on a un isomorphisme canonique

$$\Lambda^m E \simeq \bigoplus_{p=0}^m \left(\Lambda^p F \otimes \Lambda^{m-p} G \right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

On entend par “isomorphisme canonique” un isomorphisme dont la définition ne dépend pas du choix d’une base, mais uniquement des données algébriques du problème.

Exemple fondamental. Il n’y a pas d’isomorphisme canonique entre un espace vectoriel E de dimension finie et son dual E^* . Par contre, une fois qu’on se donne un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur E , il y a un isomorphisme canonique (qui dépend du choix du produit scalaire, mais pas du choix d’une base)

$$E \longrightarrow E^*, \quad v \longmapsto \langle v, \cdot \rangle$$

Autre exemple fondamental: $\text{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$.

Autres exemples: $E \simeq E^{**}$, $\Lambda^m(E^*) \simeq (\Lambda^m(E))^*$, $m \in \mathbb{N}$.

5) Un aller-retour entre complexe et réel et un autre isomorphisme canonique.

a) *Complexification*. Soit E un espace vectoriel réel. Son *complexifié* est noté $E_{(\mathbb{C})}$ et est défini comme

$$E_{(\mathbb{C})} \stackrel{\text{déf.}}{=} E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

ou, de façon équivalente, comme

$$E_{(\mathbb{C})} = \{u + iv : u, v \in E\}, \quad i^2 = -1$$

Démontrer l’équivalence des deux définitions ainsi que l’égalité $\dim_{\mathbb{C}} E_{(\mathbb{C})} = \dim_{\mathbb{R}} E$.

Notations. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n . On note $E|_{\mathbb{R}}$ l’espace vectoriel réel sous-jacent, de dimension $2n$. On note \overline{E} l’espace vectoriel complexe dont le groupe abélien sous-jacent est E et la multiplication par des scalaires est définie comme

$$a \cdot w \stackrel{\text{déf.}}{=} \overline{a}w, \quad a \in \mathbb{C}, w \in E$$

L’application $\text{Id} : E \longrightarrow \overline{E}$ est \mathbb{C} -anti-linéaire et, par définition, $E = \overline{\overline{E}}$.

b) Soit E un espace vectoriel complexe. Nous allons montrer l’existence d’un isomorphisme canonique

$$(E|_{\mathbb{R}})_{(\mathbb{C})} \simeq E \oplus \overline{E}$$

On note $J : E \longrightarrow E$ l’automorphisme de E donné par la multiplication avec i , qui vérifie $J^2 = -\text{Id}$. On l’étend par \mathbb{C} -linéarité à un automorphisme de $(E|_{\mathbb{R}})_{(\mathbb{C})}$, que l’on note encore J . Prouver que les deux seules valeurs propres de J sont $\pm i$, avec comme sous-espaces propres correspondants $\{v \mp iJv : v \in E\}$. Construire un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire

$$\Phi : E \oplus \overline{E} \xrightarrow{\sim} (E|_{\mathbb{R}})_{(\mathbb{C})}$$

qui commute avec l’action de J . Expliciter son inverse.

c) Prouver $(E|_{\mathbb{R}})^* \simeq E^*|_{\mathbb{R}}$. Expliciter l’isomorphisme

$$((E|_{\mathbb{R}})^*)_{(\mathbb{C})} \xrightarrow{\sim} E^* \oplus \overline{E^*} \tag{1}$$