Calcul Différentiel 2 **10/3/2003**
2002 - 2003

TD6: Algèbre extérieure

Tous les espaces vectoriels ci-dessous sont considérés au dessus de l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera l'un de ces deux corps par $\mathbb{K}$.

1) Indépendance linéaire. Soit E un espace vectoriel. Montrer que les vecteurs $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants si et seulement si $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \in \Lambda^r(E)$ est non-nul.

2) Bases. Soit E un espace vectoriel. Montrer que les familles libres $\{v_1, \ldots, v_r\}$ et $\{w_1, \ldots, w_r\}$ engendrent le même sous-espace de E si et seulement si les vecteurs $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r, w_1 \wedge \ldots \wedge w_r \in \Lambda^r(E)$ sont colinéaires. Quelle est la constante de proportionnalité?

3) Déterminants. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

a) Redémontrez le fait que $\dim \Lambda^n(E) = 1$.

b) Expliquer comment un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ induit des endomorphismes de $\Lambda^r(E)$, $0 \leq r \leq n$ ("poussés en avant", ou encore "push-forward").

c) L'endomorphisme de $\Lambda^n(E)$ induit par u est la multiplication par une constante. On *définit* le déterminant de u comme étant cette constante. On la note $\det(u)$. Prouver $\det(u_1 \circ u_2) = \det(u_1)\det(u_2)$, $\det(\mathrm{Id}) = 1$ et montrer que u est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

d) Expliquer comment un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ induit des endomorphismes de $\Lambda^r(E^*)$, $0 \leq r \leq n$ ("tirés en arrière", ou encore "pull-back"). Montrer que l'endomorphisme induit par u sur $\Lambda^n(E^*)$ est la multiplication par $\det(u)$. D'ailleurs, on peut prendre *cette* propriété comme définition du déterminant.

e) Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de E. Pour une matrice $n \times n$ on définit $\det(A)$ comme $\det(u_A)$, où u_A est l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est A. Montrer que la définition ne dépend pas du choix de la base et déduire la formule classique du déterminant.

f) Toute forme multilinéaire alternée de degré n sur $\mathbb{K}^n$ est un multiple du déterminant habituel. Utilisez cette propriété pour montrer sans calculs le fait que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

4) Volume. Soient $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On forme la matrice $\mathrm{col}(v_i)$ dont les colonnes sont les $v_1, \ldots, v_n$, dans cet ordre. Montrer que $\left|\det\left(\mathrm{col}(v_i)\right)\right|$ est le volume du parallélipipède formé par les $v_1, \ldots, v_n$.

5) Suite exacte. Soient E un espace vectoriel, $\alpha \in E^*$, $\omega \in \Lambda^p(E^*)$. Montrer que les suivantes affirmations sont équivalentes:

a) $\omega = \alpha \wedge \beta$, $\beta \in \Lambda^{p-1}(E^*)$;

b) $\alpha \wedge \omega = 0$;

c) $\omega\big|_{(\ker \alpha)^p} = 0$.

Déduire qu'on a la suivante suite exacte:

$$\Lambda^{p-1}(E^*) \xrightarrow{\wedge\alpha} \Lambda^p(E^*) \xrightarrow{\wedge\alpha} \Lambda^{p+1}(E^*)$$

Cela veut dire que le noyau du deuxième morphisme est égal à l'image du premier.

6) Etoile de Hodge. Soit E un espace vectoriel *réel* de dimension n orienté. On appelle orientation le choix d'un générateur ν de $\Lambda^n(E^*)$, appelé encore *élément de volume.*

On définit le morphisme

$$* : \Lambda^p(E) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(E^*), \qquad *v = \langle v, \nu \rangle$$

où

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^p(E) \times \Lambda^n(E^*) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(E^*)$$

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, \omega \rangle (w_1, \ldots, w_{n-p}) = \omega(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p})$$

a) Expliciter $*$ en termes d'une base $e_1, \ldots, e_n$ et de sa base duale.

b) Comment agit l'application duale $* : \Lambda^p(E^*) \longrightarrow \Lambda^{n-p}(E)$?

c) Montrer que $*^2\big|_{\Lambda^p(E)} = (-1)^{p(n-p)}\mathrm{Id}$.

d) On suppose maintenant que E est muni d'un produit scalaire. Expliciter $*$ en termes d'une base orthonormée de E en utilisant l'isomorphisme de E avec E^* donné par le produit scalaire.

e) Construire des produits scalaires sur toutes les puissances extérieures de E et E^*, par rapport auxquels $*$ est une isométrie.

7) Formes décomposables. On dit qu'une p-forme est décomposable si elle est produit extérieur de 1-formes. On considère un espace vectoriel E de dimension n.

a) Montrer que toute $n-1$-forme ω est décomposable. On pourra considérer l'application

$$\Lambda^1(E^*) \xrightarrow{\wedge\omega} \Lambda^n(E^*) \ ,$$

montrer qu'elle est nulle si et seulement si ω est nulle et considérer une base de son noyau. De façon alternative, on pourra utiliser l'opérateur $*$ de Hodge.

b) Soit $\omega \in \Lambda^2(E^*)$. Montrer que ω est décomposable si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$.

8) Un résultat de Elie Cartan. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Considérons $\omega_1, \ldots, \omega_p$ des 1-formes linéairement indépendantes, $p \leq n$. On suppose qu'il existe des 1-formes $\theta_1, \ldots, \theta_p$ telles que

$$\sum_{i=1}^{p} \theta_i \wedge \omega_i = 0$$

Montrer l'existence de scalaires uniquement déterminés A_{ij} tels que

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{p} A_{ij} \omega_j . \qquad 1 \leq i \leq p$$

Montrer qu'on a $A_{ij} = A_{ji}$.

On pourra démontrer les suivants résultats auxiliaires.

a) Les 1-formes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont linéairement indépendantes si et seulement si

$$\dim \ker \omega_1 \cap \ldots \cap \ker \omega_p = n - p \, .$$

b) Soient $\omega_1, \ldots, \omega_p$ des 1-formes linéairement indépendantes et θ une 1-forme quelconque. Alors θ est combinaison linéaire des ω_i si et seulement si

$$\ker \theta \supseteq \ker \omega_1 \cap \ldots \cap \ker \omega_p \, .$$

9) Positivité. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer que les endomorphismes

$$\Lambda^p(u) : \Lambda^p(E^*) \longrightarrow \Lambda^p(E^*)$$

sont aussi définis positifs.