Calcul Différentiel 2 **18/2/2003**
2002 - 2003

TD5: Poincaré

1) Orbites périodiques (pour champs hamiltoniens). Soit $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs autonome *admettant une intégrale première* $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞. Le flot de X sera noté φ^t. La variable dans $\mathbb{R}^n$ est $(x_1, \ldots, x_n)$.

On suppose qu'il existe une orbite périodique $\gamma(t)$ de période $T > 0$ située sur un niveau régulier $F^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$. La condition de niveau régulier signifie $dF(p) \neq 0$, $p \in F^{-1}(c)$. Soit Σ une transversale en $\gamma(0) = p_0$. On note $\tau : \Sigma' \longrightarrow \mathbb{R}$ le temps de retour sur la transversale, avec $\Sigma' \subset \Sigma$ un voisinage suffisamment petit de p_0 dans Σ. L'application de premier retour est

$$\begin{gathered}\psi : \Sigma' \longrightarrow \Sigma \\ \psi(p) = \varphi^{\tau(p)}(p)\end{gathered}$$

On suppose que la différentielle de l'application de premier retour $d\psi(p_0) : T_{p_0}\Sigma \longrightarrow T_{p_0}\Sigma$ a exactement une valeur propre égale à 1. On va montrer l'existence d'une unique famille à un paramétre d'orbites périodiques au voisinage de γ, paramétrée par les niveaux de F.

Assurez-vous que vous savez démontrer (vd. cours) l'affirmation suivante:

a) On a $d\varphi^T(p_0) \cdot X(p_0) = X(p_0)$ et, par rapport à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}X(p_0) \oplus T_{p_0}\Sigma$, on a

$$d\varphi^T(p_0) = \begin{pmatrix} 1 & & * & \\ 0 & & & \\ \vdots & & d\psi(p_0) & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

b) Prouver que le niveau régulier $F^{-1}(c)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Montrer l'existence d'un difféomorphisme $\Phi : \mathcal{V}(p_0) \longrightarrow \mathcal{V}\big((c, 0, \ldots, 0)\big)$ tel que

$$F \circ \Phi^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = x_1$$

et tel que $\Phi^{-1}(\{x_n = 0\})$ soit une transversale en p_0. Prouver que le flot de $d\Phi \cdot X$ est conjuqué par Φ au flot de X et que, par conséquent, on peut supposer d'emblée $F(x) = x_1$ et $\Sigma = \{x_n = 0\}$.

c) Montrer que $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \psi'(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ et $\mathrm{Spec}\big(\partial\psi'/\partial x_i\big)_{2 \leq i \leq n-1}$ ne contient pas 1. Montrer qu'on peut résoudre de façon unique l'équation

$$\psi'(x_1, (x_2, \ldots, x_{n-1})) = (x_2, \ldots, x_{n-1})$$

en fonction de x_1. Conclure.

d) Un exemple de champ qui admet toujours une intégrale première. Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞. Les coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n}$ sont notées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Prouver que H est une intégrale première pour l'équation différentielle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_i & = & \partial H / \partial y_i \\ & & \\ \dot{y}_i & = & -\partial H / \partial x_i \end{array} \right. , \qquad 1 \leq i \leq n$$

Les champs vectoriels de ce type sont appelés *champs hamiltoniens* et leur étude est extensive et actuelle.

2) Spectres. Soit φ_t le flot d'un champ vectoriel autonome $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On suppose $X(0) = 0$. Montrer que

$$\text{Spec } D_x \Big|_{x=0} \varphi^t(x) \;=\; \exp\big(t \text{ Spec } DX_0\big)$$

Mettre cela en relation avec les conditions d'hyperbolicité des champs de vecteurs et des difféomorphismes.