Calcul Différentiel 2 **11/2/2003**
2002 - 2003

TD4: Stabilité +

1) De nouveau Liapounov. On considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = X(x)$$

avec $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localement Lipschitz satisfaisant $X(0) = 0$. On rappelle qu'une fonction de Liapounov est de classe C^1 et vérifie $dV(x) \cdot X(x) \leq 0$.

a) (critère de stabilité) On suppose l'existence d'une fonction de Liapounov $V : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq 0$. Montrer que l'origine est stable.

b) (critère de stabilité asymptotique) On suppose toujours l'existence d'une fonction de Liapounov comme ci-dessus. Montrer que, si l'origine est un zéro isolé, alors elle est asymptotiquement stable.

2) Stabilité asymptotique d'un zéro strictement contractant. Soit $X(x)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ avec $X(0) = 0$ et Spec $dX(0) \subset P_- = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \mathfrak{Re}(\lambda) < 0\}$. On se propose de redémontrer la stabilité asymptotique de l'origine en construisant une fonction de Liapounov adaptée. Par la suite on note $A = dX(0)$.

a) De façon générale, la première fonction de Liapounov à essayer est la norme par rapport à un certain produit scalaire. Prouver que

$$V(x) = (Kx, x)$$

convient, avec K une matrice symétrique définie positive qui vérifie $KA + {}^tAK = -\text{Id}$.

b) Prouver que la formule

$$K = \int_0^\infty e^{{}^tAt} e^{At} dt$$

a un sens et définit une matrice K satisfaisant les conditions précédentes. Conclure.

c) Adapter l'argument pour montrer que l'origine n'est pas stable lorsque A est hyperbolique avec au moins une valeur propre de partie rélle > 0.

3) Un exemple. Considérons le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y - x^3 \\ \dot{y} & = & -x - 3y^3 \end{array} \right.$$

Prouver que l'origine est asymptotiquement stable.

4) Conjugaison de difféomorphismes en dimension 1. Montrer que le germe de difféomorphisme $x \longmapsto x + x^2$ n'est pas topologiquement conjugué à sa partie linéaire au voisinage de l'origine. Par contre, le germe $x \longmapsto \lambda x + x^2$, $\lambda \in]0,1[$ est bien conjugué à sa partie linéaire.

5) Conjugaison de flots.

a) *(C^2 vs. topologique)* Le flot de l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x + y^2 \\ \dot{y} & = & y \end{array} \right.$$

est topologiquement conjugué au flot de l'équation linéarisée (pourquoi?)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2x \\ \dot{y} & = & y \end{array} \right.$$

Montrer que les deux flots ne sont pourtant pas C^2-équivalents i.e. il n'existe pas de germe de difféomorphisme h défini au voisinage de l'origine tel que

$$dh_{(x,y)} \cdot X(x,y) = L(h(x,y))$$

où $X(x,y) = (2x + y^2, y)$, $L(x,y) = (2x, y)$. Quelle est la condition de *résonance* qui est responsable de ce phénomène?

b) *(un flot non-hyperbolique)* Considérons le champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ défini par

$$X(x,y) = \big(y + \varphi(x^2+y^2)x, -x + \varphi(x^2+y^2)y\big),$$

avec $\varphi : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ vérifiant $\varphi(0) = 0$. Exprimer X en coordonnées polaires et décrire avec précision son flot, les trajectoires périodiques et les ensembles ω-limite et α-limite de toute trajectoire. Construire des fonction φ telles que le flot de X ne soit pas topologiquement conjugué au flot de l'équation linéarisée. Combien de classes d'équivalence topologique arrivez-vous à construire avec de tels champs X ?

6) La suite... Dans l'exercice précédent, le lieu des zéros de φ joue un rôle clé. Prouver l'assertion suivante:

Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi^{-1}(0) = F$.

Ce résultat est valable en toute dimension! Pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}^n$, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $\varphi^{-1}(0) = F$ (Whitney). A suivre ...