Calcul Différentiel 2 **4/2/2003**
2002 - 2003

TD3: Stabilité des points d'équilibre

1) Stabilité par la méthode de Liapounov.

I) L'étude du comportement asymptotique des solutions d'une équation différentielle

$$\dot{x} = X(x), \qquad X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

amène naturellement à définir, pour un point $x \in \mathbb{R}^n$, l'*ensemble α-limite* $\alpha(x)$ et *l'ensemble ω-limite* $\omega(x)$ comme suit :

$$\alpha(x) = \bigcap_{T<0} \overline{\{\varphi_t(x) \ : \ t \leq T\}}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{T>0} \overline{\{\varphi_t(x) \ : \ t \geq T\}}$$

a) Voir que

$$\omega(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists \ t_n \to +\infty, \ \varphi_{t_n}(x) \to z\}$$
$$\alpha(x) = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists \ t_n \to -\infty, \ \varphi_{t_n}(x) \to z\}$$

b) Montrer que $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont invariants par le flot. Si la trajectoire passant par x est bornée, $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont compacts et non-vides.
c) On suppose toujours que la trajectoire par x est bornée. Montrer que $\alpha(x)$ et $\omega(x)$ sont connexes.

II) On présente ici un outil pour l'étude des problèmes de stabilité.

Définition. Une fonction $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est dite *fonction de Liapounov* pour l'équation différentielle $\dot{x} = X(x)$ si elle est décroissante le long des trajectoires i.e.

$$dV(x) \cdot X(x) \leq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

a) Démontrer le suivant théorème de Liapounov. On suppose que l'équation $\dot{x} = X(x)$ admet une fonction de Liapounov V. Tout ensemble ω-limite vérifie alors

$$\omega(x) \subset \{z \ : \ dV(z) \cdot X(z) = 0\}$$

b) Supposons maintenant $dV(z) \cdot X(z) < 0$ si $X(z) \neq 0$ et l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que $N_c = \{V \leq c\}$ soit compact. On suppose aussi que X a un unique point singulier z_0 dans N_c. Montrer que

$$\varphi_t(x) \longrightarrow z_0, \qquad x \in N_c$$

Déduire la stabilité asymptotique de z_0 sous l'hypothèse que $z_0 \in \mathrm{int}(N_c)$.

III) Une étude de stabilité: l'*équation de Van der Pol.* On considère l'équation différentielle (dite de Van der Pol)

$$\ddot{x} + a(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre. On l'étudiera sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - a(\frac{x^3}{3} - x) \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1}$$

a) Montrer que $x = y = 0$ est le seul équilibre et qu'il est instable si $a > 0$.

b) Montrer que, si $a < 0$, l'équilibre est stable. Trouver un réel $r > 0$ (qu'on prendra aussi grand que possible) tel que, si une solution $(x(t), y(t))$ vérifie

$$x(0)^2 + y(0)^2 < r^2$$

alors $(x(t), y(t)) \longrightarrow (0,0)$ quand $t \longrightarrow +\infty$. Ne pas oublier que l'énergie (qui est-elle?) est toujours un bon candidat comme fonction de Liapounov.

c) Démontrer que, pour $a > 0$, l'équation (1) possède une unique orbite périodique non-triviale. Essayer de définir une notion de stabilité pour orbites périodiques qui lui soit applicable.

Indication. Le même résultat est vrai en remplaçant le coefficient $a(x^2 - 1)$ par une fonction $f(x)$ paire, telle que $f(0) < 0$ et telle que sa primitive $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ admette un unique zéro strictement positif a et soit strictement croissante avec limite infinie pour $x \geq a$. Une courbe importante pour notre problème est $y = F(x)$ et, pour une trajectoire γ dans $\mathbb{R}^2$, on pourra regarder les points d'intersection successive avec l'axe Oy.

L'exercice suivant n'a pas à voir avec des questions de stabilité.

2) Critère de dépendance linéaire. a) Considérons n fonctions polynomiales $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'elles sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{R}$ si et seulement si le *wronskien*

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ f_1' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

est identiquement nul. On pourra montrer que les f_i vérifient toutes une même équation différentielle linéaire d'ordre $n - 1$.

b) Montrer que le même résultat est valable pour des fonctions holomorphes (les dérivées étant complexes). Par contre, le résultat n'est plus vrai dans la classe des fonctions C^∞ : trouver un contre-exemple.