Calcul Différentiel 2 **29/1/2003**
2002 - 2003

TD2: Compléments sur les équations de Sturm-Liouville

Les deux exercices qui suivent sont tirés de l'ouvrage de J. Dieudonné, Eléments d'analyse, tome 1, XI.7.

1) Asymptotique des valeurs propres.

a) On considère dans le même intervalle $I = [0, l]$ deux équations différentielles linéaires

$$y'' - q_1 y + \lambda y = 0$$
$$y'' - q_2 y + \lambda y = 0$$

avec la même condition aux limites $y(0) = y(l) = 0$. On a vu l'existence des deux suites de valeurs propres, notées $(\lambda_n^i)_{n\geq 1}$, $i = 1, 2$. Utiliser le théorème de comparaison pour montrer que, si $q_1 < q_2$, alors $\lambda_n^1 < \lambda_n^2$. De plus, si $|q_1 - q_2| \leq M$, on a $|\lambda_n^1 - \lambda_n^2| \leq M$.

b) Déduire l'existence d'une constante c telle que

$$\left|\lambda_n - \frac{n^2\pi^2}{l^2}\right| \leq c \tag{1}$$

pour tout $n \geq 1$.

2) Asymptotique des solutions propres.

a) Soit y une solution de $y'' - qy + \lambda y = 0$, $\lambda > 0$, satisfaisant $y(0) = 0$. Montrer l'existence d'une constante A (dépendant de λ) telle que

$$y(x) = A \sin\sqrt{\lambda}x \ + \ \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^x q(t)y(t)\sin\sqrt{\lambda}(x-t)dt$$

Remarquer le fait que le quotient $||y||_{L^2}^2/A^2$ est bien défini si y n'est pas identiquement nulle et dépend uniquement de λ, mais pas de y.

b) Utiliser l'inégalité de Gronwall pour obtenir une estimation sur $||y||_{C^0}$. Déduire le fait que

$$||y||_{L^2}^2/A^2 \ \stackrel{\lambda}{\longrightarrow} \ \frac{l}{2}$$

c) Soit φ_n la fonction propre normalisée par $||\varphi_n||_{L^2} = 1$, correspondant à la valeur propre λ_n du problème $y(0) = y(l) = 0$. Prouver que le coefficient A correspondant vérifie

$$A_n \stackrel{n}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

En utilisant (1), déduire l'existence de constantes C, C' telles que

$$\left|\varphi_n(x) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \sqrt{\lambda_n} x\right| \leq \frac{C}{n}$$

et

$$\left|\varphi_n'(x) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x\right| \leq C'$$

3) Période minimale pour certains champs de vecteurs.

a) Soit $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction périodique de classe C^1 et période 2π, qui vérifie $\int_0^{2\pi} x(t)dt = 0$. Montrer que

$$||x||_{L^2} \leq ||\dot{x}||_{L^2}$$

et caractériser les cas d'égalité.

b) Soit X un champ de vecteurs autonome de classe C^1 à support compact sur $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'affirmation suivante:

Pour tout $T > 0$, il existe $\delta_T > 0$ tel que, si $||X||_{C^1} \leq \delta_T$, toute orbite périodique de période plus petite que T est constante.

Autre formulation: si X est un champ de vecteurs autonome de classe C^1 avec

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |||dX_x||| \leq 1,$$

toute orbite périodique non-constante a une période au moins égale à 2π.