

TD1: Equations de Sturm-Liouville

Le présente feuille concerne des équations du type

$$u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0 \quad (1)$$

ou, de manière équivalente, du type

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

avec $P, Q, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

1) Généralités. a) Les solutions de (1) forment un espace vectoriel réel de dimension deux. Montrer que deux solutions u_1 et u_2 définies sur un même intervalle J sont linéairement indépendantes si et seulement si le *wronskien*

$$W(u_1, u_2) = u_1 u_2' - u_1' u_2$$

ne s'annule pas sur J .

b) Deux solutions linéairement indépendantes de (1) ne peuvent pas avoir de zéro commun.

c) Utilisez un changement de variable de la forme $u(x) = y(x)\varphi(x)$ pour montrer l'équivalence de toute équation du type (1) avec une équation du type (2).

2) Une étude qualitative ou cos et sin revisités. On se propose de dire le plus de choses possibles sur les solutions de l'équation ci-dessous, *en supposant ne pas connaître leur forme explicite.*

$$y'' + y = 0$$

a) Soit $y = s(x)$ la solution vérifiant $s(0) = 0, s'(0) = 1$. Montrer l'existence de

$$m = \min\{x > 0 : s'(x) = 0\}$$

$$p = \min\{x > 0 : s(x) = 0\}$$

et prouver que $m < p$.

b) Prouver que le graphe de s au dessus du segment $[0, p]$ est symétrique par rapport à la droite $x = m$. En déduire que $m = p/2$ et $s'(p) = -1$.

c) Montrer que le graphe de s sur $[0, 2p]$ est symétrique par rapport au point $(p, 0)$. Déduire que s est périodique de période $2p$.

d) Soit $c(x)$ la solution vérifiant $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$. Montrer que $s' = c$, $c' = -s$ et déduire la périodicité de c . Prouver que

$$c^2 + s^2 = 1$$

e) Déterminer toutes les relations trigonométriques entre s et c , comme par exemple $s(x + x') = s(x)c(x') + c(x)s(x')$, $c(x) = s(x + \frac{\pi}{2})$ etc.

Conclusion. On pourra prendre s , c , p comme définitions pour \sin , \cos , π et toutes les propriétés auront été déduites par des méthodes d'analyse qualitative d'une équation du type (2). Certaines propriétés typiques, comme par exemple le caractère oscillatoire, se maintiendront pour une équation (2) générale sous des hypothèses sur q qu'on explicite par la suite.

3) Oscillations. a) On suppose $q < 0$. Montrer que toute solution non-identiquement nulle de (2) a au plus un zéro.

b) On suppose $q > 0$ et $\int_1^{+\infty} q(x)dx = +\infty$. Montrer que toute solution de (2) a une infinité de zéros. On pourra considérer $v = -y'/y$.

c) Montrer que toute solution de (2) non-identiquement nulle admet un nombre fini de zéros sur tout intervalle compact.

d) Soient y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2). Montrer qu'entre deux zéros successifs de y_1 il y a exactement un zéro de y_2 .

e) (**comparaison des oscillations**) Soit y une solution de (2) et z une solution de

$$z'' + r(x)z = 0$$

On suppose $q > r$. Montrer que y s'annule au moins une fois entre deux zéros successifs de z .

*Exemple: équation de Bessel*¹. Soit u une solution de l'équation de Bessel

$$x^2 u'' + xu' + (x^2 - p^2)u = 0, \quad p \in \mathbb{R}_+$$

Montrer que la forme réduite de l'équation est

$$y'' + \left(1 + \frac{1 - 4p^2}{4x^2}\right)y = 0$$

A l'aide du résultat de comparaison ci-dessus montrer que:

- si $0 \leq p < \frac{1}{2}$, tout intervalle de longueur π contient au moins un zéro de u ;

1. Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), astronome allemand et ami intime de Gauss. Il fut le premier homme à mesurer la distance à une étoile fixe et découvrit que Sirius, l'étoile la plus brillante du firmament, possède une étoile jumelle. Les équations de Bessel apparaissent naturellement lorsqu'on résoud en coordonnées polaires en séparant les variables l'équation des ondes (planaires)

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad a > 0$$

- si $p = \frac{1}{2}$, les zéros de u sont espacés de π ;
- si $p > \frac{1}{2}$, tout intervalle de longueur π contient au plus un zéro de u .

4) Modes propres. a) On suppose l'existence de $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $0 < m^2 < q(x) < M^2$. Montrer que deux zéros successifs x_1 et x_2 vérifient

$$\frac{\pi}{M} < |x_2 - x_1| < \frac{\pi}{m}$$

b) On suppose maintenant $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, q > 0$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation

$$y'' + \lambda q(x)y = 0 \tag{3}$$

lorsque λ est un paramètre réel. Soit y_λ la solution vérifiant $y_\lambda(a) = 0, y'_\lambda(a) = 1$.

Remarque: Le fait d'imposer $y'_\lambda(a) = 1$ a comme effet d'opérer un choix parmi la droite des solutions qui s'annulent en a .

Montrer l'existence d'une suite $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ avec $\lambda_n \xrightarrow{n} +\infty$ et telle que $y_\lambda(b) = 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda_n$. Montrer que y_{λ_n} a exactement $n - 1$ zéros à l'intérieur de l'intervalle $[a, b]$. On pourra remarquer la dépendance continue du n -ième zéro de y_λ par rapport à λ .

c) Soient $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, p, q > 0, p$ de classe C^1 et q continue. On considère le problème aux limites

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda q(x)y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

Utiliser le changement de variable $w(x) = \int_a^x \frac{dt}{p(t)}$ pour trouver une équation équivalente de la forme (3) et montrer que les paramètres pour lesquels on a une solution non-triviale constituent une suite strictement croissante $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs, allant vers $+\infty$. La solution non-triviale y_n correspondant à chaque λ_n est unique à une constante multiplicative près et a exactement $n - 1$ zéros dans $]a, b[$.

Prouver la relation "d'orthogonalité"

$$\int_a^b qy_m y_n = 0, \quad m \neq n$$

Application: L'oscillation d'une corde élastique dont les bouts sont fixés est décrite par l'équation uni-dimensionnelle des ondes

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

avec m la densité de masse le long de la corde. Chercher une solution y à variables séparées pour faire apparaître un problème du type (3). Le fait que les λ pour lesquels (3) admet une solution non-triviale forment un ensemble discret rend compte de la présence de "noeuds" au cours de la vibration.

5) **La suite.** L'autre problème de valeurs propres important est

$$y'' + q(x)y + \lambda y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On démontrera dans le TD prochain un résultat similaire. Voir en avance J. Dieudonné, Fondements de l'analyse moderne vol.1, XI.7.

