TD Calcul Différentiel 2 (Alexandru Oancea) **15/4/2003**
2002 - 2003 ENS Lyon

TD10: Exercices supplémentaires sur l'intégration des formes différentielles

Les trois premiers exercices sont tirés du livre de H. Cartan, "Formes différentielles".

1) Décomposabilité et différentielle extérieure. Soit

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

une forme différentielle de classe C^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. On suppose que ω ne s'annule pas dans U.

a) Montrer qu'au voisinage de chaque point de U il existe des couples de fonctions u, v telles que

$$du \wedge \omega = 0, \qquad dv \wedge \omega = 0, \qquad du \wedge dv \neq 0$$

et montrer que si u, v est un tel couple, il existe une fonction λ telle que

$$\omega = \lambda du \wedge dv\,.$$

En déduire qu'il existe, au voisinage de chaque point de U, deux fonctions numériques g, h telles que $\omega = dg \wedge dh$ si et seulement si $d\omega = 0$.

b) Soit f une fonction de classe C^1 définie dans U dont le gradient ne s'annule pas. Pour $a \in \mathbb{R}$, soit $V_a = f^{-1}(a)$. Montrer que la relation $df \wedge \omega = 0$ entraine $\int_{V_a \cap \Omega} \omega = 0$ quels que soient $a \in \mathrm{Im}(f)$ et Ω suffisamment petit. Réciproque?

2) Symétries. Etant données des constantes $a, b, c \in \mathbb{R}$ déterminer les transformations linéaires de $\mathbb{R}^3$ qui préservent la forme différentielle

$$\omega = ady \wedge dz + bdz \wedge dx + cdx \wedge dy\,.$$

3) Un calcul. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme différentielle

$$\omega = xdy \wedge dz - 2zf(y)dx \wedge dy + yf(y)dz \wedge dx\,,$$

où f est une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$.

a) Déterminer f pour que $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Pour ce choix de f, calculer l'intégrale $\int_S \omega$, où S désigne la calotte sphérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq \sqrt{2}/2$$

orientée de telle sorte que la normale soit dirigée vers l'extérieur de la sphère.

b) Déterminer f pour que $d\omega = 0$ et, pour ce choix de f, reprendre le calcul de l'intégrale.

c) Déterminer f pour qu'il existe une forme $\omega_1 = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$ avec

$$P(x, y, 0) = Q(x, y, 0) = 0$$

et $d\omega_1 = \omega$. Calculer alors $\int_C \omega_1$, où C est la circonférence

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z = \sqrt{2}/2$$

orientée de façon à être le bord orienté de S.

4) Formules intégrales via Stokes.

a) *(flux = divergence)* Soit D un domaine à bord régulier dans $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $\mathbb{R}^3$ sont notées x_1, x_2, x_3. Pour un champ de vecteurs $X = (X_1, X_2, X_3)$ défini au voisinage de $\overline{D}$, la divergence est

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^{3} \partial X_i / \partial x_i \,.$$

Soit n un champ normal unitaire continu sur ∂D et posons $\sigma = n \rfloor (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$. Montrer que

$$\int_{\partial D} \langle X, n \rangle \sigma = \int_D \operatorname{div}(X) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

b) *(circulation = flux du rotationnel)* Soit S une surface plongée et orientée dans $\mathbb{R}^3$ et $\Omega \subset S$ un domaine à bord sur S. Soit n un champ normal unitaire continu le long de S. On pose $\sigma = n \rfloor (dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$. Soit X un champ de vecteurs défini sur un voisinage de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^3$. On définit le rotationnel comme

$$\operatorname{Rot}(X) = * dX^\sharp, \qquad * : \Lambda^2(\mathbb{R}^{3^*}) \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$$

ou encore

$$\operatorname{Rot}(X) = (\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}) e_1 + (\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}) e_2 + (\frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2}) e_3 \,,$$

avec e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que

$$\int_{\partial \Omega} X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 = \int_\Omega \langle \operatorname{Rot}(X), n \rangle \sigma$$

c) Mêmes notations que dans a). Soient u, v deux fonctions de classe C^2 définies au voisinage de $\overline{D}$. On pose

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = du_x(n(x)), \quad x \in \partial D \,.$$

Montrer que

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} (u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}) \sigma \,,$$

$$\int_D \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_D u \Delta v dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} \sigma \,.$$

5) Homéomorphismes. *Cet exercice n'a pas de rapport avec le thème du jour et tient plutôt à la matière du premier semestre. Mais il est joli. Il est tiré du livre de H. Sato, "Algebraic topology: an intuitive approach", AMS 1999.*

Classifier selon leur type d'homéomorphisme les lettres majuscules de la police sans-serif:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z