TD Calcul Différentiel 2 (Alexandru Oancea) **8/4/2003**
2002 - 2003 ENS Lyon

TD9: Intégration des formes différentielles

1) Boules et sphères. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \qquad r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 .$$

On pose

$$\alpha = rdr = x_1 dx_1 + \ldots + x_n dx_n ,$$

$$\sigma = *\alpha .$$

a) Montrer que σ est invariante par rotations.

b) Montrer que $d\sigma = n\omega$, $\sigma = x \rfloor \omega$. Déduisez le fait que $\mathrm{vol}(D^n) = \frac{1}{n}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$, où $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| \leq 1\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| = 1\}$.

c) On considère la projection $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $x \longmapsto x/r$. Montrer que

$$\pi^*\sigma = \frac{\sigma}{r^n}$$

et retrouver le fait que $d(\sigma/r^n) = 0$.

Le point suivant est à mettre en relation avec l'exercice 2), puisqu'on travaille avec $dt \wedge \sigma$, un produit extérieur de formes définies sur des espaces différents, qui désigne une forme sur le produit de ces espaces.

d) (intégration en coordonnés polaires) Montrer que $\alpha \wedge *\alpha = r^2\omega = |\alpha|^2\omega$. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow]0, \infty[\times \mathbb{S}^{n-1} ,$$

$$x \longmapsto \left(r, \frac{x}{r}\right) .$$

On note t la coordonnée sur $]0, \infty[$. Prouver que $\omega = f^*\big(t^{n-1}dt \wedge \sigma\big)$. Déduire, pour une fonction $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, la formule

$$\int_{D^n(R)} h(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \int_0^R t^{n-1} \Big(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} h(tp)\sigma(p) \Big) dt$$

et, en particulier,

$$\mathrm{vol}(D^n(R)) = \int_0^R t^{n-1} dt \cdot \mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1}) .$$

Retrouver le fait que $\mathrm{vol}(D^n) = \frac{1}{n}\mathrm{vol}(\mathbb{S}^{n-1})$.

2) Fubini. On considère $M^m \subset \mathbb{R}^k$, $N^n \subset \mathbb{R}^l$ deux sous-variétés compactes sans bord, munies de formes de degré maximal $\alpha \in \Omega^m(\mathbb{R}^{k*})$, $\beta \in \Omega^n(\mathbb{R}^{l*})$. Leur produit $M \times N$ est une sous-variété de dimension $m+n$ de $\mathbb{R}^{k+l}$. Soient π_M, π_N les projections sur les facteurs correspondants. On note

$$\alpha \wedge \beta = \pi_M^* \alpha \wedge \pi_N^* \beta \ \in \ \Omega^{m+n}(\mathbb{R}^{k+l^*})$$

Prouver que

$$\int_{M \times N} \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \int_N \beta \, .$$

3) Formes volume. a) Soit $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une hypersurface compacte orientée et ν un champ qui prolonge le champ normal orienté. On définit

$$\sigma = i^*\big(\nu \rfloor dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n\big) \, .$$

Montrer que σ ne dépend pas du choix du prolongement ν. Evaluer σ sur un repère orthonormé direct dans $T_x M$, $x \in M$. Que se passe-t-il si l'on change d'orientation sur M ?

On dit que σ est une *forme volume*. On note $\mathrm{vol}(M) = \int_M \sigma$.

b) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ une application de la forme

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \, ,$$

avec $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Prouver que l'image de φ détermine une hypersurface de $\mathbb{R}^{n+1}$, qu'on peut orienter de façon naturelle. Soit σ la forme volume associée. Prouver que

$$\varphi^* \sigma = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 + 1} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et récupérer les formules de calcul des aires et longueurs déjà connues.

4) Le volume est donné par le déterminant. Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ une courbe (différentiable) simple orientée. Prouver qu'il existe une configuration de quatre points sur la courbe qui soient coplanaires et qui divisent la courbe en quatre bouts de mêmes longueurs.

5) Domaines à bord. Avec la définition du cours pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à bord, utiliser une partition de l'unité pour montrer que tout tel domaine peut s'écrire comme $\Omega = \{f \leq 0\}$ avec $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\partial\Omega = f^{-1}(0)$ soit un niveau régulier.