Calcul différentiel 1
2002 - 2003

Correction de l'exercice 9a) du TD1

Hypothèses: X, Y espaces métriques, X complet. Suite $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq C(X, Y)$ de fonction continues convergeant simplement vers f.

Conclusion: L'ensemble des points de continuité de f contient un G_δ et, par le théorème de Baire, est dense.

Indication: Considérer

$$U_{m,k} = \bigcup_{n\geq m} \{x \ : \ d(f_n(x), f_m(x)) > \frac{1}{k}\}, \qquad m, k \in \mathbb{N}^*$$

Le premier reflexe qu'il faut avoir est d'écrire qu'est-ce que l'ensemble des points de continuité de f.

$$\mathrm{Cont}(f) = \bigcap_{k\geq 1} \ \{y \ : \ \exists\, \delta,\ d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{k}\}$$

Comme nous avons des informations de continuité uniquement sur les f_n, on peut soit tenter de décrire *exactement* $\mathrm{Cont}(f)$ en termes de (f_n), soit du moins en exhiber une partie qui est un G_δ (ou en contient un) et qui, elle, s'écrit en termes de (f_n). La première idée n'est pas réaliste, les informations qu'on a sont trop pauvres. Par contre, la deuxième a une chance de marcher: exhiber des parties de $\mathrm{Cont}(f)$ revient à trouver des propriétés de points y qui entrainent (sans en être équivalentes) la continuité de f en ces points.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cont}(f) &= \bigcap_{k\geq 1} \ \{y \ : \ \exists\, \delta,\ d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{k}\} \\
&\supseteq \bigcap_{k\geq 1} \ \{y \ : \ \exists\, m,\ \exists\, \delta,\ d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ \left| \begin{array}{l} d(f(x), f_m(x)) \leq 1/k \\ d(f_m(x), f_m(y)) \leq 1/k \quad \text{ceci est superflu!} \end{array} \right. \} \\
&\supseteq \bigcap_{k\geq 1} \ \{y \ : \ \exists\, m,\ \exists\, \delta,\ d(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ \forall\, n \geq m,\ d(f_n(x), f_m(x)) \leq 1/k\} \\
&= \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} \ \mathrm{int}\left(\bigcap_{n\geq m} \{x \ : \ d(f_n(x), f_m(x)) \leq 1/k\}\right) \\
&= {}^c\Big(\bigcup_k \bigcap_m \overline{U_{m,k}}\Big) \ \overset{\text{not.}}{=} \ G
\end{aligned}$$

On a utilisé ci-dessus ${}^c\overline{A} = \mathrm{int}({}^cA)$. Il suffit maintenant de montrer que, pour k fixé, $\cap_m \bar{U}_{m,k}$ est contenu dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Alors G contiendra un G_δ et il en sera de même pour $\mathrm{Cont}(f)$.

Je vous suggère à ce point de chercher la fin de la solution par vous mêmes.

Suite de la solution.

Chaque $U_{m,k}$ est un ouvert. En effet, pour n et m fixés, l'ensemble $\{x \ : \ d(f_n(x),\, f_m(x)) > 1/k\}$ peut s'écrire comme $F^{-1}\big(\,]1/k,\, +\infty[\,\big)$ avec F la fonction continue composée

$$X \xrightarrow{\text{diag}} X \times X \xrightarrow{(f_n, f_m)} Y \times Y \xrightarrow{d} \mathbb{R}_+$$

D'un autre côté, la *convergence simple* de la suite (f_n) entraine

$$\bigcap_{m \geq 1} U_{m,k} = \emptyset$$

Un point appartient alors à $\cap_m \bar{U}_{m,k}$ uniquement s'il vit dans une frontière $\bar{U}_{m,k} \setminus U_{m,k}$:

$$\bigcap_{m \geq 1} \bar{U}_{m,k} \ \subset \ \bigcup_{m \geq 1} \Big(\bar{U}_{m,k} \setminus U_{m,k}\Big)$$

Comme chaque $\bar{U}_{m,k} \setminus U_{m,k}$ est un fermé (car $U_{m,k}$ ouvert) d'intérieur vide (de façon générale, la frontière de tout ensemble est d'intérieur vide), cela achève la preuve.

$\square$