Calcul Différentiel 1 **7/1/2003**
2002 - 2003

TD9: Equations différentielles

Nous nous intéressons dans ce qui suit à quelques **résultats de comparaison** de solutions d'équations différentielles. Le **lemme de Gronwall** sera notre outil favori.

1) (Lemme de Gronwall classique)

a) Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue satisfaisant

$$\varphi(t) \leq A + \int_{t_0}^{t} u(s)\varphi(s)ds$$

avec $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $t_0 \in I$. Montrer que φ vérifie l'estimation

$$\varphi(t) \leq Ae^{\int_{t_0}^{t} u(s)ds}$$

Qu'est-ce qu'on peut dire sur φ lorsque $A = 0$?

b) Soit $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs localement Lipschitz par rapport à la deuxième variable. On suppose l'existence de fonctions continues $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telles que X vérifie

$$\| X(t,x) \| \leq a(t) \| x \| + b(t)$$

Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x)$$

est globalement définie. Application: toute équation linéaire admet des solutions globales.

2) (Lemme de Gronwall amélioré - cf. cours)

a) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Ecrire les solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dr}{dt} = f(r(t)) \tag{1}$$

b) (petit détour) On suppose

$$\int_A^{+\infty} \frac{dr}{f(r)} < +\infty$$

Montrer que toute solution $r :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de l'équation (1) telle que $r(t_0) \geq A$ vérifie $b < +\infty$.

c) Soient $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, $\varphi :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui vérifie

$$\varphi' \leq F(\varphi)$$

et $r :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une solution de l'équation

$$r' = F(r)$$

Soit $t_0 \in]a,b[$. On suppose que

$$\varphi(t_0) \leq r(t_0)$$

A l'aide du point 2a) montrer que

$$\varphi(t) \leq r(t), \quad t \in [t_0, b[$$

d) (lemme Gronwall - cours) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue et $r :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation (1). Si $x :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie

$$||x'(t)|| \leq f(||x(t)||)$$

$$||x(t_0)|| \leq r(t_0)$$

avec $t_0 \in]a,b[$ fixé, alors

$$||x(t)|| \leq r(t), \quad t \geq t_0$$

On pourra considérer $\varphi(t) = ||x(t)||^2$.

e) Application (cours). X est un champ de vecteurs localement Lipschitz sur $\mathbb{R}^n$ et $f : [A, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, avec $A > 0$. On suppose

$$||x|| \geq A \Rightarrow ||X(x)|| \leq f(||x||)$$

$$\int_A^{+\infty} \frac{dr}{f(r)} = +\infty$$

Montrer que X est complet. Comparer avec 1b).