

TD8: Equations différentielles

1. Difféomorphismes et flots. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre de classe C^2 . Le gradient $\nabla f(x)$ de f au point $x \in \mathbb{R}^n$ est l'unique vecteur qui vérifie

$$Df_x(X) = \langle \nabla f(x), X \rangle, \quad X \in \mathbb{R}^n$$

- a) Ecrivez $\nabla f(x)$ en coordonnées.
- b) Montrez que f est croissante le long des trajectoires de l'équation différentielle

$$\dot{x} = \nabla f(x)$$

Quelles sont les trajectoires périodiques de l'équation?

On appelle *valeur régulière* de f tout nombre $y \in \mathbb{R}$ avec la propriété

$$Df_x \neq 0, \quad x \in f^{-1}(y)$$

ou, de façon équivalente,

$$\nabla f(x) \neq 0, \quad x \in f^{-1}(y)$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ tels que l'intervalle $[a, b]$ contient uniquement des valeurs régulières.

c) Montrer que toute trajectoire issue de $f^{-1}(a)$ touche $f^{-1}(b)$ en temps fini, uniformément borné en fonction de la condition initiale sur $f^{-1}(a)$.

d) En construisant une reparamétrisation convenable du champ de gradient prouver que les ouverts $\{f < a\}$ et $\{f < b\}$ sont difféomorphes.

2. Autres.

a) Soit X un champ de vecteurs à support compact sur \mathbb{R}^n . Montrer que son flot est défini pour tout temps réel.

b) Montrer que tout ouvert de \mathbb{R}^n est connexe par arcs si et seulement si il est connexe par arcs de classe C^1 .

3. Système proie-prédateur élémentaire.

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - by) \\ \dot{y} = y(dx - c) \end{cases}$$

avec a, b, c, d des réels strictement positifs. On suppose également $x(0), y(0)$ strictement positifs.

a) Justifier l'intitulé de l'exercice. Qui sont les lapins et qui sont les renards?

b) Montrer que $V(x, y) = xye^{-(x+y)}$ est une intégrale première du système i.e. V est constante le long des trajectoires. En déduire que la solution est définie sur \mathbb{R} , reste dans le cadran positif et est bornée.

c) Dessiner schématiquement le champ de vecteurs associé à l'équation. Prouver que toute solution est périodique.

Indication: prendre par exemple $x_0 \in [0, c/d]$ et $y_0 \in [0, a/b]$ et montrer l'existence de $t_1 < t_2$ tels que $x(t_1) = x(t_2) = c/d$, $y(t_1), y(t_2) \in [0, a/b]$. On pourra ensuite utiliser l'intégrale première

d) Quelles sont les valeurs moyennes de x et y sur une période?

e) Un chasseur maniaque entre dans la forêt: à chaque fois qu'il voit un animal, il lui tire dessus. Comment cela perturbe-t-il le système et qui en tirera profit?

4- Méthode des séries majorantes.

Considérons une équation différentielle du type

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

où F est une fonction analytique en deux variables réelles x et y . Il s'agit ici de démontrer que les solutions sont des fonctions analytiques de x .

Nous supposons que F est définie au voisinage de $(x, y) = (0, 0)$ et que son développement en série entière est de la forme

$$F(x, y) = \sum_{k,l} F_{k,l} x^k y^l.$$

1) Problème formel. Démontrer qu'il existe une solution formelle $y = \sum_{n>0} y_n x^n$ unique et que les coefficients sont des fonctions polynomiales

$$y_n = y_n(F_{k,l}, k, l \leq n)$$

dont les coefficients sont des entiers positifs.

2) Soit $G = \sum_{k,l} G_{k,l} x^k y^l$ une fonction analytique dont les coefficients sont positifs et vérifient $|F_{k,l}| \leq G_{k,l}$. Soit $z = \sum_{n>0} z_n x^n$ une solution de l'équation

$$\frac{dz}{dx} = G(x, z).$$

Montrer que $|y_n| \leq z_n$.

3) En déduire le résultat en considérant une fonction G de la forme

$$G(x, y) = \sum_{k,l} \alpha^k \beta^l x^k y^l.$$

4) Équation différentielle à paramètre. Que dire des solutions $y = y(t, x)$ d'une équation

$$\frac{dy}{dx} = F(t, x, y), \quad y(t, 0) = 0,$$

où F est une fonction analytique de trois variables, définie au voisinage de $(t, x, y) = (0, 0, 0)$.

5- Équations de Riccati. Cet exercice est consacré à l'étude des équations de Riccati

$$(R) \quad \frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x).$$

où A, B et C sont des fonctions continues à valeurs réelles, définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

1) Équations linéaires du premier ordre à deux variables. Considérons une équation linéaire du premier ordre de la forme

$$(L) \quad \frac{dz}{dx} = M(x)z,$$

où $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ et où M est une matrice 2×2 , dépendant continûment du paramètre x .

Montrer que si z est une solution de l'équation (L) alors $y = z_2/z_1$ est une solution d'une équation de Riccati que l'on explicitera.

2) Soient x_0 et x_1 des points de l'intervalle I . Démontrer que l'ensemble des réels y_0 pour lesquels il existe une solution y de l'équation (R) définie sur un intervalle ouvert $J \supset [x_0, x_1]$ et vérifiant $y(x_0) = y_0$ est un ouvert de \mathbb{R} . On appelle *la monodromie* la fonction qui à y_0 associe $y_1 = y(x_1)$. Montrer que les transformations de monodromie sont des homographies.