Calcul Différentiel 1 **3/12/2002**
2002 - 2003

TD7: Différentiabilité +

1- Transformée de Legendre.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, strictement convexe et telle que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{||x||} = +\infty.$$

1) Montrer que ∇f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
2) Soit $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f^*(z) =< x, z > -f(x)$, où $x = \nabla^{-1}(z)$. Montrer que

$$f^*(z) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n}(< y, z > -f(y)).$$

3) Montrer que f^* est de classe C^1 et que $\nabla f^* = (\nabla f)^{-1}$.

2- Une application du théorème des fonctions implicites en dimension infinie.
Une matrice $A \in \mathbb{S}L(2, \mathbb{Z})$ est dite *hyperbolique* si elle a deux valeurs propres réelles $0 < \lambda_- < 1$ et $\lambda_+ > 1$. Un exemple est la matrice de Thom

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice hyperbolique induit une transformation du tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans lui-même. Le but de cet exercice est de démontrer que si l'on perturbe cette transformation dans la topologie C^1 elle lui est conjuguée par un homéomorphisme (Théorème d'Arnold-Moser).

Pour cela, introduisons l'espace E des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifiant $f(x + n) = f(x) + A(n)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}^2$. Remarquez que E est un espace affine qu'on munit de la distance

$$d_1(f_1, f_2) = |f_1 - f_2|_{C^1}.$$

Introduisons aussi l'espace F des applications continues $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $h(x+n) = x + n$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{Z}^2$. C'est aussi un espace affine qu'on munit de la distance

$$d_0(h_1, h_2) = |h_1 - h_2|_{C^0}.$$

1) Démontrer que la fonctionnelle $Q : (f, h) \in E \times F \to f \circ h - h \circ A \in C^0_{per}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est C^1.

2) En appliquant le théorème des fonctions implicites, montrer qu'il existe des réels $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ tels que si $d_1(f, A) < \delta$ alors il existe un unique $h \in F$ tel que $d_0(h, id) < \epsilon$ et

$$f \circ h = h \circ A.$$

3) Prouver que h est un homéomorphisme. *Injectivité: si $h(x) = h(y)$ alors $h(A^k x) = h(A^k y)$, $k \in \mathbb{Z}$. Surjectivité: utiliser la périodicité de h.*

3- Le théorème de Morse

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^{k+2} $(k \geq 1)$ et 0 un point critique de g où la deuxième dérivée de f est définie positive. Montrer qu'il existe un homéomorphisme φ local C^k tel que

$$f(\varphi(x)) = |x|^2$$

On pourra commencer par établir l'existence d'une fonction C^k g d'un voisinage de 0 dans l'espace des endomorphismes symétriques telle que

$$f(x) = (g(x) \cdot x, x)$$

avec une formule intégrale.

4- Fonctions localement injectives

Soit f une application localement injective de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble des points où la dérivée de f est injective est un ouvert dense de $\mathbb{R}^m$.