Calcul différentiel 1 **26/11/2002**
2002 - 2003

TD6: Fonctions implicites

1) Démontrer de nouveau le théorème d'inversion locale.

2) Théorème d'inversion globale de Hadamard. Soient E, F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application de classe C^1 telle que df_x est inversible pour tout $x \in E$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$||df_x^{-1}|| \leq C, \qquad x \in E$$

On se propose de démontrer que f est un difféomorphisme global.

I) On montre que f est surjective. Soit $y_0 \in f(E)$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow F$ un chemin arbitraire de classe C^1 tel que $\gamma(0) = y_0$. Soit $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$. Démontrons que γ se relève de façon unique en un chemin $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow E$ de classe C^1 qui vérifie $f \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ et $\widetilde{\gamma}(0) = x_0$.

a) Soient $\widetilde{\gamma}_i : [0, t_i] \longrightarrow E$, $i = 1, 2$ deux relèvements tels que $\widetilde{\gamma}_i(0) = x_0$. Montrer qu'ils coïncident sur leur domaine de définition commun.

b) Déduire le résultat en montrant que l'ensemble

$$\{t \in [0,1] \ : \ \text{ il existe un relèvement défini sur l'intervalle } [0,t] \ \}$$

est un ouvert fermé non-vide.

II) On montre que f est injective.

a) Montrer l'existence d'une application $g : F \longrightarrow E$ de classe C^1 vérifiant $g(y_0) = x_0$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

b) Montrer que toute fibre $f^{-1}(y)$, $y \in F$ est réduite à un point. On pourra considérer un chemin qui relie deux points d'une même fibre.

3) Un autre théorème d'inversion globale. On dit qu'une application continue est *propre* si l'image réciproque d'un compact est un compact. Prouver qu'un difféomorphisme local entre deux espaces de Banach qui est propre est un difféomorphisme global.

4) Exemples. Donner des exemples de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui ne soient pas globaux. Pouvez-vous en trouver des exemples surjectifs?