Calcul différentiel 1 **22/10/2002**
2002 - 2003

TD4: Homéomorphismes & Co.

1) Est-ce que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big) \cap]0,1[$ sont homéomorphes?

2) Théorème du graphe fermé.
a) Soient X et Y deux espaces topologiques compacts. Montrer qu'une fonction $f : X \longrightarrow Y$ est continue si et seulement si son graphe

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \,:\, x \in X\} \subset X \times Y$$

est fermé dans $X \times Y$.
b) Montrer que l'hypothèse de compacité est nécessaire tant pour X que pour Y.
c) Soient E et F deux espaces de Banach. Montrer qu'une application *linéaire* de E dans F est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

3) Connexité. Soient X et Y deux espaces topologiques compacts et séparés. On considère une application continue $f : X \longrightarrow Y$ avec la propriété que toutes les fibres $f^{-1}(y)$, $y \in Y$ sont connexes. Montrer que $f^{-1}(A)$ est connexe pour tout connexe $A \subset Y$.
Montrer que l'hypothèse de séparation sur Y est nécessaire.

4) Topologie dans un espace de fonctions. Considérons l'espace $E = C\big([0,1],[0,1]\big)$ muni de la norme uniforme $||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Soient

$$A_i = \{f \in E \,:\, f \text{ injective}\}$$

$$A_s = \{f \in E \,:\, f \text{ surjective}\}$$

$$A_b = \{f \in E \,:\, f \text{ bijective}\}$$

a) Justifier le fait que E est un espace métrique complet. Est-il compact?
b) Déterminer les fermetures de A_i, A_s et A_b.
c) Déterminer le nombre de composantes connexes des $A_{i,s,b}$ ainsi que de leur fermetures.

5) Des G_δ. Démontrer qu'un ensemble dénombrable dans un espace métrique complet sans points isolés ne peut pas être un G_δ.
Déduire que les entiers algébriques ne contiennent pas de G_δ.

6) Une courbe de l'espace est génériquement injective. Soit E l'espace des chemins continus $c : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, muni de la norme uniforme. On se propose de montrer que l'ensemble des chemins injectifs forment un G_δ-dense.

a) Soit $\epsilon > 0$ et O_ϵ l'ensemble des chemins c tels que si $|x-y| \geq \epsilon$ alors $c(x) \neq c(y)$. Démontrer que O_ϵ est un ouvert de E.

b) Un chemin est affine par morceaux s'il existe une subdivision $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ de $[0,1]$ telle que c est affine sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Montrer que l'ensemble des chemins affines par morceaux est dense dans E.

c) Montrer que l'ensemble des chemins affines par morceaux et *injectifs* est dense dans E. (On pourra utiliser le fait que R^3 privé d'un nombre fini de droites affines est un ouvert dense)

d) En déduire le résultat. Que dire des *lacets* $c : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$?

7) Quelques homéomorphismes classiques.

a) Démontrer que la boule euclidienne $B = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < 1\} \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

b) Démontrer qu'un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la boule B.

c) Démontrer que $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, où $\mathbb{S}^n$ est la sphère unité $\{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1\}$.

8) Le tore. Donner une équation paramétrique du tore $T \subset \mathbb{R}^3$ dans la figure 1. Démontrer que T est homéomorphe à $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. (On pourra se rappeler du résultat suivant : une application $f : X \to Y$ continue et bijective d'un espace compact X dans un espace séparé Y est un homéomorphisme.)

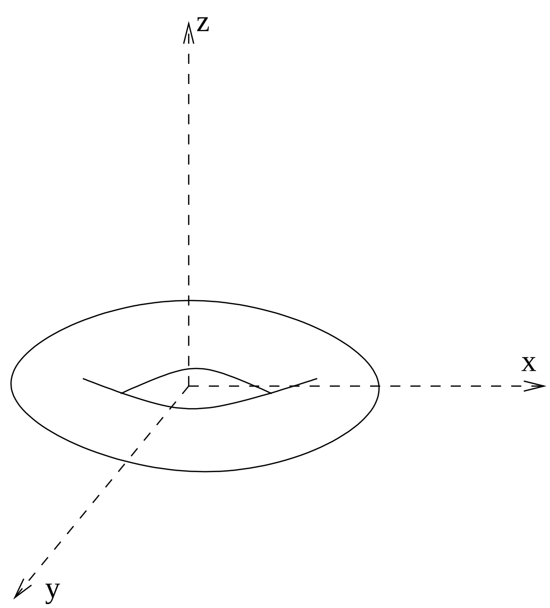

FIG. 1 – *Tore plongé dans* $\mathbb{R}^3$

9) Conjugaison. On dit que deux homéomorphismes $h_i : X_i \to X_i$, $i = 1, 2$ sont *conjugués* s'il existe un homéomorphisme $g : X_1 \to X_2$ tel que $g \circ h_1 = h_2 \circ g$. On se propose de montrer qu'un homéomorphisme h de $\mathbb{R}$ sans points fixes est conjugué à une translation.

a) Montrer que soit $h > \mathrm{id}$, soit $h < \mathrm{id}$. Dans le reste de l'exercice on supposera que $h > \mathrm{id}$, quitte à considérer h^{-1}.

b) Montrer que pour tout point x de $\mathbb{R}$, la suite $h^n(x)$ tend vers $\pm\infty$ si n tend vers $\pm\infty$.

c) Fixons un point x_0 de $\mathbb{R}$ et un homéomorphisme $g : [x_0, h(x_0)] \to [0, 1]$. Construire un prolongement $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de g vérifiant $\tilde{g} \circ h = \tilde{g} + 1$ par récurrence sur chaque intervalle $[h^n(x_0), h^{n+1}(x_0)]$. En déduire le résultat.

10) Et à la fin on s'amuse. Est-il possible de retourner par un mouvement continu une droite affine orientée dans $\mathbb{R}^2$ sans qu'elle soit jamais tangente à un cercle donné?