Calcul différentiel 1 **15/10/2002**
2002 - 2003

TD3: Compacité, connexité. Topologies quotients.

Topologies quotients. Soit X un espace topologique et $\pi : X \to Y$ une application à valeurs dans un ensemble Y. La topologie *quotient* sur Y est la plus petite topologie rendant l'application π continue.

1) Quels sont les ouverts de Y?

Cet exercice est consacré à la description de plusieurs exemples d'espaces topologiques obtenus comme quotient.

Première partie : groupes discrets.

Soit X un espace topologique et $G \times X \to X$ une action de G sur X par homéomorphismes. Soit $G \setminus X$ l'espace quotient, dont les éléments sont les orbites de G.

2) Décrire les quotients de $\mathbb{C}$ par un sous-groupe discret de translations et trouver des métriques sur le quotient.

3) Démontrer que l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^2$ peut être interprété comme un quotient (On pourra considérer les droites affines orientées de $\mathbb{R}^2$).
Réaliser ce quotient comme une surface de $\mathbb{R}^3$, appelée *bande de Möbius*. Que se passe-t-il si l'on coupe la bande de Möebius au milieu? Et au tiers?

Deuxième partie : les grassmaniennes.

L'ensemble des k-plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est noté $G(k,n)$. On l'appelle *variété de Grassmann* ou encore *grassmannienne*.

4) Quelle topologie naturelle peut-on mettre sur $G(n-1,n)$? Montrer que $G(2,3)$ s'obtient en "recollant" une bande de Möebius avec un disque le long de leur bord (on pourra identifier $G(2,3)$ privée d'un point avec l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^2$).

5) Interpréter $G(1,n)$ comme le quotient de la sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, |x| = 1\}$ par la symétrie par rapport à 0. Démontrer que $G(1,3)$ est homéomorphe à $G(2,3)$.

6) Montrer que $G(k,n)$ s'identifie à $O(n)/O(k) \times O(n-k)$, où $O(k) \times O(n-k)$ est le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in O(k)$ et $B \in O(n-k)$. Montrer que $G(k,n)$ est compact.

Troisième partie : pavages et domaines fondamentaux.

Un domaine $D \subset X$ est un *domaine fondamental* pour l'action d'un groupe discret G si

(i) X est la réunion des translatés de D par les éléments de G.
(ii) Pour tout élément g de G, l'intersection de D avec gD est contenue dans le bord de D.

La réunion des images par le groupe d'un domaine fondamental est un *pavage* de X.

7) Quelles actions construites dans les parties précédentes ont des domaines fondamentaux?

Une action $G \times X \to X$ par homéomorphismes sur un espace localement compact X est proprement discontinue si pour toute paire de compacts K_1 et K_2 de X il n'existe qu'un nombre fini d'éléments $g \in G$ tels que $gK_1 \cap K_2 \neq \emptyset$.

8) Si une action a un domaine fondamental, elle est proprement discontinue.

Pour la suite de l'exercice on pourra consulter le Cours d'arithmétique *de Jean-Pierre Serre.*

Soit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de taille 2×2 de déterminant 1. Il agit sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}$ par homographies, données par les formules

$$g.z = \frac{az+b}{cz+d}$$

où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

9) (Poincaré) Un sous-groupe $G \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit proprement discontinument sur $\mathbb{H}$ si et seulement si il est discret.

L'ensemble $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ des matrices de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ à coefficients entiers est un sous-groupe discret.

10)* Montrer que le domaine décrit sur la figure 1 est un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.

Un exercice de connexité. Montrer que $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de sous-espaces affines de codimension au moins 2 est connexe. En déduire que S^2 privée d'un nombre fini de points est connexe.

Qu'en est-il si on remplace "fini" par "dénombrable"?

Homéomorphismes. Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \longrightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est séparé alors f est un homéomorphisme.

Donner un exemple de bijection continue dont l'inverse n'est pas continue.

Connexité par arcs. Soit X un espace topologique ayant la propriété qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que tout point $x \in X$ admet un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ (on l'appelle encore *variété topologique de dimension* n). Montrer que X est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.

Est-ce que X est séparé?

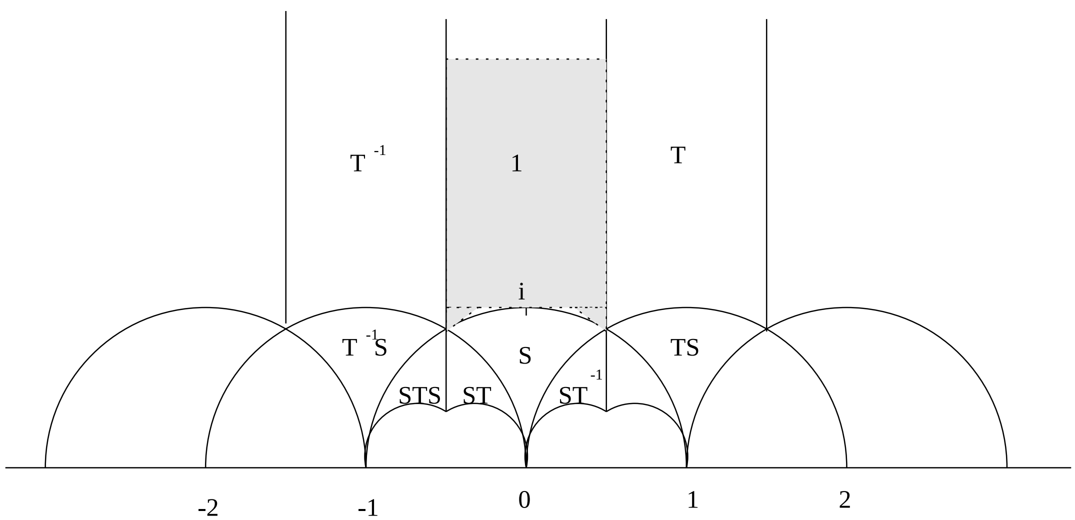

FIG. 1 – *Domaine fondamental de* $SL(2, \mathbb{Z})$