Calcul différentiel 1 **24/09/2002**
2002 - 2003

TD1: Espaces métriques, topologies, complétude

1) Boules. Soit (X,d) un espace métrique. Pour $a \in X$ et $r > 0$ on note $B_X(a,r) = \{x \in X \ : \ d(x,a) < r\}$, $B'_X(a,r) = \{x \in X \ : \ d(x,a) \leq r\}$, $S_X(a,r) = \{x \in X \ : \ d(x,a) = r\}$.

a) Montrer que $\operatorname{diam} B_X(a,r) \leq \operatorname{diam} B'_X(a,r) \leq 2r$ et $\operatorname{diam} S_X(a,r) \leq \operatorname{diam} B'_X(a,r)$, pour tous X, a, r.

b) On fixe $r > 0$. Quelles valeurs peuvent prendre les couples

$$(\operatorname{diam} B_X(a,r),\ \operatorname{diam} B'_X(a,r))$$

$$(\operatorname{diam} S_X(a,r),\ \operatorname{diam} B'_X(a,r))$$

$$(\operatorname{diam} B_X(a,r),\ \operatorname{diam} S_X(a,r))$$

lorsque X et a varient?

c) Même question pour le triplet

$$(\operatorname{diam} B_X(a,r),\ \operatorname{diam} S_X(a,r),\ \operatorname{diam} B'_X(a,r))$$

2) Espaces de configurations: droites dans $\mathbb{R}^2$ et sous-espaces dans $\mathbb{R}^n$.

Première partie

On appelle A l'ensemble des droites affines de $\mathbb{R}^2$ et $\widetilde{A}$ l'ensemble des droites affines *orientées* de $\mathbb{R}^2$. On se propose de les munir de métriques naturelles.

a) Montrer que $\widetilde{A}$ s'identifie à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, avec $\mathbb{S}^1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a^2+b^2 = 1\}$. Déduisez une métrique sur $\widetilde{A}$.

b) L'ensemble A est le quotient de $\widetilde{A}$ par une action du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que, moyennant l'identification précédente, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit par isométries sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Décrire explicitement cette action, le quotient et la métrique correspondante sur A.

c) Etudier la complétude de $\widetilde{A}$ et A.

Deuxième partie

L'ensemble des k-plans vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est noté $G(k,n)$. On l'appelle *variété de Grassmann*[1] ou encore *grassmannienne*. On se propose toujours de munir $G(k,n)$ d'une métrique naturelle.

---

1. Hermann Günter Grassmann (1809 - 1877) est connu en mathématiques pour avoir inventé l'Algèbre extérieure d'un espace vectoriel, qui constitue le formalisme adapté au calcul intégral sur les variétés différentiables. Déçu par le manque d'intérêt porté à ses travaux mathématiques, il se tourna vers l'étude du sanscrit: son dictionnaire est encore largement utilisé...

a) Etudier pour commencer $G(1,n)$ et $G(n-1,n)$, $n \geq 2$.

b) Le groupe $O(n)$ hérite d'une métrique en tant que sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G(k,n)$ s'identifie à $O(n)/O(k)\times O(n-k)$, où $O(k)\times O(n-k)$ est le sous-groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

avec $A \in O(k)$ et $B \in O(n-k)$. Déduisez des métriques possibles sur $G(k,n)$.

3) Nombres p-adiques. Soit p un nombre premier. La valuation p-adique d'un rationnel $x \in \mathbb{Q}$ est l'entier $v_p(x)$ défini par $x = p^{v_p(x)}\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers non divisibles par p. La norme p-adique est $|x|_p = p^{-v_p(x)}$.

a) Montrer que la distance $d_p(x,y) = |x-y|_p$ est une distance *ultramétrique* vérifiant

$$d_p(x,y) \leq \max(d_p(x,z), d_p(z,y)).$$

Que dire des triangles pour cette distance?

b) Soit $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette distance. Montrer que les opérations $+$ et $\times$ s'étendent naturellement à $\mathbb{Q}_p$ et le munissent d'une structure de corps. Montrer que $|.|_p$ s'étend en une norme sur $\mathbb{Q}_p$ en définissant la même topologie.

c) Expliquer pourquoi on peut voir tout élément de $\mathbb{Q}_p$ comme une série

$$\frac{a_{-\alpha}}{p^\alpha} + \ldots + \frac{a_1}{p} + a_0 + \ldots + a_\beta p^\beta + \ldots$$

où les a_i sont des entiers compris entre 0 et $p-1$. Montrer l'identité

$$1 + p + p^2 + \ldots = \frac{1}{1-p}.$$

d) (Lemme de Hensel[2]) Soit F un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $F(x) = 0$ et $F'(x) \neq 0$. Démontrer que F a une racine dans $\mathbb{Q}_p$ (On pourra trouver un polynôme à coefficients entiers $Q(X,Y)$ tel que $F(X+Y) = F(X) + YF'(X) + Y^2Q(X,Y)$). Que dire des premiers p pour lesquels il existe une racine de -1 dans $\mathbb{Q}_p$?

4) Plongement isométrique dans $\mathbb{R}^n$.

a) Démontrer qu'un espace métrique contenant 3 points peut se réaliser comme un triangle du plan euclidien. Trouver un espace métrique à 4 points qui ne se plonge isométriquement dans aucun espace euclidien.

2. Kurt Hensel (1861-1941) est l'inventeur des nombres p-adiques. Ceux-ci jouent un rôle majeur en théorie des nombres, notamment via le principe de passage du "local au global": l'existence de solutions non-triviales d'équations algébriques dans tout $\mathbb{Q}_p$ et dans $\mathbb{R}$ entraîne souvent l'existence de solutions rationnelles.

b) Soient $y_0, \ldots, y_N$ une famille de $N+1$ points de $\mathbb{R}^n$. On définit la matrice de Gram centrée en y_0

$$\mathrm{Gram}(y_0, \ldots, y_N) = [< y_i - y_0, y_j - y_0 >]_{1 \leq i,j \leq N}.$$

Démontrer que cette matrice est positive. Quel est son rang?

c) Soit (X, d) un espace métrique composé de $N+1$ points $x_0, \ldots, x_N$. On définit la matrice de Gram centrée en x_0.

$$\mathrm{Gram}(x_0, \ldots, x_N) = \frac{1}{2}[d(x_0, x_i)^2 + d(x_0, x_j)^2 - d(x_i, x_j)^2]_{1 \leq i,j \leq N}.$$

Démontrer que la famille $\{x_i\}_i$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathrm{Gram}(x_0, \ldots, x_N)$ est positive et de rang inférieur à n. Dans le cas où le rang est n, montrer qu'il y a unicité du plongement, modulo composition par une isométrie affine de $\mathbb{R}^n$.

d) Soit (X, d) un espace métrique. On suppose que toute famille $x_0, \ldots, x_{n+1}$ de $n+2$ points X se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que (X, d) se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^n$.

5) Hypersurfaces algébriques. Soit $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$, $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. On pose

$$V(P) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \ : \ P(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

On munit K^n de la topologie induite par la distance euclidienne. Montrer que $\overset{\circ}{\overline{V(P)}} = \emptyset$ si P est non-nul.

6) Des hypothèses.

a) (La complétude d'un espace est une notion métrique) Définir sur $\mathbb{R}$ une distance qui induit la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ mais par rapport à laquelle $\mathbb{R}$ n'est pas complet.

b) (Le singleton volatilisé) Dans un espace métrique complet, une intersection décroissante de fermés dont le diamètre tend vers zéro est réduite à un point. Donner un exemple d'espace métrique complet et d'une suite décroissante de fermés dont le diamètre est borné tels que leur intersection soit vide.

7) Séparabilité. Soit (X, d) un espace métrique. Etant donné $\epsilon > 0$, on dit qu'un sous-ensemble $A \subset X$ est ϵ-séparé si la distance entre deux points distincts de A est plus grande que ϵ. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes:

(i) X est séparable;

(ii) X admet une base dénombrable de voisinages;

(iii) quel que soit $\epsilon > 0$, un ensemble ϵ-séparé est dénombrable.

Pour l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) on pourra utiliser le lemme de Zorn.

8) Quelques espaces de Banach. Soit p un nombre réel ≥ 1. On note l^p l'ensemble des suites de nombres complexes $a = (a_n)$ telles que la série $\sum \mid a_n \mid^p$ converge, et on le munit de la norme $\| a \|_p = (\sum_n \mid a_n \mid^p)^{1/p}$. On note l^∞ l'ensemble des suites bornées, muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$, et c_0 le sous-ensemble formé des suites qui tendent vers 0.

(a) Montrer que l^p et l^∞ sont des espaces de Banach.

(b) Quelle est l'adhérence dans l^∞ des suites presque nulles?

(c) Quelle est l'adhérence de l^p dans l^∞?

(d) Démontrer que c_0 est un espace de Banach séparable; que l^p est séparable; que l^∞ n'est pas séparable.

9) Applications du théorème de Baire.

a) Soient X, Y des espaces métriques avec X complet. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans Y qui converge simplement vers une fonction f. Prouver que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X (on dit encore que f est continue *Baire presque partout*). On pourra considérer les ensembles

$$U_{m,k} = \bigcup_{n \geq m} \{x \ : \ d(f_n(x), f_m(x)) > \frac{1}{k}\}, \qquad m, k \in \mathbb{N}^*$$

En déduire qu'une fonction dérivable est Baire presque partout C^1.

b) L'ensemble des fonctions continues qui ne sont nulle part différentiables est dense dans $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\| f \| = \sup |f|$. On pourra considérer

$$U_n = \left\{ f \ : \ \forall \, x \in [0,1], \ \exists \, h \neq 0, \ \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > n \right\}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

c) Montrer que $C_b(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \ : \ \sup |f| < +\infty\}$ muni de la norme de la convergence uniforme est un espace complet. Prouver que les fonctions uniformément continues de $C_b(\mathbb{R})$ forment un sous-ensemble dense.