UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
LICENCE DE SCIENCES, MENTION MATHÉMATIQUES SEMESTRE 6
QUELQUES QUESTIONS ET
CENT SOIXANTE-QUATRE EXERCICES DE GÉOMÉTRIE

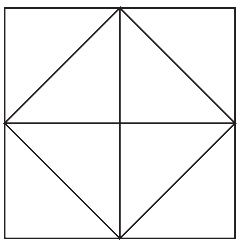
2010–2011

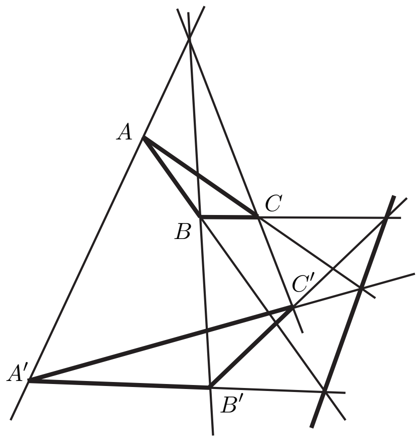
Michèle Audin

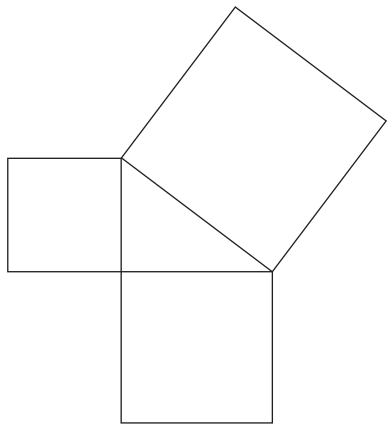
Un peu de culture, avant de commencer

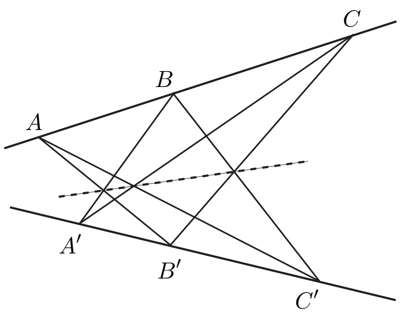
(1) La géométrie, pour vous, c'est quoi ?
  – ça a un rapport avec la géographie[1] ?

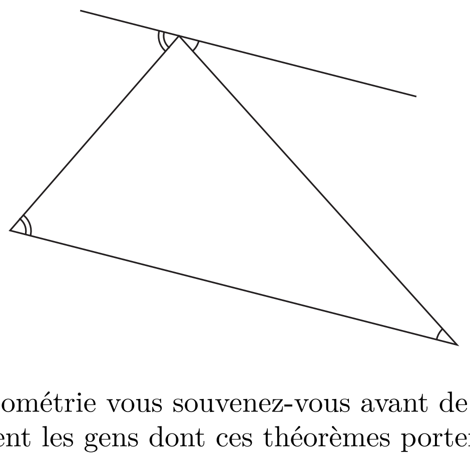
(2) Parmi les figures suivantes, lesquelles vous évoquent quelque chose ? Quoi ?

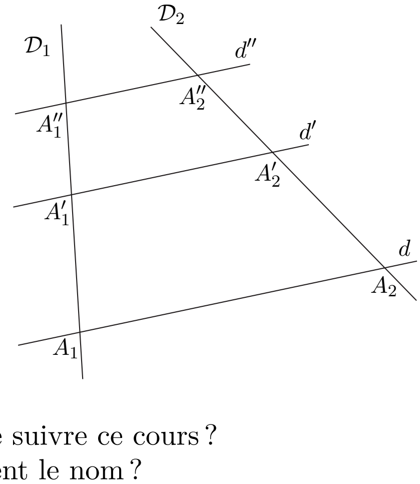












(3) De quels théorèmes de géométrie vous souvenez-vous avant de suivre ce cours ?
  – savez-vous qui étaient les gens dont ces théorèmes portent le nom ?
    • dans quels pays ils ont vécu ?

La plupart des exercices de ces feuilles sont dans [**1**] (et beaucoup d'entre eux viennent des autre ouvrages cités dans la bibliographie). Quelques-uns y ont été ajoutés par Vincent Blanlœil, Mihai Damian et Ilia Itenberg, que je remercie pour leur aide.

[1] Éléments de réponse ici `http://images.math.cnrs.fr/Geometrie-mesurer-la-terre-mesurer.html`.

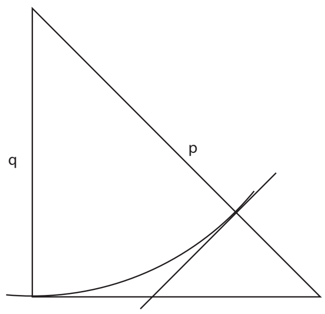
        - quand ils ont vécu ?

(4) Avez-vous entendu parler du « postulat des parallèles » ?

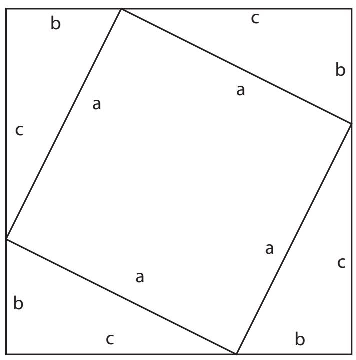
(5) Montrer que la relation « être parallèle à » parmi les droites du plan est une relation d'équivalence.
   - qu'est-ce qu'une relation d'équivalence ?
   - qu'avez-vous utilisé pour démontrer que le parallélisme est une relation d'équivalence ?
   - qu'est-ce qu'une droite ?
   - qu'est-ce que deux droites parallèles ?
      - et dans l'espace ?

(6) Que vaut la somme des angles d'un triangle ?
   - et comment ça se démontre ?
      - quelle propriété (ou axiome, ou postulat, ou théorème) utilise-t-on ?
   - exemple : sur la Terre, pouvez-vous dessiner un triangle dont un des sommets est au pôle nord et les deux autres sur l'équateur ?
   - quelle est la somme des angles d'un tel triangle ?
   - qu'est-ce qu'un angle ?

(7) en référence à la première figure (page précédente) : savez-vous démontrer que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$?
   - cette figure en suggère une autre démonstration, savez-vous la reconstituer ?



(8) De quel théorème cette figure est-elle une démonstration ?



   - Pourquoi ?

(9) Qu'est-ce qu'un polyèdre régulier ?
   - en connaissez-vous ?
   - ceci en est-il un ?

– pouvez-vous en dessiner ?

***Exercice 0.1* (Autour du théorème des milieux)**. Pour cet exercice, on se place dans le cadre axiomatique. Plus précisément, on suppose qu'on ne connaît ni les barycentres ni le théorème de Thales. On sait, par contre, qu'un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

(1) Le théorème des milieux. Soit ABC un triangle et soient C' le milieu du côté AB, B' celui de AC. Soit M le point de $B'C'$ tel que B' soit le milieu de $C'M$. Que peut-on dire du quadrilatère $AMCC'$? du quadrilatère $C'MCB$?
Démontrer le théorème des milieux : Dans un triangle ABC, soit C' le milieu de AB. Une droite passant par C' est parallèle à BC si et seulement si elle passe par le milieu de AC.

(2) Le centre de gravité. On considère le point d'intersection G des médianes CC' et BB', les points C'' de CC' et B'' de BB' tels que C' soit le milieu de GC'' et B' celui de GB''. Montrer que les droites CB'', AG et BC'' sont parallèles
Montrer que G est le mileu de CC'' (on pourra considérer le triangle ACC'') et de même que c'est le milieu de BB''.
Montrer que AG est la troisième médiane du triangle (on pourra considérer le triangle $BB''C$).
En déduire que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G situé aux deux-tiers de chacune d'elles en partant du sommet.

1. Géométrie affine

Espaces affines, sous-espaces affines.

Exercice 1.1. Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu (si $AA'B'B$ est un parallélogramme et si M vérifie $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AM}$, alors il vérifie aussi $\overrightarrow{A'B} = 2\overrightarrow{A'M}$).

Exercice 1.2. Par deux points (distincts) d'un espace affine passe une droite et une seule.

Exercice 1.3. On considère un plan affine sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Combien a-t-il de points ? de droites ? combien chaque droite a-t-elle de points ? Montrer que par chaque point, il passe quatre droites et que pour une direction donnée, il y a trois droites parallèles à cette direction.

Exercice 1.4. Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux sous-espaces affines d'un espace affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$. À quelle condition $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ est-il un sous-espace affine ?

Exercice 1.5. Une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine défini sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace affine si et seulement si pour tous points A et B de $\mathcal{F}$, on a l'inclusion $\langle A, B\rangle \subset \mathcal{F}$.

Exercice 1.6. Considérons une collection de n droites (où n est un entier supérieur ou égal à 2) dans un espace affine de dimension supérieure ou égale à 3. Supposons que deux droites quelconques de notre collection ont un point d'intersection. Montrer que soit toutes les droites de la collection ont un point commun, soit toutes ces droites sont contenues dans un plan.

Exercice 1.7. L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère affine. Décrire par un système d'équations paramétriques le sous-espace affine $\mathcal{F}$ engendré par les points $B_0, \dots, B_k$ de $\mathcal{E}$.

Exercice 1.8. Soit A une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et soit B un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^m$. Soit $\mathcal{F}$ la partie de $\mathbb{R}^n$ définie par

$$\mathcal{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\}.$$

Expliquer pourquoi $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine. Quelle est sa direction ? Quand est-il vide ? Exprimer sa dimension à l'aide du rang r de la matrice A.

Exercice 1.9. À quelles conditions les deux équations

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \quad \text{et} \quad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$$

décrivent-elles des hyperplans parallèles de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1.10. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine.

– Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point $A = (1, 0, 1)$ dans la direction engendrée par les vecteurs $u = (0, 2, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$.
– Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle au plan précédent et contenant le point $B = (0, 1, 0)$.
– Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle au plan précédent et passant par le milieu de AB.

Exercice 1.11. À quelles conditions les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = 0 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z = 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$? la même droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$?

À quelles conditions les deux systèmes d'équations

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z = d_2' \end{cases}$$

décrivent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? des droites affines parallèles de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 1.12. Montrer que le complémentaire d'une droite dans un plan affine réel a deux composantes connexes. Qu'en est-il du complémentaire d'une droite dans un espace affine réel de dimension 3 ou plus ?

Applications affines.

***Exercice 1.13* (Un « truc » très utile)**. Soit f une application linéaire de E dans lui-même. On suppose que l'image par f de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire. Écrire cette hypothèse avec des symboles mathématiques et des quantificateurs. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie vectorielle. Comparer les deux écritures et démontrer que f est, quand même, une homothétie vectorielle.

Exercice 1.14. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension au moins égale à 2 et φ une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que l'image de toute droite soit une droite qui lui est parallèle. Montrer que φ est une translation ou une homothétie.

***Exercice 1.15* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2006)**. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, et soit E la direction de $\mathcal{E}$. Considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que, pour tout vecteur v dans E, on ait $t_v \circ \varphi = \varphi \circ t_v$, où $t_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est la translation de vecteur v. Montrer que φ est une translation.

***Exercice 1.16* (Symétries)**. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un espace vectoriel E, on définit la symétrie s par rapport à F dans la direction de G par

$$s_F(u + v) = u - v \text{ si } u \in F \text{ et } v \in G.$$

On vérifiera que c'est une application linéaire et une involution.

Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$ et G une direction de sous-espaces affines tels que $F \oplus G = E$. On choisit un point $O \in \mathcal{F}$ et on définit $\sigma : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$\overrightarrow{O\sigma(M)} = s_F(\overrightarrow{OM}).$$

Si $O' \in \mathcal{F}$, vérifier que

$$\overrightarrow{OM'} = s_F(\overrightarrow{OM}) \iff \overrightarrow{O'M'} = s_F(\overrightarrow{O'M}).$$

Montrer que σ est une application affine (symétrie) ne dépendant pas du choix de O.

***Exercice 1.17* (Symétries glissées)**. Soit φ une transformation affine de l'espace affine $\mathcal{E}$. On suppose que l'application linéaire associée $\overrightarrow{\varphi}$ est une symétrie. Montrer que φ s'écrit de façon unique comme composée d'une symétrie affine σ et d'une translation de vecteur v fixe par $\overrightarrow{\varphi}$.

Soit φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. On suppose que l'application linéaire associée est involutive (c'est-à-dire vérifie $\overrightarrow{\varphi}^2 = \mathrm{Id}_E$). Peut-on en déduire que φ est involutive (c'est-à-dire vérifie $\varphi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$) ?

Exercice 1.18. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine vérifiant $\mathrm{Im}(\varphi^2) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

(1) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe $P \in \mathcal{E}$ et $u \in \operatorname{Ker}(\overrightarrow{\varphi})$ tels que $\overrightarrow{M\varphi(P)} = u$.
(2) Montrer que u et $\varphi(P)$ sont uniquement déterminés dans cette décomposition.
(3) Donner un exemple de φ ayant cette propriété.

Exercice 1.19. Une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.

Exercice 1.20. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, on considère un tétraèdre (quelconque) $\mathcal{T}$ de sommets A, B, C et D. Démontrer que l'ensemble des applications affines qui préservent $\mathcal{T}$ est un groupe isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4$ des permutations de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. Combien y a-t-il d'applications affines conservant $\mathcal{T}$?

Exercice 1.21. Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit φ une application affine telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$ et $\varphi(C) = A$. Est-elle complètement déterminée ? est-elle injective ? Étudier φ^3 et montrer que φ a un point fixe. Quelle est la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$?

***Exercice 1.22* (Extrait du sujet d'examen, juin 2005)**. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

(1) Soient $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines ayant la même application linéaire associée. Peut-on affirmer que $\varphi = \psi$?
(2) Soient $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ et $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications affines telles que leurs applications linéaires associées $\overrightarrow{\varphi}$ et $\overrightarrow{\psi}$ commutent, c'est-à-dire $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$. Peut-on affirmer que les applications φ et ψ commutent ?

***Exercice 1.23* (Extrait du sujet d'examen, juin 2006)**. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit E la direction de $\mathcal{E}$. Considérons une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi}$ son application linéaire associée.

(1) Supposons que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est injective. Peut-on affirmer que φ est injective ? Peut-on affirmer que φ est surjective ?
(2) Supposons en plus que $\overrightarrow{\varphi} : E \to E$ est une involution (c'est-à-dire, $\overrightarrow{\varphi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est l'identité). Peut-on affirmer que φ est une involution ?

Exercice 1.24. On donne une application linéaire $f : E \to F$. Décrire toutes les applications affines $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ dont f est l'application linéaire associée.

Exercice 1.25. Quelle est la conjuguée $\varphi \circ h(O, \lambda) \circ \varphi^{-1}$ de l'homothétie $h(O, \lambda)$ par la transformation affine φ ?

Exercice 1.26. Quelle est la composée de deux homothéties $h(B, \lambda') \circ h(A, \lambda)$? L'ensemble des homothéties affines est-il un groupe ? Quel est le sous-groupe[2] qu'il engendre dans le groupe affine ?

Exercice 1.27. Si $h(A, \lambda) \circ h(B, \mu) = h(C, \nu)$ et les nombres λ, μ et ν sont tous les trois différents de 1, alors les trois points A, B et C sont alignés.

Exercice 1.28. L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'un repère affine. Décrire en coordonnées cartésiennes les applications affines suivantes

- translation de vecteur v,
- homothétie de centre A et de rapport λ.

Exercice 1.29. On se place dans un plan muni d'un repère affine.

(1) Déterminer l'expression d'une application affine qui transforme le parallélogramme délimité par les droites $y = 2x + 1$, $y = 2x + 3$, $x = 3y$ et $x = 3y + 4$ en le « carré[3] » de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$.
(2) Peut-on transformer n'importe quel quadrilatère en un « carré » par une application affine ?

[2]On appelle souvent ce sous-groupe *groupe des dilatations*.
[3]Pourquoi les guillemets ?

Exercice 1.30. Les espaces affines $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont munis de repères affines. Une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est alors donnée sous forme matricielle par

$$X' = AX + B$$

où A est une matrice à m lignes et m colonnes et B est un vecteur (colonne) de $\mathbb{R}^m$. Comment se transforme cette écriture quand on change de repères affines dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$?

***Exercice 1.31* (Affinités)**. On donne un nombre réel $\alpha \neq 1$. Trouver les applications affines telles que, si M' désigne l'image de M et M'' celle de M', on ait $\overrightarrow{M'M''} = \alpha\overrightarrow{MM'}$.

***Exercice 1.32* (Groupe affine de la droite)**. Rappeler ce qu'est le groupe linéaire de la droite vectorielle $\mathbb{R}$. Décrire le groupe affine de cette même droite.

Barycentres.

Exercice 1.33. Dans un plan affine réel, décrire l'intérieur d'un triangle en termes de barycentres.

Exercice 1.34. Soit $ABCD$ un tétraèdre quelconque. Soient P, Q, R et S quatre points tels que $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CS} = k\overrightarrow{CD}$. On appelle I et J les milieux respectifs de AC et BD. Montrer que les droites PS, QR et IJ sont concourantes.

Exercice 1.35. Soit $ABCD$ un tétraèdre (quelconque). Montrer que son centre de gravité G est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.

Si A' est le centre de gravité du triangle BCD, montrer que G est sur le segment AA', aux trois quarts de AA' en partant de A.

***Exercice 1.36* (Extrait du sujet d'examen, juin 2005)**. Soit $n \geq 3$ un entier, et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des points affinement indépendants dans un espace affine $\mathcal{E}$.

(1) Montrer que l'isobarycentre des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ appartient au sous-espace engendré par $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.
(2) Soit i un entier strictement positif et inférieur ou égal à n. Montrer que le point A_i ne coïncide pas avec l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$.
(3) Si i est un entier strictement positif et inférieur ou égal à n, la *i-ème médiane* de la collection $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est la droite qui passe par le point A_i et l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Montrer que toutes les n médianes de la collection $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ont au moins un point commun.

Exercice 1.37. Soient a, b et c trois réels fixés tels que $a + b + c = 1$ et soient A, B, C trois points variant sur trois droites parallèles. Déterminer le lieu géométrique du barycentre de (A, a), (B, b) et (C, c).

Exercice 1.38. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un plan affine. Déterminer le lieu des milieux des segments reliant le barycentre $pA + qB + rC$ et $pA' + qB' + rC'$ lorsque p, q et r parcourent $\mathbb{R}$ en vérifiant $p + q + r = 1$.

Exercice 1.39. Soient A, B, C et D quatre points d'un espace affine, affectés chacun de la même masse. Montrer que les barycentres D', C', B' et A' des triangles ABC, ABD, ACD et BCD forment un quadrilatère homothétique à $ABCD$. Trouver le centre et la rapport de l'homothétie qui transforme $ABCD$ en $A'B'C'D'$.

Exercice 1.40. On fixe deux points A et B dans un plan affine $\mathcal{P}$. À tout point M du plan, l'application φ associe le centre de gravité du triangle AMB. Est-elle affine ? Même question avec l'orthocentre ($\mathcal{P}$ étant supposé euclidien).

Exercice 1.41. Soit ABC un triangle. Soit M_0 un point du côté AB. La parallèle à BC issue de M_0 coupe AC en M_1. La parallèle à AB issue de M_1 coupe BC en M_2 *etc* (figure 2). On définit ainsi des points M_i (pour $i \geq 0$). Montrer que $M_6 = M_0$.

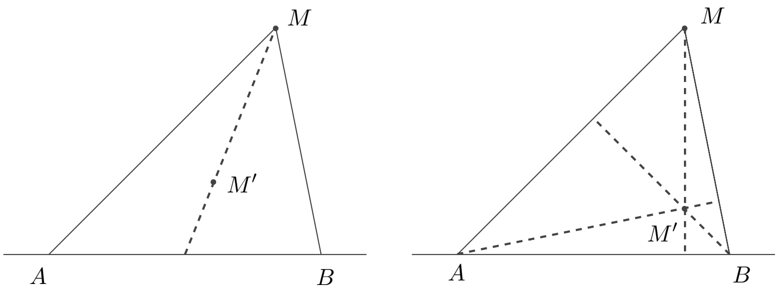


FIGURE 1

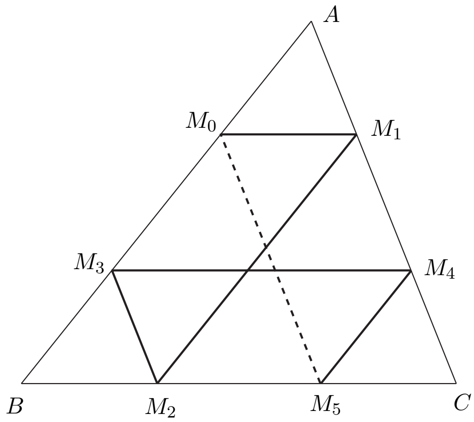


FIGURE 2

Exercice 1.42. Soit ABC un triangle. À partir de tout point M, on construit $M_0 = M$, puis M_1, le milieu de M_0A, M_2 le milieu de M_1B, M_3 le milieu de M_2C, M_4 le milieu de M_3A et ainsi de suite. On pose $\varphi_n(M) = M_n$.

(1) Montrer que φ_n est une application affine.
(2) Étudier la convergence de la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ (dans un repère affine).
(3) Montrer que s'il existe deux entiers p et q pour lesquels $M_{3p} = M_{3q}$, alors la sous-suite $(M_{3n})_{n\geq 0}$ est constante à partir d'un certain rang. Déterminer cette constante.

Exercice 1.43. Une partie bornée d'un espace affine ne peut avoir plus d'un centre de symétrie.

***Exercice 1.44* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2002)**. On se place dans un plan affine. Étant donnés n points $A_1, \dots, A_n$, peut-on trouver n points $B_1, \dots, B_n$ tels que $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient les milieux, respectivement, de $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_nB_1$? On étudiera en particulier les cas $n = 3$ et $n = 4$.

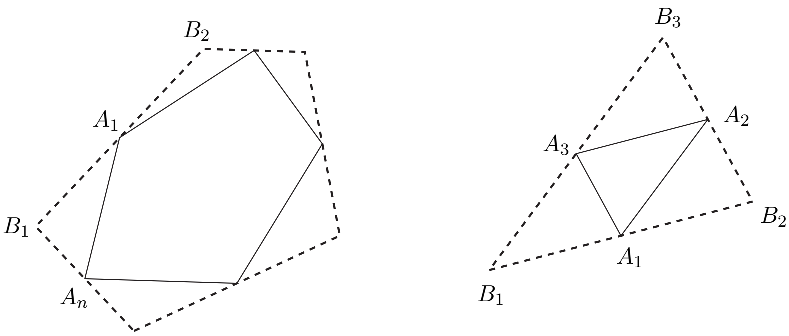


FIGURE 3

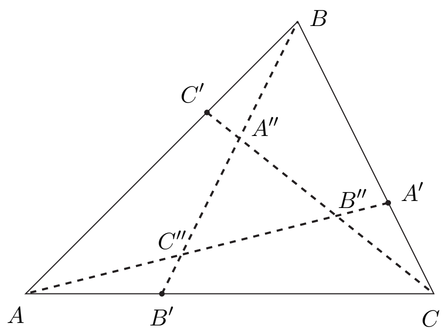


FIGURE 4

***Exercice 1.45* (Extrait du sujet d'examen, juin 2005)**. On se place dans un plan affine $\mathcal{E}$ défini sur $\mathbb{R}$. Soit n un nombre entier positif impair, et soient A_0, O_1, O_2, $\dots$, O_n des points de $\mathcal{E}$. Considérons les points A_1, A_2, $\dots$, A_n de $\mathcal{E}$ tels que, pour tout $i = 1, \dots n$, le point O_i soit le milieu du segment $A_{i-1}A_i$. Ensuite, considérons les points B_1, B_2, $\dots$, B_n tels que O_1 soit le milieu du segment A_nB_1 et, pour tout $i = 2, \dots, n$, le point O_i soit le milieu du segment $B_{i-1}B_i$. Montrer que les points A_0 et B_n coïncident.

L'énoncé reste-il vrai si n est un entier strictement positif pair ?

Exercice 1.46. Étant donné un triangle ABC, construire trois points A', B' et C' de telle sorte que B' soit le milieu de AC', C' celui de BA' et A' celui de CB'.

Exercice 1.47. Sur les trois côtés d'un triangle ABC, on place trois points A', B', C' de façon que $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$. Les droites AA', BB' et CC' dessinent un petit triangle $A''B''C''$ (figure 4). Évaluer le rapport de l'aire[(4)] de $A''B''C''$ à celle de ABC.

Exercice 1.48 **(Théorème de Menelaüs)**. Soient ABC un triangle, A', B' et C' des points de ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si ils satisfont à l'égalité :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Applications. On suppose que A', B' et C' sont alignés. Soient A'', B'' et C'' les symétriques de A', B' et C' par rapport aux milieux des côtés concernés. Montrer que A'', B'' et C'' sont alignés. Soient I, J et K les milieux de AA', BB' et CC'. On veut montrer que I, J et K sont alignés. Soient E, F et G les milieux de $B'C'$, AC' et AB' respectivement. Montrer que $I \in FG$, $J \in GE$ et $K \in EF$, puis que I, J et K sont alignés.

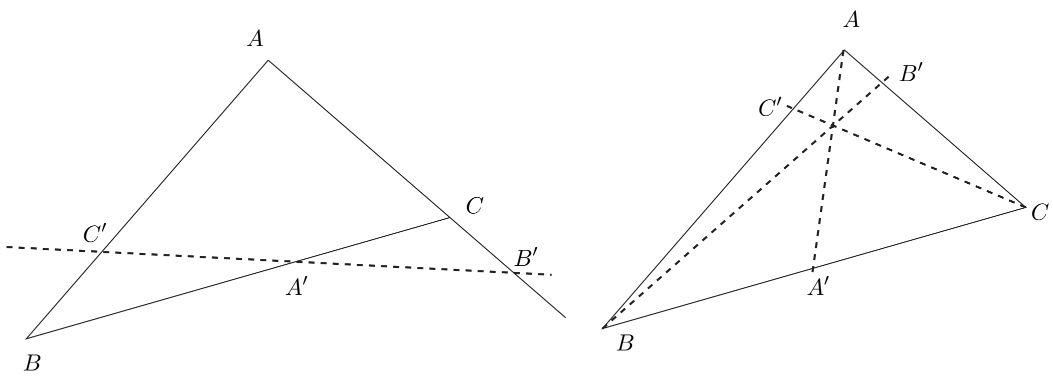


FIGURE 5. Menelaüs et Ceva

Exercice 1.49 **(Théorème de Ceva)**. Soient A', B' et C' trois points sur les côtés d'un triangle comme dans l'exercice 1.48. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont parallèles ou concourantes si et seulement si elles satisfont à l'égalité

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 1.50. Soit ABC un triangle et soit M un point. On suppose que les droites MA, MB et MC coupent BC, CA et AB en A', B' et C' (respectivement). Montrer que

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'A}} + \frac{\overline{B'M}}{\overline{B'B}} + \frac{\overline{C'M}}{\overline{C'C}} = 1.$$

On suppose en plus que M est à l'intérieur du triangle. Montrer que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MA'}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{MB'}} + \frac{\overline{CM}}{\overline{MC'}} \geq 6.$$

Pour quelles positions de M a-t-on l'égalité ?

Exercice 1.51 **(Pappus, nouvelle version, corollaire de Menelaüs)**. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites se coupant en O. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{D}$, A', B' et C' trois points de $\mathcal{D}'$. On suppose que $B'C$ et $C'B$ se coupent en α, $C'A$ et $A'C$ en β, $A'B$ et $B'A$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés (figure 6).

Exercice 1.52 **(Desargues, nouvelle version, corollaire de Menelaüs)**. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose que BC et $B'C'$ se coupent en α, CA et $C'A'$ en β, AB et $A'B'$ en γ. Montrer que α, β et γ sont alignés si et seulement si AA', BB' et CC' sont concourantes ou parallèles (figure 7).

[(4)] Le plan est supposé euclidien.

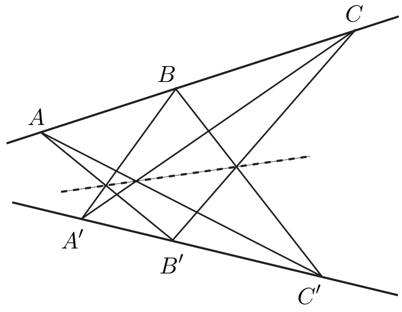


FIGURE 6. Pappus...

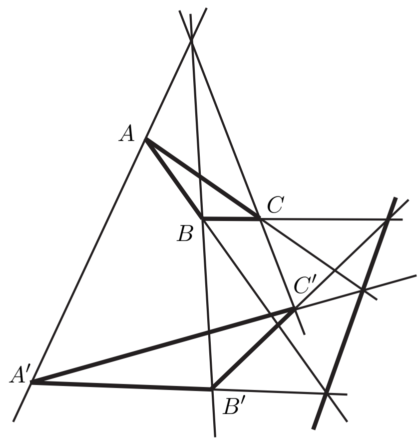


FIGURE 7. ... et Desargues

Exercice 1.53. Soient ABC un triangle, P un point de la droite BC, M un point de la droite AP. Les parallèles à CM menée par P et à AP menée par B se coupent en B'. Les parallèles à BM menée par P et à AP menée par C se coupent en C'. Soient I, J et K les milieux de PM, BB' et CC'. Montrer que I, J et K sont alignés, puis que M, B' et C' sont alignés.

***Exercice 1.54* (Extrait du sujet d'examen, juin 2002, mai 2010)**. Soit ABC un triangle de centre de gravité G dans un plan affine. On appelle A', B' et C' les milieux (respectivement) des côtés BC, CA et AB.

(1) Rappeler pourquoi il existe une homothétie de centre G envoyant A' sur A, B' sur B et C' sur C. Quel est son rapport ?
(2) On donne un réel k différent de 0 et 1. Soit M un point du plan. On appelle P l'image de M par l'homothétie de centre A' et de rapport k, Q l'image de M par l'homothétie de centre B' et de rapport k et R l'image de M par l'homothétie de centre C' et de rapport k. Quelles sont les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $1/(1-k)$?
(3) Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation envoyant P sur A, Q sur B et R sur C. Que peut-on dire des droites AP, BQ et CR ?

2. Géométrie euclidienne

Exercice 2.1. Soient a, b et c trois nombres positifs tels que
$$|b-c| < a < b+c.$$
Montrer qu'il existe un triangle de côtés a, b, c.

Exercice 2.2. Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \to E$ une application (ensembliste) qui conserve le produit scalaire. Montrer que f est linéaire (et donc est une isométrie).

Exercice 2.3. Montrer qu'une symétrie n'est une isométrie que si c'est une symétrie orthogonale.

***Exercice 2.4* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2005)**. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, et soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine telle que $\varphi \circ \varphi$ soit une isométrie. Peut-on affirmer que φ est une isométrie ?

***Exercice 2.5* (Réflexions, hyperplan médiateur)**. Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel euclidien E et soit x_0 un vecteur non nul de $H^\perp$. Montrer que
$$s_H(x) = x - 2\frac{x \cdot x_0}{\|x_0\|^2} x_0.$$
Montrer que, si x et y sont deux vecteurs de même norme de l'espace vectoriel euclidien E, il existe un hyperplan H tel que $s_H(x) = y$ (et que H est unique si $x \neq y$). Montrer de même que, si A et B sont deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$, il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ tel que $\sigma_{\mathcal{H}}(A) = B$ (et que $\mathcal{H}$ est unique si $A \neq B$).

***Exercice 2.6* (Régionnement du plan par la médiatrice)**. Soient A et B deux points d'un plan affine euclidien $\mathcal{P}$. Montrer que l'ensemble

$$\{M \in \mathcal{P} \mid MA < MB\}$$

est le demi-plan défini par la médiatrice du segment AB et contenant A.

Exercice 2.7. Soient A, B et C trois points (deux à deux distincts) d'un espace affine euclidien de dimension 3. Décrire les points M tels que $MA = MB = MC$.

***Exercice 2.8* (La « fonction scalaire » de Leibniz)**. C'est le nom traditionnel de la fonction F, définie par le système de points pondérés $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ et qui, au point M de l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, associe le scalaire

$$F(M) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i MA_i^2.$$

On suppose que la somme $\sum \alpha_i$ est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur fixe v tel que, pour tout point M' de $\mathcal{E}$,

$$F(M') = F(M) + 2\overrightarrow{MM'} \cdot v.$$

Si la somme $\sum \alpha_i$ n'est pas nulle, on appelle G le barycentre du système. Vérifier que

$$F(M) = F(G) + \left(\sum \alpha_i\right) MG^2.$$

Applications. On se donne un nombre réel k. Déterminer, selon les valeurs de k,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 - MB^2 = k$,
- l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\dfrac{MA}{MB} = k$.

Exercice 2.9. Montrer que les déplacements sont les isométries qui préservent une orientation (toutes les orientations) de l'espace. Montrer que les réflexions renversent l'orientation.

Exercice 2.10. Quelles sont les isométries positives du plan vectoriel euclidien qui sont involutives ?

Pour les exercices qui suivent, on se place dans un plan affine euclidien.

Exercice 2.11. Soit ABC un triangle. Construire un carré $MNPQ$ tel que M, $N \in BC$, $Q \in AB$, $P \in AC$.

Exercice 2.12. Soit $\mathcal{D}$ une droite dans un plan affine euclidien, et soient A et B des points n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ qui se trouvent du même côté de $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire, le segment AB ne coupe pas la droite $\mathcal{D}$). Construire un point M sur $\mathcal{D}$ tel que $AM + MB$ soit minimal.

***Exercice 2.13* (Extrait du sujet d'examen, juin 2005)**. Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, $\mathcal{D}$ une droite dans $\mathcal{E}$ et a un vecteur appartenant à la direction de $\mathcal{D}$. Soient A et B des points de $\mathcal{E}$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{D}$ et qui se trouvent du même côté de $\mathcal{D}$. Trouver des points M et N sur la droite $\mathcal{D}$ tels que $\overrightarrow{MN} = a$ et tels que la somme $AM + NB$ des distances AM et NB soit minimale.

Exercice 2.14. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles d'un plan affine euclidien et soient A et B deux points situés de part et d'autre de la bande délimitée par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Construire un point M sur $\mathcal{D}$ et un point M' sur $\mathcal{D}'$ tels que MM' ait une direction donnée et
- tels que $AM = BM'$,
- puis tels que AM et BM' soient perpendiculaires,
- enfin tels que $AM + MM' + M'B$ soit minimal.

Exercice 2.15. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, trouver toutes les homothéties qui envoient $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

Exercice 2.16. On donne trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dont les centres ne sont pas alignés. On appelle I_1, I_2 et I_3 (resp. J_1, J_2 et J_3) les centres des homothéties de rapport positif (resp. négatif) envoyant $\mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_3$ sur $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. Montrer que I_1, J_2 et J_3 (et de même I_2, J_3 et J_1, I_3, J_1 et J_2) ainsi que I_1, I_2 et I_3 sont alignés (voir la figure 8, sur laquelle on placera les centres des trois cercles).

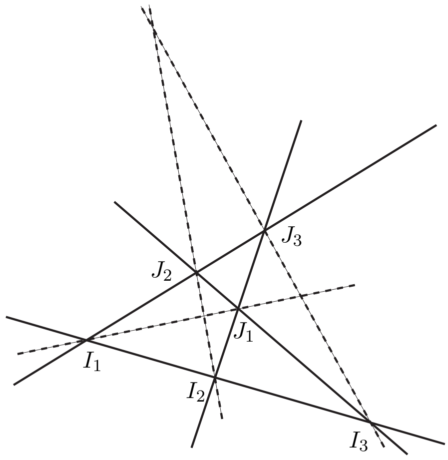


FIGURE 8

Exercice 2.17. Construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné.

***Exercice 2.18* (Orthocentre)**. Rappeler pourquoi les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes. Considérer la figure 3 d'un œil euclidien et montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2.19. Soit AB une corde d'un cercle $\mathcal{C}$. Montrer que le lieu des orthocentres H des triangles AMB (quand M parcourt $\mathcal{C}$) est le cercle $\mathcal{C}'$ symétrique orthogonal de $\mathcal{C}$ par rapport à AB.

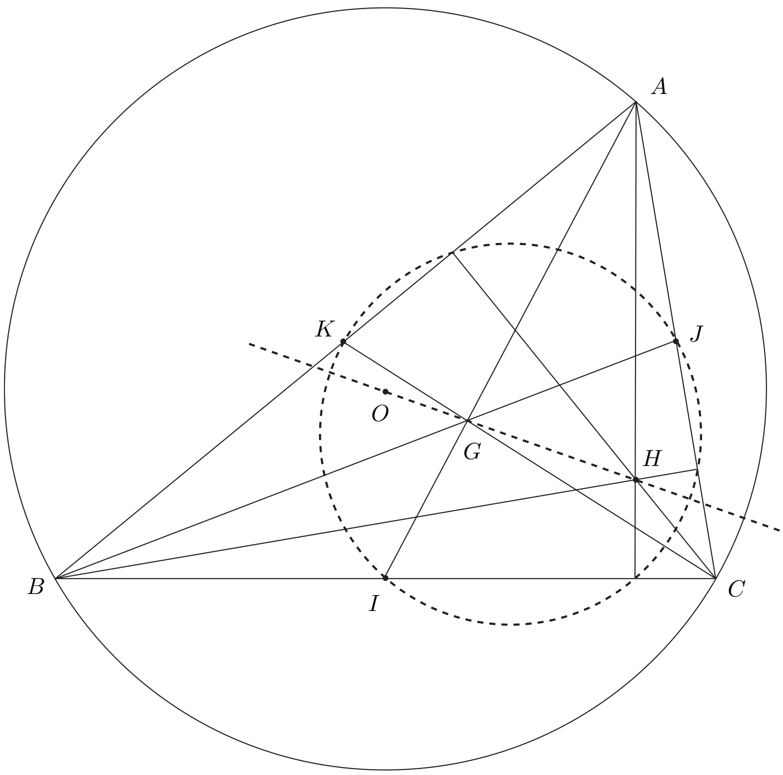


FIGURE 9. Le cercle d'Euler

***Exercice 2.20* (Cercle d'Euler)**. Soit ABC un triangle, et soient G, O et H ses centre de gravité, centre du cercle circonscrit et orthocentre (respectivement). Toujours en pensant à la figure 3, montrer que O, G et H sont alignés et, plus précisément, qu'on a

$$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}.$$

On appelle I, J et K les milieux de BC, CA et AB et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle IJK (figure 9). Montrer qu'il passe aussi[5] par les pieds des hauteurs de ABC et par les milieux de AH, BH et CH.

3. Géométrie euclidienne plane

Exercice 3.1. Dans le plan euclidien orienté P, montrer que la base (u, v) est directe si et seulement si l'angle (u, v) a une mesure dans $[0, \pi]$.

Exercice 3.2. Si a, b, c et R désignent les longueurs des trois côtés BC, CA, AB et le rayon du cercle circonscrit d'un triangle ABC et si A, B, C désignent aussi des mesures de ses angles géométriques, montrer que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Exercice 3.3. Avec les mêmes notations que dans l'exercice 3.2, montrer que

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(le cas où A est droit est le théorème de Pythagore).

***Exercice 3.4* (Cercle inscrit, cercles exinscrits)**. Démontrer que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point I équidistant des trois côtés du triangle et (donc) centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle inscrit.

Montrer que la bissectrice intérieure de l'angle en A et les deux bissectrices extérieures des angles en B et C sont concourantes en un point J équidistant des trois côtés du triangle et (donc) centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, le cercle exinscrit dans l'angle A.

***Exercice 3.5* (Triangles isocèles)**. Si C est sur la médiatrice du segment AB, on a l'égalité d'angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

Exercice 3.6. Quelle est la composée des deux rotations $\rho_{B,-\theta} \circ \rho_{A,\theta}$?

Exercice 3.7. Les isométries planes s'écrivent, en nombres complexes, comme indiqué dans le tableau suivant.

	translations	rotations	réflexions	symétries glissées
écriture en nombres complexes	$z \mapsto z + b$	$z \mapsto az + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a \neq 1$	$z \mapsto a\bar{z} + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b} + b = 0$	$z \mapsto a\bar{z} + b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b} + b \neq 0$

Exercice 3.8. Au fait, comment s'écrit une transformation affine du plan en nombres complexes ?

***Exercice 3.9* (Groupe d'isométries d'une figure, à suivre)**. On considère φ et ψ, deux déplacements du plan. Que peut-on dire de $\varphi \circ \psi \circ \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$?

Montrer que le groupe des déplacements qui préservent une partie bornée du plan est commutatif.

Montrer que tout sous-groupe fini du groupe des déplacements affines du plan est commutatif.

***Exercice 3.10* (Groupe d'isométries d'une figure, à suivre)**. Si G est un sous-groupe fini du groupe $\operatorname{Isom}(\mathcal{E})$, montrer qu'il y a un point de $\mathcal{E}$ fixé par tous les éléments de G.

Retrouver le dernier résultat de l'exercice 3.9.

Exercice 3.11. Deux points A et B du plan étant donnés ainsi qu'un nombre réel k, rappeler ce qu'est l'ensemble des points M tels que $MA/MB = k$ (exercice 2.8), et déterminer l'ensemble des points M tels que $MA/MB > k$ puis tels que $MA/MB < k$.

Exercice 3.12. Étant donnés deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, trouver toutes les similitudes envoyant $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

---

[5] C'est pourquoi on appelle parfois ce cercle *cercle des neuf points*, bien qu'il contienne beaucoup plus de neuf points... et même beaucoup plus de neuf points « remarquables ».

Exercice 3.13. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites, F et F' deux points. On suppose que $F \notin \mathcal{D}$, $F' \notin \mathcal{D}'$. Montrer qu'il existe une similitude directe σ telle que $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$ et $\sigma(F) = F'$.

Exercice 3.14. Soit ABC un triangle. La médiatrice de BC coupe le cercle circonscrit en deux points I et J. On appelle J celui des deux qui est du même côté de BC que A (figure 10). Montrer que AI et AJ sont les bissectrices (respectivement intérieure et extérieure) de l'angle en A du triangle.

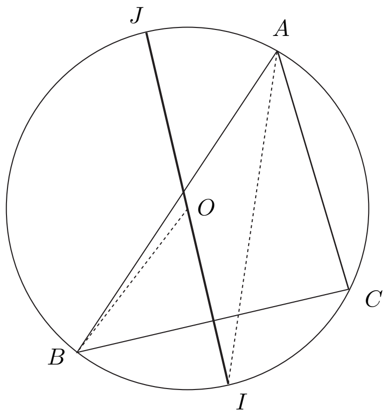


FIGURE 10

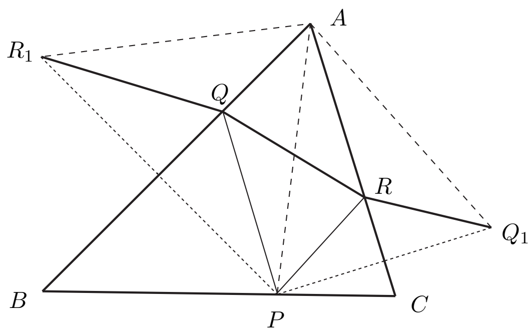


FIGURE 11

Exercice 3.15. Soient D, E et F les symétriques de l'orthocentre d'un triangle ABC par rapport à ses trois côtés. Montrer que ces points sont sur le cercle circonscrit à ABC. On suppose que les angles du triangle ABC sont aigus. Montrer que les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures du triangle DEF.

On donne un triangle DEF. Construire un triangle ABC dont les hauteurs soient les bissectrices intérieures du triangle DEF.

***Exercice 3.16* (Inégalité d'Euler)**. Soient ABC un triangle non équilatéral, $\mathcal{C}(O, R)$ son cercle circonscrit et $\mathcal{C}'(I, r)$ son cercle inscrit. La droite OI intersecte $\mathcal{C}$ en X et Y et la droite AI intersecte $\mathcal{C}$ en A'. Montrer que les triangles AXI et $YA'I$ sont semblables et que le triangle BIA' est isocèle. En déduire que

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ et que } R \geq 2r$$

(inégalité d'Euler).

On peut aussi déduire cette inégalité du théorème d'Erdős-Mordell (exercice 3.23) et de l'exercice 3.15. Indiquer comment.

***Exercice 3.17* (Problème de Fagnano)**. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. On cherche trois points P, Q et R sur ses trois côtés de façon que le périmètre de PQR soit minimal. Montrer qu'il existe une solution, puis construire les trois points qui réalisent cette solution.

On pourra considérer d'abord un point P arbitraire du segment BC et ses symétriques Q_1 et R_1 par rapport aux deux autres côtés (figure 11) pour minimiser le périmètre de PQR, P étant fixé, puis faire varier P.

Montrer qu'alors les hauteurs de ABC sont les bissectrices intérieures de PQR.

Exercice 3.18. Soit ABC un triangle. Une droite D passant par A coupe la droite BC en P. Montrer que D est une bissectrice de l'angle en A si et seulement si

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.$$

***Exercice 3.19* (Arcs capables)**. Soient A et B deux points distincts du plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ et soit α un nombre réel. Trouver le lieu des points M tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ (resp. (MA, MB), resp. l'angle géométrique $\widehat{AMB}$) ait pour mesure α.

***Exercice 3.20* (Cas d'égalité des triangles)**. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Avec chacune des hypothèses suivantes, montrer que ABC et $A'B'C'$ sont isométriques (c'est-à-dire qu'il existe une isométrie φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$).

(1) Premier cas d'égalité, « un angle égal entre deux côtés égaux », en clair :
$$AB = A'B', \quad AC = A'C' \quad \text{et} \quad A = A'$$
(A désignant ici la mesure de l'angle en A).

(2) Deuxième cas d'égalité, « un côté égal entre deux angles égaux », en clair :
$$AB = A'B', \quad A = A' \quad \text{et} \quad B = B'.$$

(3) Troisième cas d'égalité, « trois côtés égaux », en clair :
$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \text{et} \quad CA = C'A'.$$

***Exercice 3.21* (Extrait du sujet d'examen, juin 2006)**. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathcal{E}$ deux à deux distincts qui forment un carré.

(1) Montrer qu'il existe une et une seule isométrie $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = C$, $\varphi(C) = D$ et $\varphi(D) = A$.

(2) Soit $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une rotation de centre A, et soit $h : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une homothétie de centre A. Posons $B' = (h \circ \psi)(B)$, $C' = (h \circ \psi)(C)$ et $D' = (h \circ \psi)(D)$. Notons M le point de $\mathcal{E}$ tel que $ADMB'$ soit un parallélogramme. Montrer que les droites AM et BD' sont orthogonales.

***Exercice 3.22* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2002)**. Soit ABC un triangle d'un plan affine euclidien. On appelle α, β et γ des mesures des angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

(1) Quelle est la nature de la transformation $\varphi = \rho_{A,\alpha} \circ \rho_{B,\beta} \circ \rho_{C,\gamma}$?

(2) On appelle J le point de contact du cercle inscrit dans le triangle avec la droite AC. Quelle est l'image de J par φ ? Déterminer complètement φ.

***Exercice 3.23* (Le théorème d'Erdős-Mordell)**. Soit P un point à l'intérieur d'un triangle ABC. On appelle a, b, c les trois côtés, r_a, r_b, r_c les distances de P aux trois côtés et R_a, R_b, R_c les longueurs PA, PB, PC (figure 12).

(1) Supposons que $P \in BC$. Montrer que l'aire de ABC est égale à $\frac{1}{2}(br_b + cr_c)$. En déduire que $aR_a \geq br_b + cr_c$.

(2) À l'aide d'une homothétie de centre A, montrer que cette égalité est vraie pour tout P.

(3) En utilisant l'image de P par la réflexion de droite la bissectrice intérieure de l'angle en A, montrer que $aR_a \geq br_c + cr_b$.

(4) En déduire que
$$R_a + R_b + R_c \geq \frac{b^2 + c^2}{bc} r_a + \frac{c^2 + a^2}{ac} r_b + \frac{a^2 + b^2}{ac} r_c$$
et finalement que
$$R_a + R_b + R_c \geq 2(r_a + r_b + r_c)$$
(c'est le théorème d'Erdős-Mordell[6]).

(5) Montrer que c'est une égalité si et seulement si ABC est équilatéral et P est son centre.

***Exercice 3.24* (Extrait du sujet d'examen, juin 2002)**. (1) On donne deux cordes parallèles AB et CD d'un cercle de centre O. Montrer que les angles au centre $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$ sont égaux.

(2) Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidien et soient D_1, D_2, D_3 trois directions de droites. Soient M_0 un point de $\mathcal{C}$, M_1 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_1 passant par M_0 avec $\mathcal{C}$, M_2 l'autre point d'intersection de la parallèle à D_2 passant par M_1 avec $\mathcal{C}$, *etc.* On définit de cette façon des points M_i pour $i \geq 0$ (figure 13). Montrer que $M_6 = M_0$.

***Exercice 3.25* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2002, mai 2010)**. Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'un plan affine euclidien. Par un point A extérieur à $\mathcal{C}$, on mène

– une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points B et C

[6] Cette démonstration est due à V. Komornik.

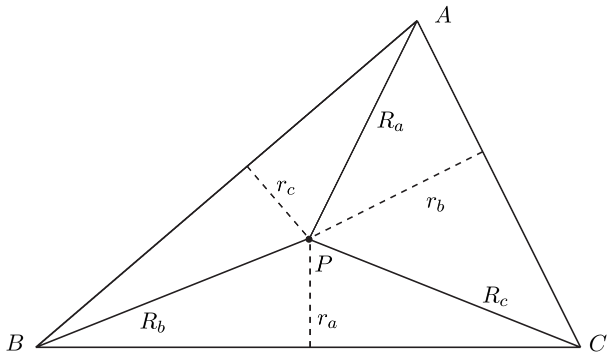


FIGURE 12

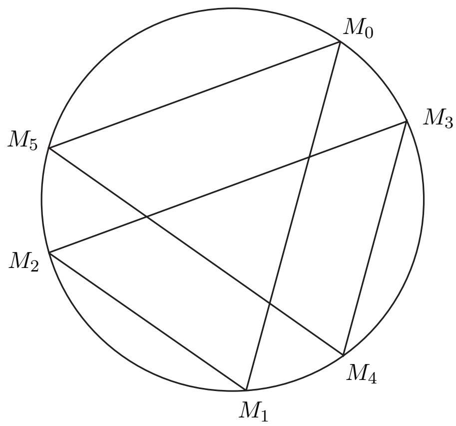


FIGURE 13

– une tangente à $\mathcal{C}$, tangente en un point T.

Soit M un point de la droite AT. La parallèle à TC passant par M coupe la droite AC en N. Montrer que les points M, N, B et T sont cocycliques.

Exercice 3.26 **(Extrait du sujet d'examen, juin 2003, mai 2010)**. On se place dans un plan affine euclidien. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. On appelle E le projeté orthogonal de A sur la diagonale BD, F celui de B sur la diagonale AC. On suppose que AC et BD ne sont pas orthogonales, de sorte que $E \neq F$.

(1) Que peut-on dire des angles de droites (BE, EF) et (AB, AC) ?
(2) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si les droites EF et CD sont parallèles.

Exercice 3.27 **(Théorème de Miquel)**. On se donne quatre cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ tels que $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en A et A', $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en B et B', $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en C et C' et enfin $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en D et D'. Montrer que A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si A', B', C' et D' le sont (figure 14).

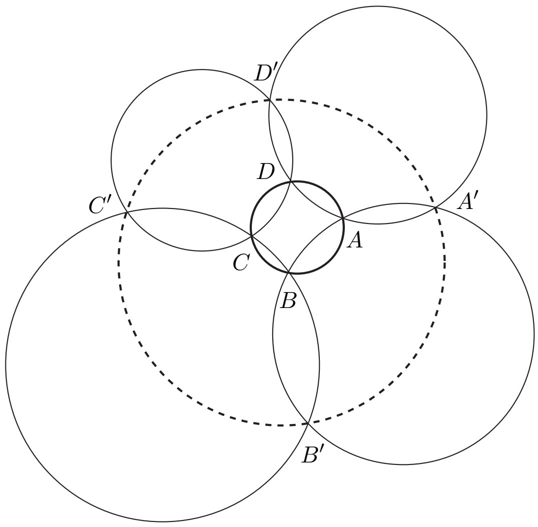


FIGURE 14

Exercice 3.28 **(La droite de Simson)**. Soit ABC un triangle. À tout point M du plan, on peut associer ses projetés orthogonaux P, Q et R sur BC, CA, AB. Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC. À tout point M du cercle circonscrit est ainsi associée une droite, sa *droite de Simson* (figure 15).

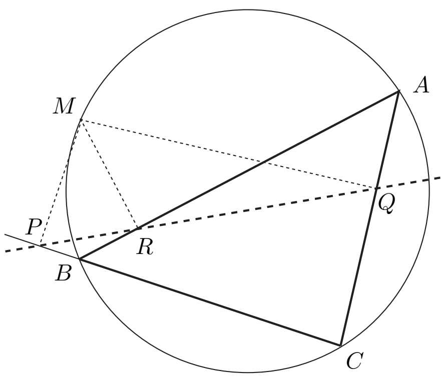


FIGURE 15. La droite de Simson

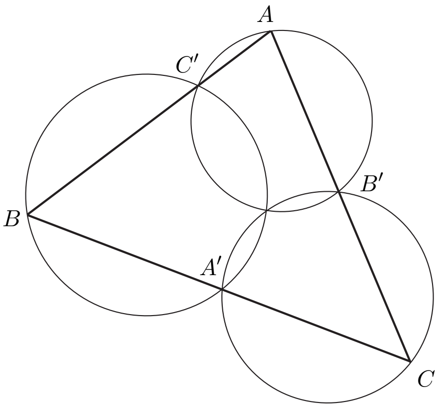


FIGURE 16. Le pivot

***Exercice 3.29* (La droite de Steiner)**. Démontrer que les symétriques P', Q' et R' d'un point M par rapport aux trois côtés BC, CA et AB d'un triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit. Montrer que, si c'est le cas, la droite $P'Q'R'$ (*droite de Steiner* de M) passe par l'orthocentre de ABC.

***Exercice 3.30* (Le pivot)**. Soit ABC un triangle et soient A', B' et C' trois points (distincts de A, B et C) situés sur ses côtés BC, CA et AB. Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C'$, $BC'A'$ et $CA'B'$ ont un point commun, le *pivot* (voir la figure 16).

Exercice 3.31. On donne trois droites parallèles D_1, D_2 et D_3. Construire un triangle équilatéral ABC avec A sur D_1, B sur D_2 et C sur D_3.

Exercice 3.32. Soit ABC un triangle et soient β et γ les deux points tels que βAB et γAC soient rectangles isocèles extérieurs à ABC et d'hypoténuses AB, AC respectivement. Soit I le milieu de BC. Montrer que $\beta I\gamma$ est rectangle isocèle en I.

***Exercice 3.33* (Un théorème attribué à Napoléon)**. Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe, P, Q, R et S les quatre points tels que APB, BQC, CRD et DSA soient quatre triangles rectangles (en P *etc*) isocèles extérieurs au quadrilatère. Montrer que $PR = QS$ et que $PR \perp QS$. Montrer que $PQRS$ est un carré si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

***Exercice 3.34* (Un billard rond)**. On lance une boule d'un certain point d'un billard rond. Montrer que, à l'intérieur du billard, il existe un cercle qui ne sera pas coupé par la trajectoire de la boule.[7]

Exercice 3.35. Sur un cercle de centre O, on donne trois arcs interceptés par des angles au centre de mesure $\pi/3$, AB, CD, EF. On appelle M, N et P les milieux des cordes BC, DE et FA et B', E' les milieux de OB et OE. Montrer que $PB'E'$ est équilatéral ainsi que MNP.

***Exercice 3.36* (Point de Fermat)**. Sur les trois côtés AB, BC et CA d'un triangle et à l'extérieur de celui-ci on construit trois triangles équilatéraux ABC', BCA' et CAB'.

Montrer que AA', BB' et CC' sont concourantes en un point F, qu'elles font entre elles des angles de $2\pi/3$ et que les segments AA', BB' et CC' ont la même longueur.

On suppose maintenant que tous les angles du triangle ont des mesures inférieures à $2\pi/3$. Montrer que la fonction

$$M \longmapsto MA + MB + MC$$

a un minimum, atteint en F.

***Exercice 3.37* (Groupes d'isométries d'une figure, suite)**. Trouver toutes les isométries qui préservent

(1) un segment,

[7] On admet qu'une boule de billard lancée d'un point donné a une trajectoire composée de segments dont les extrémités appartiennent au bord de billard ; la boule rebondit selon la règle "l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion" (par rapport à la tangente au bord du billard au point de rebondissement).

(2) un losange ou un rectangle non carrés (on expliquera pourquoi ces groupes sont isomorphes),
(3) un triangle équilatéral, un carré, plus généralement un polygone régulier à n côtés,
(4) un cercle, la réunion d'un cercle et d'une droite (au fait, quelles sont toutes les applications affines qui préservent un cercle ?),
(5) le réseau des entiers dans $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes de la forme $m + in$ avec m et n dans $\mathbb{Z}$).

***Exercice 3.38* (Groupes d'isométries d'une figure, suite).** Existe-t-il une figure plane dont le groupe des déplacements soit isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_4$? Même question avec les isométries.

***Exercice 3.39*.** On donne deux points (distincts) A et A' et deux nombres réels θ et k (avec $k > 0$). Où se trouve le centre de la similitude directe d'angle θ et de rapport k qui envoie A sur A' ?

***Exercice 3.40* (Cas de similitude des triangles).** Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Avec chacune des hypothèses suivantes, montrer que ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables (c'est-à-dire qu'il existe une similitude directe φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$).
(1) Premier cas de similitude, « un angle égal entre deux côtés proportionnels », en clair :
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \text{ et } (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$
(2) Deuxième cas de similitude, « deux angles égaux », en clair :
$$(B'C', B'A') = (BC, BA) \text{ et } (C'A', C'B') = (CA, CB)$$
(égalité d'angles de droites).

***Exercice 3.41*.** On fixe une droite $\mathcal{D}$ et un point A hors de $\mathcal{D}$. À un point B variant sur $\mathcal{D}$, on associe l'unique point C tel que ABC reste directement semblable à un triangle fixé. Trouver le lieu de C et celui de l'orthocentre de ABC quand B parcourt $\mathcal{D}$.

***Exercice 3.42*.** Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles et S un point à l'extérieur de la bande qu'elles déterminent. Une droite variable issue de S coupe $\mathcal{D}$ en M et $\mathcal{D}'$ en M'. On demande de déterminer le lieu des points de contact T et T' des tangentes issues de S au cercle de diamètre MM'.

***Exercice 3.43*.** On donne un arc de cercle Γ d'extrémités A et B.
- À tout point M de Γ distinct de A et B, on associe le point M' de la demi-droite BM d'origine B tel que $BM' = AM$. Quel est le lieu des points M' quand M parcourt Γ ?
- À tout point M de Γ distinct de A et B, on associe le point M'' de la demi-droite opposée à la demi-droite MA d'origine M tel que $MM'' = BM$. Quel est le lieu des points M'' quand M parcourt Γ ?

***Exercice 3.44*.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O et O' sécants en deux points I et J et soit σ la similitude directe de centre I telle que $\sigma(O) = O'$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ et que, pour tout point M de $\mathcal{C}$, les points M, $\sigma(M)$ et J sont alignés.

Déterminer le lieu de la projection orthogonale P de I sur $M\sigma(M)$ quand M décrit $\mathcal{C}$.

Déterminer le lieu du centre de gravité du (et du centre du cercle circonscrit au) triangle $IM\sigma(M)$ quand M décrit $\mathcal{C}$.

***Exercice 3.45* (Le théorème de Pascal pour les cercles).** On considère six points A, B, C, D, E et F d'un cercle $\mathcal{C}$. On suppose que l'hexagone $ABCDEF$ n'a pas de côtés parallèles. On considère les points d'intersection
$$S = AB \cap DE, \quad T = CD \cap AF \quad \text{et} \quad U = BC \cap EF.$$
On veut montrer que S, T et U sont alignés (figure 17). Soient P, Q et R les points d'intersection
$$CD \cap FE, \quad FE \cap AB \quad \text{et} \quad AB \cap CD.$$
En considérant les droites SDE, ATF et BCU comme des transversales aux côtés de PQR, montrer l'égalité
$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SR}} \cdot \frac{\overline{TR}}{\overline{TP}} \cdot \frac{\overline{UP}}{\overline{UQ}} = 1$$
et conclure.

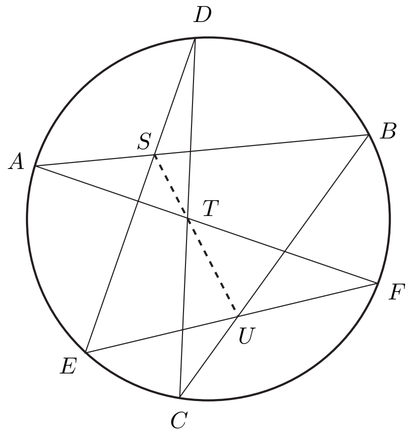


FIGURE 17. Le théorème de Pascal

4. Produit vectoriel, aires, barycentres

Exercice 4.1 **(Double produit vectoriel)**. Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3, montrer que, pour tous les vecteurs u, v et w, on a

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w.$$

Le produit vectoriel est-il associatif ?

Exercice 4.2. Dans un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 3 muni d'une base orthonormée directe (e_1, e_2, e_3), montrer que

$$(u \wedge v) \cdot w = \text{dét}_{(e_1,e_2,e_3)}(u, v, w)$$

et que ce nombre est le volume (orienté) du parallélépipède construit sur les trois vecteurs u, v et w.

Exercice 4.3. Soient A, B, C et D quatre points d'un espace euclidien.

(1) Montrer que
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = 0.$$
(2) Montrer que si les faces du tétraèdre $ABCD$ ont la même aire, alors elles sont isométriques.
(3) Dans la situation où ces faces sont isométriques, le tétraèdre est-il nécessairement régulier ?

Exercice 4.4. Soient A', B' et C' les milieux respectifs des trois côtés BC, CA et AB d'un triangle et soit G son centre de gravité. Montrer que les six petits triangles tels que $AB'G$ ont même aire.

Exercice 4.5. Soient ABC un triangle, U, V et W les projections du centre I du cercle inscrit sur les trois côtés BC, CA et AB, a, b et c les longueurs de ces côtés.

Quelles sont les coordonnées barycentriques du point I dans le triangle ABC ?

Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CU}$. En déduire les valeurs des rapports

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{UC}}, \quad \frac{\overline{VC}}{\overline{VA}}, \quad \frac{\overline{WA}}{\overline{WB}}$$

et montrer que les droites AU, BV et CW sont concourantes (en un point appelé le *point de Gergonne* du triangle.

5. Géométrie euclidienne dans l'espace

Pour ces exercices, on se place dans un espace affine euclidien de dimension 3.

Exercice 5.1. Considérons quatre points A, B, C et D tels que les droites AB et CD soient orthogonales et les droites AC et BD soient orthogonales. Montrer que les droites AD et BC sont aussi orthogonales.

***Exercice 5.2* (Perpendiculaire commune, rappels)**. Si les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas coplanaires, montrer qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si M_1 et M_2 sont les deux points d'intersection de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, montrer que M_1M_2 est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 5.3. Soient $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites deux à deux non coplanaires. Notons Δ_1 (respectivement, Δ_2, Δ_3) la perpendiculaire commune de $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ (respectivement, de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$, de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$). Montrer que $\mathcal{D}_1$ (respectivement, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$) est la perpendiculaire commune de Δ_2 et Δ_3 (respectivement, de Δ_1 et Δ_3, de Δ_1 et Δ_2).

Exercice 5.4. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non coplanaires, et soit $\mathcal{P}$ un plan. Construire un segment parallèle à $\mathcal{P}$, ayant une longueur donnée et les extrémités sur les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 5.5. Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans non parallèles. Considérons quatre points A, B, C et D tels que leur projetés orthogonaux sur chacun des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ soient les sommets d'un parallélogramme. Est-il vrai que les points A, B, C et D sont les sommets d'un parallélogramme ?

Exercice 5.6. Soient A, B, C et D quatre points n'appartenant pas au même plan. Combien y a-t-il de plans $\mathcal{P}$ tels que les distances des points A, B, C et D à $\mathcal{P}$ soient égales ?

Exercice 5.7. Considérons un tétraèdre tel que les centres de ses sphères inscrite et circonscrite coïncident. Montrer que les faces de ce tétraèdre sont des triangles isométriques.

6. Isométries dans l'espace

Exercice 6.1. Que peut-on dire de l'angle de la rotation $\begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$?

Exercice 6.2. Soient f et g deux rotations. Quand l'angle de $g\circ f$ est-il la somme des angles de f et g ?

Exercice 6.3. Quelle est la composée de trois réflexions de plans parallèles ?

Exercice 6.4. Pour qu'une translation et une rotation commutent, il faut et il suffit que le vecteur de la translation dirige l'axe de la rotation.

Exercice 6.5. La composée d'une rotation et d'une translation est, en général, un vissage.

***Exercice 6.6* (Demi-tours)**. Soit s_P la réflexion (vectorielle) de plan P. Montrer que l'application linéaire $-s_P$ est un demi-tour.

Que peut-on dire de la composée de deux demi-tours ? Quand la composée de trois demi-tours est-elle un demi-tour ?

Montrer que $O^+(3)$ est engendré par les demi-tours et que tous les demi-tours sont conjugués dans $O^+(3)$.

Exercice 6.7. Décrire la composée de trois réflexions de plans orthogonaux deux à deux.

Exercice 6.8. Soit P un polygone régulier à n côtés dans un plan affine euclidien. Montrer que le groupe des déplacements du plan qui préservent P est isomorphe au groupe cyclique d'ordre n, que le groupe des isométries du plan qui préservent P est isomorphe au groupe diédral[8] D_{2n} d'ordre $2n$.

On considère maintenant que $\mathcal{P}$ est un plan d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3. Montrer que le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$ qui préservent le polygone P est isomorphe au groupe diédral D_{2n}.

Soit M un point de $\mathcal{E}$ hors de $\mathcal{P}$ qui se projette sur le centre de P dans $\mathcal{P}$. On considère la pyramide de sommet M construite sur le polygone P (si $n=3$, on choisit M de façon que cette pyramide ne soit pas un tétraèdre régulier). Montrer que le groupe des déplacements de $\mathcal{E}$ qui la préservent est isomorphe au groupe cyclique d'ordre n.

[8] Ceci peut être considéré, en cas de besoin, comme une *définition* de D_{2n}.

Exercice 6.9 **(Tétraèdre régulier)**. Montrer que, dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales et que leur perpendiculaire commune passe par leurs milieux.

Montrer que les diagonales des faces d'un cube forment deux tétraèdres réguliers. Étant donnée une isométrie qui préserve le cube, quel est son effet sur un des ces tétraèdres ?

Montrer que le groupe des isométries (resp. des déplacements) qui préservent un tétraèdre régulier est un sous-groupe d'indice 2 du groupe des isométries (resp. des déplacements) qui préservent un cube.

Exercice 6.10. Reprendre l'exercice 1.20. Montrer que si $ABCD$ est un tétraèdre régulier, alors toutes les transformations affines qui le préservent sont des isométries.

Exercice 6.11 **(Extrait du sujet d'examen, juin 2003)**. On se place dans un espace affine euclidien. Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier. On appelle I le milieu de AB. Montrer que $AB \perp IC$ et $AB \perp ID$. En déduire que les droites AB et CD sont orthogonales : dans un tétraèdre régulier, deux arêtes opposées sont orthogonales.

On considère la composition
$$r = s_{AD} \circ s_{AC} \circ s_{AB}$$
des trois demi-tours (rotations d'angle π) autour des arêtes issues de A.

(1) Montrer que r est une rotation dont l'axe passe par A. Dans le plan BCD, on trace la parallèle à BC passant par D, la parallèle à CD passant par B et la parallèle à DB passant par C. On trouve ainsi un triangle $B'C'D'$ ($B'C'$ est parallèle à BC, etc.). Déterminer $r(C')$. Quel est l'axe de la rotation r ?
(2) On pose $B_1 = s_{AC}(B)$ et $B_2 = s_{AD}(B_1)$. Montrer que $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BC}$, puis que AB_1 et AD sont orthogonales. Montrer que le triangle ABB_2 est équilatéral.
(3) Montrer que le triangle $BC'A$ est isocèle rectangle (en B). Soit H le projeté orthogonal de B sur AC'. Vérifier que H est le milieu de AC'. Calculer les longueurs HB et HB_2. En déduire que HB_2 est orthogonale à HB.
(4) Que peut-on dire de l'angle de la rotation r ?

Exercice 6.12 **(Isométries préservant un tétraèdre)**. Soit G le groupe de toutes les isométries qui préservent un tétraèdre régulier $ABCD$. Montrer qu'une isométrie préservant le tétraèdre $ABCD$ préserve l'ensemble des quatre points $\{A, B, C, D\}$. En déduire qu'il existe un homomorphisme
$$G \longrightarrow \mathfrak{S}_4$$
du groupe G dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Trouver une isométrie qui fixe A et B et échange C et D. En déduire que le groupe des isométries qui préservent un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 6.13 **(Déplacements préservant un cube)**. En utilisant les exercices 6.9 et 6.12, montrer que le groupe des déplacements qui préservent un cube a 24 éléments. Faire une liste de tous ces déplacements.

Montrer qu'un déplacement qui préserve un cube transforme une grande diagonale en une grande diagonale. En déduire un homomorphisme du groupe des déplacements du cube dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Montrer que c'est un isomorphisme.

Exercice 6.14 **(La question de cours de l'examen de mai 2010)**. Dans cette série d'assertions, E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$, $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par E, $f : E \to E$ est une application linéaire et $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une application affine. Dans chaque cas, on demande de dire si l'assertion est vraie ou fausse.

(1) Il existe une unique application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ associée à φ.
(2) Il existe une unique application affine associée à f.
(3) Si φ est bijective, alors $\overrightarrow{\varphi}$ est bijective.
(4) Si $\overrightarrow{\varphi}$ est injective, alors φ est bijective.

À partir d'ici, l'espace affine $\mathcal{E}$ est supposé euclidien et la dimension n vaut 3.

(5) La composée des deux rotations par rapport aux deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est une réflexion de plan engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
(6) Étant donné un plan $\mathcal{P}$, il existe des rotations dont la composition est la réflexion de plan $\mathcal{P}$.
(7) Une symétrie centrale est un déplacement.

(8) Une symétrie par rapport à une droite (demi-tour) est un déplacement.
(9) La composée de trois réflexions n'est jamais une rotation.
(10) La composée de deux réflexions a toujours un points fixe.

7. Coniques

Exercice 7.1 **([Extrait du sujet d'examen, juin 2003)**. Quelle est la nature de l'ensemble, défini dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ par l'équation
$$x^2 - xy + y^2 = 1?$$

Exercice 7.2. On se place dans un plan euclidien. Décrire les ensembles définis dans un repère orthonormé par
$$x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x+y) = 0, \quad x^2 + xy + y^2 = 1, \quad xy + \lambda(x+y) + 1 = 0,$$
$$y^2 = \lambda x^2 - 2x, \quad x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1 = 0.$$

Exercice 7.3. On donne une hyperbole. Écrire son équation dans un repère d'origine son centre et d'axes ses asymptotes.

Exercice 7.4. Dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé d'origine O, peut-on écrire l'équation d'une parabole sachant que
- son sommet est O, son axe l'axe des x et son paramètre 2 ?
- son foyer est $F = (4, 3)$, sa directrice $D : y = -1$? On déterminera aussi son sommet et son paramètre.

Exercice 7.5. Que peut-on dire de l'image d'une ellipse par une application affine ? de celle d'un cercle ?

Exercice 7.6. Montrer que la droite qui joint le centre d'une ellipse au milieu d'une corde MM' passe par le point commun aux tangentes à l'ellipse en M et M'.

Exercice 7.7. Paramétrer une branche de l'hyperbole d'équation
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
à l'aide de fonctions hyperboliques.

Exercice 7.8. On donne deux paraboles dans un plan affine euclidien. Montrer qu'elles sont (directement) semblables.

On donne deux coniques propres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ dans un plan affine euclidien. À quelle(s) condition(s) sont-elles semblables ?

Exercice 7.9. On donne une conique propre $\mathcal{C}$ d'un plan affine euclidien. Quel est le groupe des isométries qui préservent $\mathcal{C}$?

Exercice 7.10. Soit M un point d'une parabole $\mathcal{P}$ de sommet S. La normale[(9)] à $\mathcal{P}$ en M coupe l'axe en N, la tangente le coupe en T. On appelle m le projeté orthogonal de M sur l'axe.

Montrer que mN ne dépend pas de M. Quelle est sa valeur ?

Montrer que S est le milieu de mT. Quel est le milieu de NT ?

Exercice 7.11. Dans un plan euclidien, on donne une parabole définie dans un repère orthonormé par l'équation $y = x^2$. En utilisant une règle et un compas (la règle permet de tracer une droite contenant deux points déjà construits, et le compas permet de tracer le cercle dont le centre est un point donné et dont le rayon est égal à la distance entre deux points donnés), construire les axes $x = 0$ et $y = 0$.

Exercice 7.12. Écrire l'équation d'une conique de foyer F dans des coordonnées polaires dont l'origine est en F.

(9) La droite perpendiculaire à la tangente et passant par M.

Exercice 7.13. Dans un plan affine euclidien, on donne un point F, une droite D ne passant pas par F et un réel strictement positif e. Décrire l'ensemble

$$\{M \mid MF \leq e\, d(M, D)\}?$$

Exercice 7.14. Dans un plan affine euclidien, on donne deux points F et F' et un nombre réel positif a. Décrire les ensembles

$$\{M \mid MF + MF' \leq 2a\}, \qquad \{M \mid MF' - MF \leq 2a\}?$$

Exercice 7.15. On donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre F et un point F' à l'intérieur de ce cercle. Quel est le lieu des centres des cercles tangents à $\mathcal{C}$ et passant par F' ? Même question avec F' extérieur à $\mathcal{C}$.

***Exercice 7.16* (Extrait du sujet d'examen, septembre 2002)**. Dans un plan affine euclidien, on considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un de ses diamètres AA'. À tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et A', on associe le point M' obtenu ainsi :
- On projette M sur la médiatrice de AA', obtenant un point K,
- M' est le point d'intersection des droites OM et AK.

Montrer que M se trouve sur une parabole de foyer O et de directrice la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Étudier la réciproque.

***Exercice 7.17* (Mouvement des planètes)**. Si l'on en croit les lois de Kepler, les planètes décrivent des trajectoires planes décrites en coordonnées polaires (ρ, θ) par une équation $\rho = f(\theta)$, où la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1}{f} + \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{f}\right) = \text{ constante}$$

(la constante dépend des masses et de constantes universelles, elle n'est pas nulle). Déterminer la nature de ces trajectoires.

Exercice 7.18. On donne trois droites en position générale (elles ne sont pas concourantes et deux d'entre elles ne sont jamais parallèles) dans un plan affine euclidien. On suppose que $\mathcal{P}$ est une parabole tangente à ces trois droites. Montrer que les trois projections du foyer F de $\mathcal{P}$ sur les trois droites sont alignées sur la tangente au sommet. En déduire que F est sur le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois droites. Que peut-on dire de la tangente au sommet ? de la directrice ?

Quel est le lieu des foyers des paraboles tangentes aux trois droites (on traitera avec soin le cas des sommets du triangle) ?

Références

[1] M. Audin – *Géométrie*, Edp-Sciences, 2006, deuxième édition.
[2] M. Berger – *Géométrie*, CEDIC, 1977, Réédition Nathan, 1990.
[3] R. Deltheil & D. Caire – *Géométrie & Compléments de géométrie*, 1951, Réimpression Gabay.
[4] C. Lebossé & C. Hémery – *Géométrie, classe de mathématiques*, Nathan, 1961, Réimpression Gabay 1990.
[5] P. Sauser – *Algèbre et géométrie*, Ellipses, 1986.

Version du 6 février 2011

Michèle Audin • *E-mail :* michele.audin@math.unistra.fr • *Url :* http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin