

---

QUATRE-VINGT-DOUZE EXERCICES CLASSIQUES  
DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE  
POUR LA MAÎTRISE DE MATHÉMATIQUES

2004-2005

Michèle Audin

---

On trouvera de nombreux autres exercices de calcul différentiel et notamment sur les sous-variétés dans [3] et de géométrie différentielle dans [2] (d'où sont tirés la plupart de ceux présentés ici) et dans [1].

### 1. Sous-variétés

Pour tous ces exercices, il est indispensable de faire une (ou des) figure(s).

**Exercice 1.1.** Montrer que la partie de  $\mathbf{R}^3$  définie par  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  est une sous-variété de  $\mathbf{R}^3$ , sauf en  $(0, 0, 0)$ .

**Exercice 1.2.** Montrer que la partie de  $\mathbf{R}^2$  définie par  $y = |x|$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbf{R}^2$ .

**Exercice 1.3.** L'application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}^2$  définie par

$$t \longmapsto (t^2, t^3)$$

est-elle une immersion ?

**Exercice 1.4.** Dessiner l'image de l'application  $t \mapsto (\cos t, 2 \cos t \sin t)$ . Paramètre-t-elle une sous-variété de  $\mathbf{R}^2$  ?

**Exercice 1.5.** Montrer que

$$\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

est une sous-variété de  $\mathbf{R}^4$  homéomorphe à  $S^1 \times S^1 = T^2$  (voir aussi l'exercice 1.10). Déterminer une sous-variété de  $\mathbf{R}^{2n}$  homéomorphe à  $T^n$ .

**Exercice 1.6.** Montrer que le groupe  $\mathrm{SL}(n; \mathbf{R})$  est une sous-variété de l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$ . Question plus difficile, à traiter pour  $n = 2$  : qu'en est-il de l'espace des matrices vérifiant  $\det A = 0$  ?

**Exercice 1.7.** Montrer que le groupe orthogonal  $O(n)$  est une sous-variété de l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$ . Quelle est sa dimension ?

**Exercice 1.8.** On considère la sphère unité

$$S^{n-1} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\|^2 = 1 \right\}.$$

On veut montrer que c'est une sous-variété de dimension  $n - 1$  de  $\mathbf{R}^n$ . Des critères donnés dans le théorème des sous-variétés, lequel vous semble le mieux adapté ?

Démontrer deux fois cette propriété, en utilisant les critères « submersion » puis « graphe ».

**Exercice 1.9 (Quadriques).** Dans  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p$ , on considère la quadrique  $Q$  d'équation

$$\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$$

(la figure 1 représente les différents cas possibles quand  $n + p = 3$ ). Montrer que c'est une sous-variété

FIGURE 1. Quadriques

de dimension  $n + p - 1$  et qu'elle est homéomorphe (et même difféomorphe) à  $S^{n-1} \times \mathbf{R}^p$ .

**Exercice 1.10 (Le tore de révolution).** On suppose que  $R > r > 0$ . Montrer que la partie de  $\mathbf{R}^3$  définie par l'équation

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2$$

est une sous-variété de  $\mathbf{R}^3$ , qu'on demande de dessiner.

**Exercice 1.11.** À quelle condition l'application

$$t \longmapsto (\cos t, \sin t, \cos(\alpha t), \sin(\alpha t))$$

paramètre-t-elle une sous-variété de  $\mathbf{R}^4$  ?

## 2. Variétés topologiques

Les variétés sont toujours supposées séparées.

**Exercice 2.1.** Une variété topologique est un espace localement compact et localement connexe. Une variété topologique est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs<sup>(1)</sup>.

**Exercice 2.2.** Montrer que l'espace topologique  $V$  est une variété topologique de dimension  $n$  si et seulement si il est séparé et possède un recouvrement par des ouverts homéomorphes à des boules de  $\mathbf{R}^n$ .

**Exercice 2.3.** Montrer que le graphe d'une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$  est une variété topologique de dimension 1. Comparer avec l'exercice 1.2.

**Exercice 2.4.** Montrer que le sous-espace de  $\mathbf{R}^2$  défini par  $xy = 0$  n'est pas une variété topologique. Et le sous-espace de  $\mathbf{R}^3$  défini par  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  non plus.

## 3. Variétés différentielles et leurs fibrés tangents

**Exercice 3.1 (Un atlas pour le cercle).** On considère l'application  $h : \mathbf{R} \rightarrow S^1$  définie par

$$h(t) = (\cos t, \sin t).$$

À l'aide de  $h|_{]0,2\pi[}$  et de  $h|_{]-\pi,\pi[}$ , construire un atlas pour le cercle. Écrire le changement de carte.

**Exercice 3.2.** Montrer que le tore  $T^n = \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$  est une variété compacte de dimension  $n$ .

**Exercice 3.3 (Un atlas pour la sphère).** Écrire explicitement les projections stéréographiques  $\varphi_N$  de pôle nord et  $\varphi_S$  de pôle sud ainsi que la composition

$$\mathbf{R}^n - \{0\} \xrightarrow{\varphi_N} S^n - \{N, S\} \xrightarrow{\varphi_S} \mathbf{R}^n - \{0\}.$$

<sup>(1)</sup>C'est le cas pour tous les espaces localement connexes.

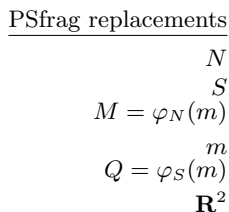


FIGURE 2. Projections stéréographiques

**Exercice 3.4 (La bande de Möbius).** On définit la *bande de Möbius*  $M$  comme le quotient de l'espace  $[0, 1] \times ]-1, 1[$  par la relation d'équivalence qui identifie  $(0, t)$  et  $(1, -t)$ . Montrer que  $M$  peut être munie d'une structure de variété différentielle.

**Exercice 3.5.** Si  $V$  est une variété de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ), chaque composante connexe par arcs de  $V$  a une dimension bien définie<sup>(2)</sup>.

**Exercice 3.6.** Montrer que la projection naturelle  $p : S^n \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$  qui, à un vecteur unitaire, associe la droite vectorielle qu'il engendre, est une application  $\mathcal{C}^\infty$  et même un difféomorphisme local<sup>(3)</sup>.

**Exercice 3.7 (Prolongement des polynômes à la sphère de Riemann).** Soit  $P \in \mathbf{C}[z]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ , que l'on considère, aussi, comme une fonction  $P : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ . On considère la sphère unité

$$S^2 \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$$

et on utilise la projection stéréographique de pôle nord ( $N = (0, 1)$ ). Soit  $f : S^2 \rightarrow S^2$  l'application définie par

$$\begin{cases}
 f(x) = \varphi_N^{-1}(P(\varphi_N(x))) \in S^2 & \text{si } x \neq N \\
 f(N) = N.
 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est une fonction continue, une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exercice 3.8.** La multiplication

$$\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n)$$

est une application  $\mathcal{C}^\infty$ . De même le passage à l'inverse

$$\begin{array}{c}
 \mathrm{O}(n) \longrightarrow \mathrm{O}(n) \\
 A \longmapsto A^{-1}.
 \end{array}$$

**Exercice 3.9 (Degré d'une application).** Soient  $V$  et  $W$  deux variétés de la même dimension et  $f : V \rightarrow W$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ . Un point  $a$  de  $V$  est un *point régulier* de  $f$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $a$  tel que  $f|_U$  soit un difféomorphisme local. Un point  $b$  de  $W$  est une *valeur régulière* si tous les points de  $f^{-1}(b)$  sont réguliers ou si  $b \notin \mathrm{Im} f$  (les valeurs régulières ne sont pas nécessairement des valeurs). On suppose que  $V$  est compacte et que  $b \in W$  est une valeur régulière de  $f$ . Montrer que

- $f^{-1}(b)$  est fini
- Il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $b$  tel que pour tout  $z$  dans  $U'$ , la fibre  $f^{-1}(z)$  a le même cardinal que la fibre de  $b$ .

<sup>(2)</sup>C'est vrai aussi pour les variétés topologiques, bien qu'un peu plus difficile à démontrer.

<sup>(3)</sup>Plus généralement, si  $p : E \rightarrow B$  est un revêtement et si l'un des deux espaces est une variété, on peut munir l'autre d'une structure de variété (et d'une seule) telle que  $p$  soit un difféomorphisme local.

*Application : le théorème de d'Alembert.* Soit  $P \in \mathbf{C}[z]$  un polynôme de degré  $n \geq 1$ . On le prolonge en une fonction  $f : S^2 \rightarrow S^2$  comme dans l'exercice 3.7. Montrer que tous les points de  $S^2$  sauf un nombre fini sont des valeurs régulières de  $f$  (considérer  $P'$ ). En déduire que  $P$  a une racine dans  $\mathbf{C}$ .

**Exercice 3.10 (Hypersurfaces projectives).** Soit  $P$  un polynôme homogène en  $n+1$  variables  $x_0, \dots, x_n$ . Montrer que l'équation

$$P(x_0, \dots, x_n) = 0$$

définit une partie  $H$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ . On suppose que les polynômes  $\frac{\partial P}{\partial x_i}$  ne s'annulent pas simultanément. Montrer que  $H$  est une sous-variété de dimension  $n-1$  de  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ .

**Exercice 3.11 (Quadriques projectives).** Soit  $q$  une forme quadratique non dégénérée sur  $\mathbf{R}^4$ . Montrer que l'équation

$$q(x) = 0$$

définit une sous-variété  $Q$  (de dimension 2 ou vide) de  $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ .

- On suppose que la signature de  $q$  est  $(3, 1)$  ou  $(1, 3)$ . Montrer que  $Q$  est difféomorphe à  $S^2$ .
- On suppose que la signature de  $q$  est  $(2, 2)$ . Montrer que  $Q$  est difféomorphe à  $S^1 \times S^1$ .

**Exercice 3.12.** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} ]-\infty, 1[ &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ t &\longmapsto \left( \frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^2+1} \right) \end{aligned}$$

est une immersion injective, mais que son image n'est pas une sous-variété de  $\mathbf{R}^2$ . On demande, évidemment, de dessiner cette image.

**Exercice 3.13 (La surface de Veronese).** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} v : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^6 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx) \end{aligned}$$

définit une immersion de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$  dans  $\mathbf{R}^6$ , une immersion de  $S^2$  dans  $\mathbf{R}^6$ , un plongement de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}^6$ . Montrer que l'image de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est contenue dans  $S^5$  et même dans  $H \cap S^5$  pour un certain hyperplan  $H$  de  $\mathbf{R}^6$ .

Montrer qu'il existe un plongement de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}^4$ .

**Exercice 3.14.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$  une submersion d'un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^p$  et soit  $V = f^{-1}(0)$ . Montrer que l'espace tangent à  $V$  en  $x$  est le sous-espace  $\text{Ker } T_x f$  de  $\mathbf{R}^n$ .

**Exercice 3.15 (Le fibré tangent à la sphère).** On considère la sphère unité  $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ . Montrer que, pour tout  $x \in S^n$ ,  $T_x S^n$  est le sous-espace  $x^\perp$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  et que le fibré tangent  $TS^n$  est la sous-variété de  $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$

$$TS^n = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = 1 \text{ et } x \cdot y = 0 \right\}.$$

**Exercice 3.16 (Le fibré tangent du cercle est trivial).** On considère le cas  $n = 1$  de l'exercice précédent. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbf{R} &\xrightarrow{f} TS^1 \\ (u, v, t) &\longmapsto ((u, v), (-tv, tu)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme et que, pour tout  $(u, v)$ ,  $f|_{\{(u,v)\} \times \mathbf{R}}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathbf{R}$  sur  $T_{(u,v)} S^1$ .

#### 4. Calcul différentiel sur les variétés

**Exercice 4.1 (Un théorème de Borel).** Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite quelconque de nombres réels. Soit  $\rho$  une fonction plateau sur  $\mathbf{R}$ , nulle en dehors de  $] -1, 1[$  et constante égale à 1 sur  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ . On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \rho((|a_n| + n)x).$$

Montrer que  $f$  est une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = a_n$ .

**Exercice 4.2 (Partitions de l'unité).** Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$  et soit  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  un atlas fini de  $V$ . Montrer qu'il existe un recouvrement de  $V$  par des ouverts  $\Omega_i$  tels que  $\overline{\Omega}_i \subset U_i$  et des fonctions  $h_i$  à support dans  $U_i$  et valant 1 sur  $\Omega_i$ .

Soit  $V$  une variété compacte. Soit  $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$  un recouvrement fini de  $V$  par des ouverts. Montrer qu'il existe une famille  $(p_i)_{1 \leq i \leq N}$  de fonctions

$$p_i : V \longrightarrow [0, +\infty[$$

telles que

$$\text{Supp}(p_i) \subset U_i \text{ et } \sum_{i=1}^N p_i \equiv 1.$$

**Exercice 4.3 (Plongement d'une variété compacte dans un espace vectoriel)**

Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$  et soit  $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$  un atlas fini de  $V$ . On utilise les fonctions  $h_i$  données par l'exercice 4.2. Montrer que l'application  $F$  définie par

$$F = (h_1 \varphi_1, \dots, h_N \varphi_N, h_1, \dots, h_N) : V \longrightarrow \mathbf{R}^{(n+1)N}$$

est une immersion injective (et donc un plongement).

**Exercice 4.4.** Montrer que la formule

$$X_{(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)} = (-y_1, x_1, \dots, -y_n, x_n)$$

définit un champ de vecteurs sur la sphère unité  $S^{2n-1}$  de  $\mathbf{R}^{2n}$ .

**Exercice 4.5.** Trouver l'image

- (1) de  $X$ , champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^n$ , par la translation  $x \mapsto x + v$
- (2) de  $X$ , champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^n$ , par l'homothétie  $x \mapsto \lambda x$  ( $\lambda$  est un réel non nul)
- (3) de  $\frac{d}{dx}$  (champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}$ ) par  $x \mapsto e^x$ .

**Exercice 4.6 (Identité de Jacobi).** Pour tous champs de vecteurs  $X, Y$  et  $Z$  sur la variété  $V$ , on a

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

**Exercice 4.7.** Calculer le crochet de  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ .

**Exercice 4.8.** Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs et  $f, g$  des fonctions sur  $V$ , on a

$$[fX, gY] = f(\mathcal{L}_X g)Y - g(\mathcal{L}_Y f)X + fg[X, Y].$$

**Exercice 4.9.** Soit  $A$  une matrice  $n \times n$  à coefficients réels. On appelle  $\underline{A}$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{R}^n$  par

$$\underline{A}_x = A \cdot x.$$

Montrer que

$$[\underline{A}, \underline{B}]_x = (BA - AB) \cdot x.$$

**Exercice 4.10.** Soient  $A$  une matrice carrée  $n \times n$  et  $P \in \text{GL}(n; \mathbf{R})$ . On considère  $P$  comme un difféomorphisme de  $\mathbf{R}^n$  et  $A$  comme un champ de vecteurs (comme dans l'exercice 4.9). Quel est le champ de vecteurs  $P_* \underline{A}$  ?

**Exercice 4.11.** Pour tous champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $U$  et tout difféomorphisme  $\alpha : U \rightarrow V$ , on a

$$\alpha_*[X, Y] = [\alpha_*X, \alpha_*Y].$$

**Exercice 4.12.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $V$ . On suppose que, pour tout champ de vecteurs  $Y$ , on a  $[X, Y] = 0$ . Montrer que  $X = 0$ .

**Exercice 4.13.** Déterminer les flots des champs de vecteurs définis

$$\text{sur } \mathbf{R} \text{ par } X_x = x, \quad Y_x = x^2, \quad \text{sur } \mathbf{R}^n \text{ par } Z = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

**Exercice 4.14.** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs. Montrer que  $[X, Y] = 0$  si et seulement si les flots  $\varphi_s^X$  et  $\varphi_t^Y$  commutent pour  $s$  et  $t$  assez petits (indication : pour montrer que la nullité du crochet implique la commutation des flots, on pourra remarquer que la courbe

$$s \longmapsto ((\varphi_s^X)_* Y)_x$$

à valeurs dans  $T_x V$  est constante). Traiter l'exemple suggéré par l'exercice 4.7.

**Exercice 4.15.** Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $V$  tangents à la sous-variété  $W \subset V$  (c'est-à-dire tels que, pour tout  $x \in W$ ,  $X_x$  et  $Y_x \in T_x W \subset T_x V$ ). Montrer que  $[X, Y]$  est aussi tangent à  $W$ .

**Exercice 4.16 (Redressement d'un champ de vecteurs).** Soit  $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  un champ de vecteurs sur  $U$  ouvert de  $\mathbf{R}^n$  contenant 0. On appelle  $\varphi_t^X$  le flot local de  $X$ . On suppose que  $X_1(0) \neq 0$ . Montrer que la formule

$$F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}^X(0, x_2, \dots, x_n)$$

définit une application  $\mathcal{C}^\infty$  sur un voisinage de 0 et que c'est un difféomorphisme local. Il existe donc des voisinages  $\Omega$  et  $\Omega'$  de 0 tels que

$$F|_\Omega : \Omega \longrightarrow \Omega'$$

soit un difféomorphisme. Montrer que

$$(F|_\Omega)_*^{-1} X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Soit  $V$  une variété et soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $V$ . Montrer que, pour tout point  $a$  de  $V$  tel que  $X_a \neq 0$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  centrée en  $a$  telle que

$$\varphi_* X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

**Exercice 4.17.** Montrer que l'image du champ radial  $X_x = x$  par l'application tangente à la projection

$$p : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$$

est nulle.

**Exercice 4.18.** On considère les trois champs de vecteurs définis sur  $\mathbf{R}^3$  par

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Montrer que ces trois champs de vecteurs sont indépendants. On appelle  $\mathcal{E}$  le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent dans l'espace de tous les champs de vecteurs sur  $\mathbf{R}^3$ . Montrer que  $\mathcal{E}$  est stable par le crochet des champs de vecteurs.

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ aX + bY + cZ &\longmapsto (a, b, c) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels et vérifie

$$\alpha([V, W]) = \alpha(V) \wedge \alpha(W)$$

(produit vectoriel dans  $\mathbf{R}^3$ ). Déterminer le flot de  $aX + bY + cZ$ .

**Exercice 4.19 (Champs de vecteurs sur la sphère  $S^2$ ).** On considère la sphère unité  $S^2 \subset \mathbf{R}^3$  avec la projection stéréographique  $\varphi_N$ . Soit

$$\begin{aligned} h_t : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (e^t x, e^t y). \end{aligned}$$

Montrer que l'application

$$\varphi_N^{-1} \circ h_t \circ \varphi_N : S^2 - \{N\} \longrightarrow S^2 - \{N\}$$

se prolonge en un difféomorphisme

$$g_t : S^2 \longrightarrow S^2.$$

Quels sont les points fixes de  $g_t$  ?

Pour tout  $p \in S^2$ , on appelle  $X_p$  la projection orthogonale du vecteur  $\overrightarrow{ON}$  sur  $p^\perp = T_p S^2$ . Quels sont les zéros du champ de vecteurs  $X$  ainsi défini sur la sphère ? Quel est le flot de  $X$  ? Dessiner ses trajectoires.

À partir d'un champ de vecteurs sur  $\mathbf{R}^2$ , construire un (autre) champ de vecteurs avec deux zéros et dont les trajectoires sont celles représentées sur la gauche de la figure 3, un champ de vecteurs sur  $S^2$  avec un seul zéro (on pourra s'inspirer de la droite de la figure 3).

FIGURE 3. Champs de vecteurs sur la sphère

Trouver un champ de vecteurs sur la sphère  $S^3$  qui ne s'annule nulle part<sup>(4)</sup> (voir l'exercice 4.4).

**Exercice 4.20.** On considère trois champs de vecteurs  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  sur  $U$ . On écrit la formule obtenue dans l'exercice 4.11 pour l'image du crochet de  $X$  et  $Y$  par le difféomorphisme  $\varphi_t^Z$  et on la dérive par rapport à  $t$ . Qu'obtient-on ?

## 5. Algèbre multilinéaire

**Exercice 5.1.** Une forme bilinéaire  $E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  est-elle une application linéaire de l'espace vectoriel  $E \times E$  dans  $\mathbf{R}$  ?

**Exercice 5.2.** Montrer qu'une forme bilinéaire est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique. Plus généralement, on dit qu'une forme  $k$ -linéaire est anti-symétrique si elle vérifie

$$f(x_1, \dots, x_k) = \varepsilon(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_k.$$

Montrer qu'une forme  $k$ -linéaire est alternée si et seulement si elle est anti-symétrique.

**Exercice 5.3.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension  $n$ . Montrer qu'orienter<sup>(5)</sup>  $E$  est équivalent à orienter  $\Lambda^n E^*$ .

<sup>(4)</sup>La méthode suggérée fournit un champ de vecteurs qui ne s'annule pas sur chaque sphère de dimension impaire. En utilisant l'espace  $\mathbf{H}$  des quaternions, elle fournit aussi trois champs de vecteurs indépendants en tout point sur la sphère  $S^3$ .

<sup>(5)</sup>Rappelons qu'une orientation de  $E$  est une classe de bases de  $E$  sous la relation d'équivalence  $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' > 0$ , que les classes en question sont au nombre de deux et qu'orienter  $E$ , c'est choisir une de ces deux classes.

**Exercice 5.4 (Formes décomposables).** Une forme  $k$ -linéaire alternée est dite *décomposable* si elle s'écrit comme produit extérieur de  $k$  formes linéaires. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *indécomposable*.

Montrer que toute forme de degré  $n$  ou  $n-1$  est décomposable (indication : pour  $\omega$  une  $(n-1)$ -forme sur  $E$ , on pourra considérer l'application linéaire  $\theta \mapsto \theta \wedge \omega$  définie sur le dual  $E^*$ ).

Soit  $\alpha$  une forme linéaire sur  $E$ . Une forme  $\omega \in \Lambda^p E^*$  vérifie  $\omega = \alpha \wedge \omega'$  si et seulement si  $\alpha \wedge \omega = 0$ .

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  des formes linéaires indépendantes sur  $E$ . Montrer que

$$\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$$

est indécomposable.

**Exercice 5.5 (La grassmannienne  $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^4)$  et le plongement de Plücker).** Soient  $f$  et  $g$  deux formes linéaires indépendantes sur  $\mathbf{R}^4$ . On suppose que  $f'$  et  $g'$  sont deux formes linéaires contenues dans le sous-espace de  $\Lambda^2(\mathbf{R}^4)^*$  engendré par  $f$  et  $g$ . Montrer que

$$f' \wedge g' = \det_{(f,g)}(f', g') f \wedge g.$$

En déduire une application de l'ensemble  $\tilde{G}_2((\mathbf{R}^4)^*)$  de tous les plans orientés de  $(\mathbf{R}^4)^*$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}(\Lambda^2(\mathbf{R}^4)^*)$ , ou...

$$\mathcal{P} : \tilde{G}_2(\mathbf{R}^4) \longrightarrow \mathbf{P}^5(\mathbf{R}).$$

En utilisant l'exercice 5.4, montrer que  $\omega \in (\mathbf{R}^4)^*$  est de la forme  $f \wedge g$  si et seulement si  $\omega \wedge \omega = 0$ . En écrivant

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{i,j} e_i^* \wedge e_j^*,$$

montrer que l'image de  $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^4)$  est contenue dans la quadrique projective  $\mathcal{Q}$  d'équation

$$a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{2,3}a_{1,4} = 0.$$

*Pour en savoir plus...*

(1) La grassmannienne  $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^4)$  est une variété compacte et connexe de dimension 4. Plus généralement, la grassmannienne  $G_k(\mathbf{R}^n)$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $\mathbf{R}^n$  et la grassmannienne  $\tilde{G}_k(\mathbf{R}^n)$  des sous-espaces orientés sont des variétés de dimension  $k(n-k)$ .

(2) L'application  $\mathcal{P}$  est un plongement et son image est la quadrique  $\mathcal{Q}$  tout entière.

(3) Laquelle quadrique  $\mathcal{Q}$  est diffeomorphe à  $S^2 \times S^2$  (indication : la signature de la forme quadratique définissant  $\mathcal{Q}$  est  $(3,3)$ )... et donc aussi  $\tilde{G}_2(\mathbf{R}^4)$ .

**Exercice 5.6 (Formes bilinéaires alternées).** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Une forme bilinéaire alternée  $\varphi \in \Lambda^2 E^*$  est dite *non dégénérée* si

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto (y \mapsto \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

(1) Montrer que la forme  $\varphi_0$  définie sur  $E = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  par

$$\varphi_0((x, y), (x', y')) = x \cdot y' - y \cdot x'$$

(où  $\cdot$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbf{R}^n$ ) est une forme bilinéaire alternée non dégénérée.

(2) Démontrer que, si  $\varphi$  est une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur  $E$ , alors  $E$  possède une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  telle que

$$\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}, \quad \varphi(e_i, f_j) = \varphi(f_i, f_j) = 0.$$

La dimension de  $E$  est alors paire, égale à  $2n$ .

(3) Vérifier qu'alors,

$$\varphi = e_1^* \wedge f_1^* + \dots + e_n^* \wedge f_n^*.$$

Montrer que  $\varphi$  est non dégénérée si et seulement si  $\varphi^{\wedge n} \neq 0 \in \Lambda^{2n} E^* \cong \mathbf{R}$ .

**Exercice 5.7 (Le produit intérieur).** Si  $v \in E$  et  $f \in \Lambda^k E^*$ , on définit  $i_v f \in \Lambda^{k-1} E^*$  par

$$(i_v f)(v_1, \dots, v_{k-1}) = f(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Montrer que

$$i_v(i_w f) = -i_w(i_v f),$$

qu'en appelant  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,

$$i_{e_j}(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i_\ell, \forall \ell \\ (-1)^{\ell-1} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_\ell}^*} \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* & \text{si } j = i_\ell \end{cases}$$

et enfin, si  $f \in \Lambda^k E^*$ , que

$$i_v(f \wedge g) = (i_v f) \wedge g + (-1)^k f \wedge (i_v g).$$

## 6. Formes différentielles

**Exercice 6.1.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  et soient  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions définies sur  $U$ . Montrer qu'elles constituent des coordonnées locales au voisinage de  $x \in U$  si et seulement si

$$(df_1 \wedge \dots \wedge df_n)_x \neq 0.$$

**Exercice 6.2.** Soient  $U$  et  $V$  deux ouverts de  $\mathbf{R}^n$  (du même  $\mathbf{R}^n$ ) et soit  $\varphi : U \rightarrow V$  une application  $\mathcal{C}^\infty$ . Montrer que

$$\varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \det(T_x \varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, respectivement sur  $U$  et sur  $V$  telles que

$$\varphi^*(g dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

On suppose que  $g$  ne s'annule pas sur  $V$ . Montrer que

$$\text{Jac}_x \varphi = \frac{f(x)}{g \circ \varphi(x)}.$$

**Exercice 6.3.** Calculer les différentielles  $d\alpha$  et  $d\omega$  des deux formes définies sur  $\mathbf{R}^3$  par

$$\alpha = adx + bdy + cdz \text{ et } \omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$$

(les coefficients sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbf{R}^3$ ).

**Exercice 6.4.** Calculer la différentielle de la 2-forme définie sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$  par la formule

$$\alpha = \sum_{i < j} \alpha_{i,j} dx_i \wedge dx_j.$$

**Exercice 6.5.** Soit  $\varphi$  l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ \theta &\longmapsto (\cos \theta, \sin \theta) \end{aligned}$$

et soit  $\alpha$  la forme définie sur  $\mathbf{R}^2 - \{0\}$  par

$$\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Déterminer  $\varphi^* \alpha$ . Que signifie le fait que  $\alpha$  ne soit pas une forme exacte (la différentielle d'une fonction).

**Exercice 6.6.** Pour quelles valeurs de  $a$  la forme  $\alpha$  définie sur  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$  par

$$\alpha = (x^2 + y^2 + z^2)^a (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

est-elle fermée ( $d\alpha = 0$ ) ?

**Exercice 6.7.** Soit  $\alpha$  une forme différentielle de degré  $k$  sur  $U$  et soient  $X_0, \dots, X_k$  des champs de vecteurs sur  $U$ . Montrer que

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \mathcal{L}_{X_i} \alpha(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Que dit cette formule (quand  $k = 1$ ) pour une forme qui est la différentielle d'une fonction ?

**Exercice 6.8 (Divergence, gradient, rotationnel).** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$ . Montrer qu'il existe une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ , notée  $\text{Div}(X)$  (la *divergence* de  $X$ ) et telle que

$$\mathcal{L}_X(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \text{Div}(X)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Si  $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , on appelle  $\alpha_X$  la 1-forme *duale* à  $X$ , définie par

$$\alpha_X = \sum X_i dx_i.$$

Étant donnée une fonction  $f$  sur  $U$ , montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs  $\text{grad } f$ , le *gradient* de  $f$ , tel que

$$\alpha_{\text{grad } f} = df.$$

On suppose maintenant que  $n = 3$ . Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs  $\text{rot}(X)$ , le *rotationnel* de  $X$ , tel que

$$i_{\text{rot}(X)}(dx \wedge dy \wedge dz) = d\alpha_X.$$

Déterminer  $\text{Div}(\text{rot}(X))$ ,  $\text{rot}(\text{grad}(f))$ ,  $\text{Div}(\text{grad } f)$ ) et, pour deux champs  $X$  et  $Y$ , montrer que

$$\text{Div}(X \wedge Y) = -X \cdot \text{rot}(Y) + Y \cdot \text{rot}(X)$$

(il s'agit du produit vectoriel et du produit scalaire usuels de  $\mathbf{R}^3$ ).

**Exercice 6.9.** Pour tous champs de vecteurs  $X$  et  $Y$ , on a

$$\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X = i_{[X, Y]}.$$

Indication : on pourra vérifier que les deux membres sont linéaires par rapport à la multiplication par les fonctions, puis se ramener au cas des 1-formes.

**Exercice 6.10.** Soit  $\alpha$  une 1-forme sur la sphère  $S^2$ . On suppose que pour tout  $\varphi \in \text{SO}(3)$ ,  $\varphi^* \alpha = \alpha$ . Montrer que  $\alpha = 0$ .

**Exercice 6.11 (Une 2-forme sur  $S^2$ ...).** Montrer que la formule

$$\omega_p(Y, Z) = p \cdot (Y \wedge Z)$$

( $p \in S^2 \subset \mathbf{R}^3$ ,  $Y, Z \in p^\perp \subset \mathbf{R}^3$  et  $\wedge$  désigne le produit vectoriel) définit une forme différentielle de degré 2 sur la sphère  $S^2$ .

Soit  $X$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbf{R}^3$  par la formule

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$$

et soit  $\alpha$  la 2-forme sur  $\mathbf{R}^3$

$$\alpha = i_X(dx \wedge dy \wedge dz).$$

Montrer que

$$j^* \alpha = \omega$$

( $j$  désignant l'inclusion de  $S^2$  dans  $\mathbf{R}^3$ ). Déterminer la 2-forme  $(\varphi_N^{-1})^* \omega$  sur  $\mathbf{R}^2$ .

**Exercice 6.12 (... et plus généralement une  $n$ -forme sur  $S^n$ ).** De même la formule

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n)$$

définit une  $n$ -forme sur  $S^n$ , qui vérifie  $\omega = j^* \alpha$  pour

$$\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i x_i dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

**Exercice 6.13 (Formes différentielles sur l'espace projectif).** On considère la projection naturelle

$$p : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$$

et l'application linéaire

$$p^* : \Omega(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) \longrightarrow \Omega(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}).$$

Montrer que  $p^*$  est injective et que son image est l'ensemble de toutes les formes  $\alpha$  sur  $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$  qui vérifient

$$i_X \alpha = 0 \text{ et } h_\lambda^* \alpha = \alpha \text{ pour toute homothétie } h_\lambda, \lambda \neq 0$$

où  $X$  désigne le champ de vecteurs radial  $X_x = x$ .

La forme  $\alpha$  de l'exercice 6.12 provient-elle d'une forme sur  $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$  ?

**Exercice 6.14 (Poincaré (direct) pour les 1-formes).** Soit  $\alpha = \sum \alpha_i dx_i$  une 1-forme fermée définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{R}^n$  étoilé en 0. On pose

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \alpha_i(tx) dt.$$

Calculer  $df$ .

**Exercice 6.15.** Soit  $X$  un champ de vecteurs sur un ouvert  $U$  étoilé de  $\mathbf{R}^3$ . Montrer que

$$\text{rot}(X) = 0 \Rightarrow X = \text{grad}(f)$$

pour une certaine fonction<sup>(6)</sup>  $f$  sur  $U$  et que

$$\text{Div}(X) = 0 \Rightarrow X = \text{rot}(Y)$$

pour un certain champ de vecteurs  $Y$  sur  $U$ .

## 7. Questions d'orientation

**Exercice 7.1 (Atlas d'orientation).** On suppose que  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  et  $(U'_j, \varphi'_j)_{j \in J}$  sont des atlas d'orientation d'une variété  $V$ . Soit  $x$  un point de  $V$ . Il est dans  $U_i \cap U'_j$ , pour certains  $i$  et  $j$ . Montrer que le signe du jacobien de  $\varphi_i \circ (\varphi'_j)^{-1}$  en  $x$  ne dépend pas des choix de  $i$  et  $j$ . On a ainsi une fonction continue

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\sigma} \{\pm 1\} \\ x &\longmapsto \text{signe} \left( \text{Jac}_{\varphi'_j(x)} (\varphi_i \circ (\varphi'_j)^{-1}) \right) \end{aligned}$$

associée au choix de ces deux atlas.

On dit que deux atlas d'orientation sur  $V$  sont équivalents si le signe associé est  $+1$ . On suppose que  $V$  est connexe. Combien cette relation d'équivalence a-t-elle de classes ?

**Exercice 7.2.** Montrer que, pour toute variété  $V$ , le fibré tangent  $TV$  est une variété orientable.

**Exercice 7.3.** Soit  $f$  une submersion de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$ . De sorte que  $f^{-1}(0)$  est une sous-variété  $V$  de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que  $V$  est orientable.

**Exercice 7.4.** Soit  $V$  une sous-variété de dimension  $n-1$  de  $\mathbf{R}^n$ . On suppose qu'il existe une application  $C^\infty$

$$N : V \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

telle que, pour tout point  $x$  de  $V$ , on ait  $\|N(x)\| = 1$  et  $N(x) \perp T_x V$ . Montrer que  $V$  est orientable.

<sup>(6)</sup> Appliquée à un champ électrique  $E$  ne dépendant pas du temps, cette propriété « définit » le potentiel électrique... à une constante près.

**Exercice 7.5 (Orientabilité de la sphère).** Montrer que l'atlas sur  $S^n$  constitué des projections stéréographiques et considéré par exemple dans l'exercice 3.3 n'est *pas* un atlas d'orientation.

Pourtant, la sphère est orientable (en vertu par exemple de l'exercice 7.3). Soit  $s$  une réflexion de  $\mathbf{R}^n$ . Que peut-on dire de l'atlas constitué de  $\varphi_N$  et  $s \circ \varphi_S$  ?

**Exercice 7.6.** Montrer que la restriction de l'application  $x \mapsto -x$  est un difféomorphisme de  $S^n$  dans  $S^n$ . Préserve-t-il l'orientation ?

Construire une forme volume sur  $\mathbf{P}^{2k-1}(\mathbf{R})$  (voir l'exercice 6.13). En déduire que les espaces projectifs  $\mathbf{P}^{2k-1}(\mathbf{R})$  de dimension impaire sont orientables.

**Exercice 7.7 (Une forme volume sur le tore  $T^n$ ).** On considère le tore  $T^n = (S^1)^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$  comme le quotient de  $\mathbf{R}^n$  par son sous-groupe  $\mathbf{Z}^n$  opérant par translations. On appelle

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \cong T^n \\ (t_1, \dots, t_n) &\longmapsto [t_1, \dots, t_n] \mapsto (e^{2i\pi t_1}, \dots, e^{2i\pi t_n}) \end{aligned}$$

la projection naturelle. Montrer que  $p$  est un difféomorphisme local<sup>(7)</sup> et qu'il existe sur  $T^n$  une unique forme volume  $\omega$  telle que

$$p^*\omega = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

PSfrag replacements

$z$   
 $w$

FIGURE 4. La bouteille de Klein comme quotient du tore

**Exercice 7.8 (La bouteille de Klein).** On considère le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$  et son quotient  $K$  par le groupe engendré par la transformation

$$\begin{aligned} \tau : S^1 \times S^1 &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ (z, w) &\longmapsto (\bar{z}, -w). \end{aligned}$$

Montrer que  $K$  est une variété, que l'application naturelle

$$q : T^2 \longrightarrow K$$

est un difféomorphisme local (voir les notes 3 et 7). Démontrer que  $K$  n'est pas orientable.

## 8. Intégration des formes sur les variétés

**Exercice 8.1.** Soit  $\omega$  une  $n$ -forme sur une variété compacte orientée  $V$  de dimension  $n$  et soit  $X$  un champ de vecteurs sur  $V$ . Montrer que

$$\int_V \mathcal{L}_X \omega = 0.$$

**Exercice 8.2.** Sur la sphère  $S^2$  on considère, encore une fois, la forme volume  $\omega$  des exercices 6.11, 6.12. Montrer que l'application

$$(\theta, \varphi) \longmapsto (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$$

définit un difféomorphisme

$$F : S^1 \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \longrightarrow S^2 - \{N, S\}.$$

Déterminer  $F^*\omega$ . Trouver une 1-forme sur  $S^1 \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  qui soit une primitive de  $F^*\omega$ . Calculer l'aire de la zone sphérique comprise entre les parallèles  $z = h$  et  $z = k$  pour  $-1 \leq h \leq k \leq 1$ .

<sup>(7)</sup>Un autre exemple de la situation considérée dans la note 3.

**Exercice 8.3.** Soit  $K$  un domaine régulier de  $\mathbf{R}^n$ . Pour tout  $a \in \partial K$ , on définit  $n_a$  comme le vecteur unitaire normal à  $T_a \partial K$  et « sortant » de  $K$ . Vérifier que la formule

$$\sigma_a(X_1, \dots, X_{n-1}) = (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)_a(n_a, X_1, \dots, X_{n-1})$$

définit une forme volume sur  $\partial K$  (voir plus généralement l'exercice 7.4). Quelle est cette forme quand  $K$  est la boule unité ?

**Exercice 8.4 (La formule de Green-Riemann).** Soit  $K$  un domaine régulier de  $\mathbf{R}^2$  et soient,  $P, Q$  deux fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  définies au voisinage de  $K$ . Montrer que

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \int_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Exercice 8.5 (La formule d'Ostrogradski...).** Soit  $K$  un domaine régulier de  $\mathbf{R}^3$  et soient  $P, Q, R$  des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  définies au voisinage de  $K$ . Montrer que

$$\int_{\partial K} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_K \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

... ou que, pour tout champ de vecteurs  $X$  défini au voisinage de  $K$  (et pour  $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ ), on a

$$\int_{\partial K} i_X \omega = \int_K (\text{Div}(X)) \omega.$$

On munit  $S = \partial K$  du champ normal sortant  $n$  défini dans l'exercice 8.3 et  $S$  de la forme volume  $\sigma$  (définie dans ledit exercice). On définit le flux de  $X$  à travers  $S$  par

$$\int_S X = \int_S (X \cdot n) \sigma.$$

Montrer que

$$\int_S X = \int_K \text{Div}(X) dx \wedge dy \wedge dz.$$

... et le théorème de Gauss. Si  $E$  est un champ (électrique, ne dépendant pas du temps) de divergence  $\rho$  (densité de charge électrique), son flux à travers  $S$  est la charge électrique totale contenue dans  $K$ .

**Exercice 8.6 (La formule de Stokes classique...).** On suppose que  $C$  est une courbe connexe dans  $\mathbf{R}^3$  qui est le bord d'un domaine régulier  $S$  (qui est alors une surface à bord dans  $\mathbf{R}^3$ ). Soit  $X$  un champ de vecteurs défini au voisinage de  $S$  et  $\alpha_X$  la 1-forme associée à  $X$  comme dans l'exercice 6.8. Montrer que

$$\int_C \alpha_X = \int_S \text{rot}(X)$$

(le flux du rotationnel de  $X$  à travers la surface  $S$ ... à travers n'importe quelle surface  $S$  donc  $C$  est le bord).

... et le théorème d'Ampère. On applique ce qui précède au cas où le champ  $X$  s'appelle  $B$  (champ magnétique, indépendant du temps) et son rotationnel  $J$ . La formule obtenue s'écrit aussi

$$\oint_C B = \int_S J.$$

**Exercice 8.7 (Le centre de gravité).** Soit  $K$  un domaine régulier de  $\mathbf{R}^n$ . On choisit une base de  $\mathbf{R}^n$  et, en écrivant tout dans cette base, on définit le point  $G(K)$  comme celui dont les coordonnées sont les

$$y_i = \frac{\int_K x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{\int_K dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Vérifier que  $G(K)$  ne dépend pas de la base choisie.

*Le théorème de Guldin.* On suppose maintenant que  $n = 2$  et que  $K \subset ]0, +\infty[ \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^3$  (figure 5). On appelle  $a$  la distance du centre de gravité  $G(K)$  à l'axe des  $z$ . On considère le compact  $\tilde{K}$  engendré par les rotations de  $K$  autour de l'axe des  $z$ . Montrer que

$$\text{vol}(\tilde{K}) = 2\pi a \text{aire}(K).$$

Déterminer le volume limité par un tore de révolution (exercice 1.10).



FIGURE 5. Le théorème de Guldin

FIGURE 6. La formule de Crofton

**Exercice 8.8 (La formule de Crofton).** Soit  $D$  une droite affine orientée dans un plan vectoriel euclidien (c'est-à-dire un plan affine euclidien dans lequel on a choisi une origine). Vérifier que  $D$  a une unique équation de la forme

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$$

pour un (unique)  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  et un (unique)  $p \in \mathbf{R}$ .

On appelle  $\mathcal{D}$  l'ensemble de toutes les droites affines orientées du plan. Montrer que cet ensemble est en bijection avec  $S^1 \times \mathbf{R}$ . On munit  $\mathcal{D}$  de la structure de variété induite.

Ainsi on peut considérer l'expression  $dp \wedge d\theta$  comme une forme différentielle sur  $\mathcal{D}$ . Le groupe des isométries affines du plan affine euclidien opère sur  $\mathcal{D}$ . Montrer que la forme  $dp \wedge d\theta$  est invariante par cette action.

Soit  $C$  une courbe fermée du plan, paramétrée par la longueur d'arc

$$s : [0, L] \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

(de sorte que  $L$  est la longueur de  $C$ ). On définit

$$f : [0, L] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathcal{D}$$

en associant à  $(s, \varphi)$  la droite affine orientée passant par le point d'abscisse  $s$  sur la courbe et faisant l'angle  $\varphi$  avec la tangente orientée en ce point (voir la figure 6). Montrer que  $f$  est une application  $\mathcal{C}^\infty$  et que

$$f^* dp \wedge d\theta = \sin \varphi ds \wedge d\varphi.$$

Montrer que, pour presque toute droite  $D$ , l'ensemble  $D \cap C$  est fini et que

$$\int_{\mathcal{D}} \text{card}(D \cap C) dp \wedge d\theta = 2L.$$

**Exercice 8.9 (Eurêka !).** Un solide  $K$  est plongé dans un liquide de densité  $\rho$ . la force infinitésimale exercée sur  $x \in \partial K$  est  $-z\rho g n \sigma$  où

- $\sigma$  est l'élément d'aire de  $\partial K$  en  $x$ ... ou la forme donnée dans l'exercice 8.3.
- $g$  est la constante (newtonienne) de la pesanteur,
- $z$  est la profondeur du point  $x$ , c'est-à-dire la distance de  $x$  à la surface du liquide
- $n$  est le vecteur unitaire normal à  $\partial K$  en  $x$ .

Montrer que *tout corps immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale de bas en haut égale au poids du volume de fluide ainsi déplacé.*

**Exercice 8.10 (Brouwer en dimension 1).** Démontrer que toute application continue de  $[a, b]$  dans lui-même a un point fixe.

### 9. Sujet d'examen, juin 2004

On rappelle qu'une forme bilinéaire alternée  $\varphi \in \bigwedge^2 E^*$  sur un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie est dite *non dégénérée* si

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : E &\longrightarrow E^* \\ u &\longmapsto (v \mapsto \varphi(u, v)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

**9.1.** Soit  $W$  une variété et soit  $\omega \in \Omega^2(W)$  une 2-forme sur  $W$ . On suppose que  $\omega$  est *non dégénérée*, c'est-à-dire que

$$\forall x \in W, \quad \omega_x \text{ est non dégénérée}$$

(comme forme bilinéaire alternée sur  $T_x W$ ).

*9.1.a. Exemple.* Montrer que la forme différentielle  $\Omega$  définie sur  $W = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  par

$$\Omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

vérifie

$$\Omega_{(x,y)}((X, Y), (X', Y')) = X \cdot Y' - X' \cdot Y$$

( $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  désigne un point de  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  et  $\cdot$  désigne le produit scalaire de  $\mathbf{R}^n$ ). En déduire qu'elle est non dégénérée.

*9.1.b.* Soit  $f : W \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ . Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs  $X_f$  sur  $W$  tel que

$$i_{X_f} \omega = -df.$$

On considère la variété  $W = \mathbf{R}^2$  munie de la forme  $\Omega$  (avec  $n = 1$ ). Déterminer le champ de vecteurs  $X_f$  quand  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

*9.1.c.* On revient au cas général. Montrer que le flot de  $X_f$  préserve les « niveaux » de  $f$ , c'est-à-dire que  $f$  est constante sur chaque trajectoire de  $X_f$ . Faire une figure qui mette cette propriété en évidence dans le cas de la fonction de la question précédente.

*9.1.d.* Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions, on définit leur « crochet de Poisson » par

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

Montrer

- que  $\{f, g\} = dg(X_f) = -\mathcal{L}_{X_g}(f)$ ,
- que ce crochet est anti-symétrique,
- et enfin qu'il satisfait à l'identité de Leibniz

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

*9.1.e.* Montrer que la fonction  $g$  est constante sur les trajectoires du champ  $X_f$  si et seulement si  $\{f, g\} = 0$ .

### 9.2. Non dégénérescence.

*9.2.a.* Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur un espace vectoriel réel  $E$  de dimension finie. Montrer que  $E$  possède une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  telle que

$$\varphi(e_i, f_j) = \delta_{i,j}, \quad \varphi(e_i, e_j) = \varphi(f_i, f_j) = 0.$$

La dimension de  $E$  est alors paire, égale à  $2n$ .

9.2.b. Montrer qu'alors

$$\varphi = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_n^* \wedge f_n^*.$$

Calculer  $\varphi^{\wedge n}$  (c'est-à-dire  $\varphi \wedge \cdots \wedge \varphi$   $n$  fois).

9.2.c. Montrer que<sup>(8)</sup>, si  $\varphi$  est non dégénérée, alors  $\varphi^{\wedge n} \neq 0 \in \bigwedge^{2n} E^* \cong \mathbf{R}$ .

9.2.d. Soit  $W$  une variété et soit  $\omega \in \Omega^2(W)$  une forme non dégénérée. Montrer que la dimension de  $W$  est paire, disons  $2n$  et que  $\omega^{\wedge n}$  est une forme volume sur  $W$ .

**9.3. Fermeture.** On suppose désormais que  $\omega$  est une 2-forme non dégénérée et *fermée* sur la variété  $W$  de dimension  $2n$ .

9.3.a. Montrer que la forme  $\Omega$  sur  $\mathbf{R}^{2n}$  est exacte et donc, en effet, fermée.

9.3.b. Soit  $\alpha$  une 1-forme sur  $W$ . Calculer  $d(\alpha \wedge (\omega^{\wedge n-1}))$ . On suppose que  $\omega$  est exacte. Montrer que  $\omega^{\wedge n}$  est, elle aussi, exacte. Soit  $\omega$  une 2-forme non dégénérée sur une variété *compacte*  $W$ . Peut-elle être exacte ?

9.3.c. On rappelle l'identité<sup>(9)</sup>

$$\mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X = i_{[X,Y]}.$$

Montrer que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

et que

$$\{\{f, g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}$$

(identité de Jacobi pour le crochet de Poisson).

### Références

- [1] M. BERGER & B. GOSTIAUX – *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses Universitaires de France, 1987, Réédition d'un ouvrage paru chez Armand Colin.
- [2] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [3] F. ROUVIÈRE – *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, Cassini Paris, 2003, Deuxième édition revue et augmentée.

<sup>(8)</sup>Voir plus généralement l'exercice 5.6.

<sup>(9)</sup>démontrée dans l'exercice 6.9