

Le cas de Sophie Kowalevski

Ce que les mathématiciens appellent, depuis 1888, « le cas de Kowalevski », c'est une sorte de gyroscope, un genre de toupie si l'on préfère, dont la découverte a ouvert quelques portes sur des allées des mathématiques que l'on n'a pas fini d'explorer.

Voici le début de la version publiée dans le journal *Acta Mathematica* d'un mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris en 1888. Comme on le voit dès cette première page, c'est assez compliqué. Il s'agit d'équations différentielles, il y a des dp/dt , etc., qui décrivent, nous dit le titre de l'article et nous

allons le croire, le mouvement d'un solide soumis à la pesanteur et dont un point est fixé.

Dans ces équations, il y a des inconnues (p, q, r, γ, γ' et γ'') qui décrivent la position et la vitesse du solide en fonction du temps t . Par exemple, γ'' décrit simplement la hauteur de son centre de gravité. Il y a aussi des constantes (A, B, C, x_0, y_0 et z_0) qui décrivent la forme du solide et la position du point fixe. Nous n'aurons pas besoin de davantage de détails.

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE¹

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI
À STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$(1) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0 r'' - z_0 r'), & \frac{dr}{dt} &= r r' - q r'', \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0 r' - x_0 r''), & \frac{dr'}{dt} &= p r'' - r r', \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0 r' - y_0 r''), & \frac{dr''}{dt} &= q r' - p r''. \end{aligned}$$

Les constantes $A, B, C, Mg, x_0, y_0, z_0$ qui figurent dans ces équations ont la signification suivante.

A, B, C sont les axes principaux de l'ellipsoïde d'inertie du corps considéré, relativement au point fixe.

M est la masse du corps;

g l'intensité de la force de gravité;

¹ Ce mémoire est le résumé d'un travail auquel l'Académie des Sciences de Paris, dans sa séance solennelle du 24 décembre 1888, a décerné le prix Bordin élevé de 3000 à 5000 francs.

C'est un problème qui a été étudié au XVIII^e siècle par Euler et Lagrange. Une parenthèse : puisqu'il est question ici d'un article écrit en français et publié dans un journal scandinave par une mathématicienne russe ayant étudié en Allemagne, notons qu'Euler (1707-1783) était un mathématicien suisse qui a longtemps vécu en Russie alors que Lagrange (1736-1813) était un mathématicien italien établi en France ; l'Europe mathématique a précédé l'Europe politique, fin de la parenthèse.

Il n'y a pas eu beaucoup de progrès entre ces travaux et l'article dont il est question ici. Non que le problème n'intéressât pas les mathématiciens, au contraire. Par exemple, l'Académie prussienne des Sciences avait ouvert un prix de cent ducats, en 1852, puis l'avait refermé quelques années plus tard, sans avoir reçu aucune contribution. On appelait ce problème en Allemagne *die mathematische Nixe* (la sirène mathématique).

Le cas de Sophie Kowalevski est, sera, comme les cas d'Euler et de Lagrange, un exemple particulier de solide. Ce que je souhaite expliquer ici, c'est – un cas plus simple, celui de Lagrange, plus facile à expliquer à un public non spécialiste ne serait-

ce que parce que c'est un exemple familier,
– ce qu'est le cas de Sophie Kowalevski et comment elle l'a trouvé,
– ses relations avec les mathématiques d'aujourd'hui.

Le cas de Lagrange : la toupie

Revenons aux équations. Le cas d'Euler est celui où le centre de gravité coïncide avec le point fixe. Celui de Lagrange est celui dit *de la toupie symétrique*, où le solide a un axe de révolution.

Ce que l'on voit lorsqu'on fait tourner une toupie.

Pensons au mouvement de la Terre. Comme celui-ci, le mouvement d'une toupie est composé d'une rotation autour de son axe de révolution, d'un mouvement de « précession » de l'axe — l'axe lui-même tourne autour de la verticale, dans le cas de la Terre, c'est ce que l'on appelle la « précession des équinoxes » — et d'un mouvement moins connu « de nutation », les petits festons que dessine l'extrémité de l'axe, oscillant entre deux cercles parallèles.

Je vais montrer comment on résout le système différentiel dans ce cas et comment la résolution montre effectivement ce comportement. On commence par utiliser les lois de conservation de l'énergie, du moment par rapport à l'axe, grâce à quoi on se débarrasse de toutes les inconnues sauf de γ'' , qui, géométriquement, est la hauteur de l'extrémité de l'axe et que je renomme x et l'on trouve que ce $x = \gamma''$ est solution d'une équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = P(x)$$

où P est un polynôme de degré 3,

$$P(x) = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2$$

pour certaines constantes c , k et α qu'il n'est pas indispensable d'explicitier. Les quantités x et $y = \dot{x}$ sont donc astreintes à rester sur la courbe d'équation $y^2 = P(x)$, le graphe du polynôme P est des-

siné à gauche et la courbe elle-même à droite. Bien sûr, il n'y a pas de points de la courbe qui aient des abscisses pour lesquelles P est négatif, « avant » a ou entre b et c , comme on le voit sur la figure ci-dessous.

Les deux racines a et b inférieures à 1 du polynôme P sont les hauteurs (latitudes) des deux cercles parallèles entre lesquelles oscille l'extrémité de notre axe, ce sont les petits festons de la nutation. Retenons de cette description l'utilisation d'une courbe algébrique (c'est-à-dire définie par une équation polynomiale $y^2 = P(x)$). On écrit ensuite les solutions grâce à des fonctions elliptiques (je vais y revenir), ce qui veut dire ici que le polynôme P est de degré 3. C'est aussi ce qui se passe dans le cas d'Euler.

Le cas de Kowalevski

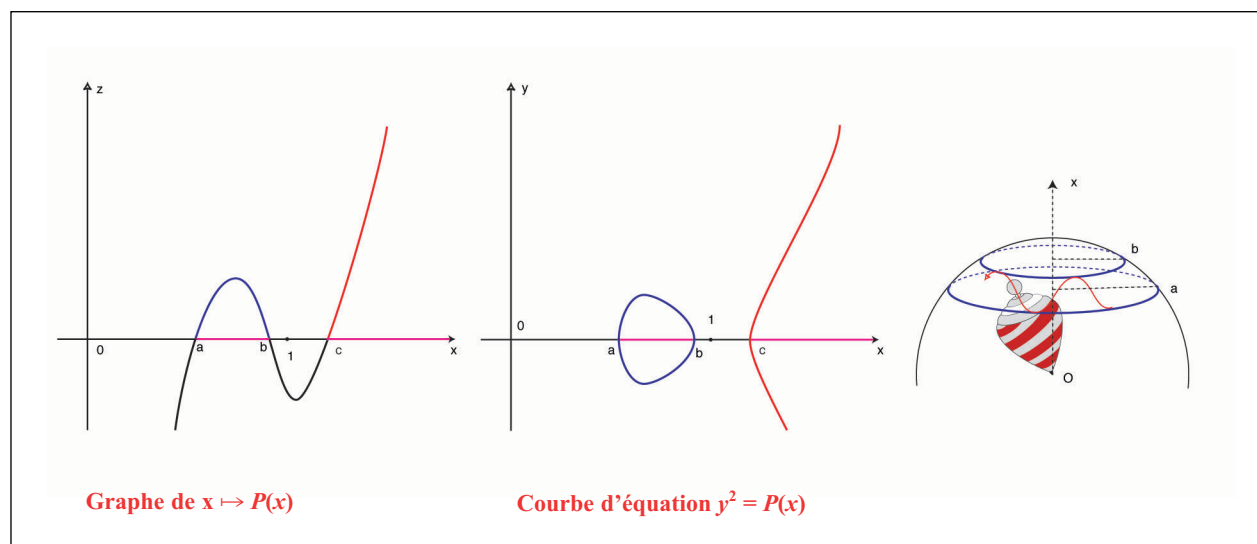
Et en général ? Le système différentiel est très compliqué, on l'a vu, on l'a dit. La démarche de Kowalevski n'est évidemment pas : « voyons s'il n'y aurait pas encore un cas auquel je pourrais laisser mon nom ? », ce n'est pas comme ça que les mathématiciens travaillent. La démarche est : « voyons ce qui se passe dans les cas où l'on sait résoudre le système et regardons si des propriétés analogues pourraient être plus générales ».

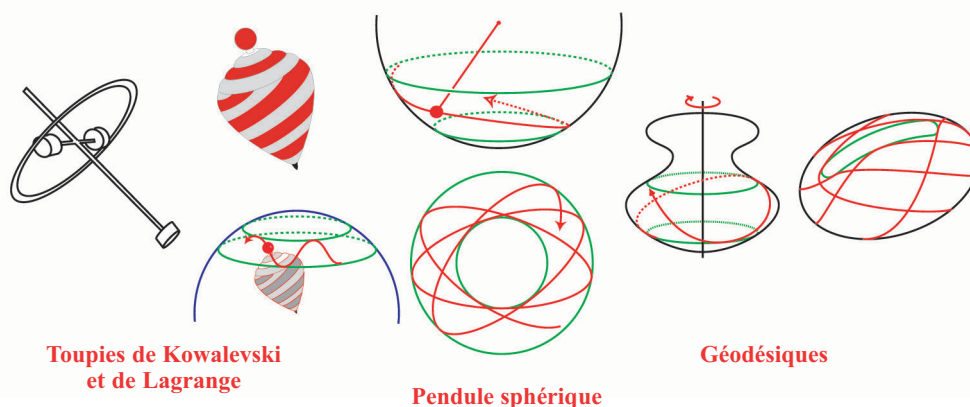
C'est dans le « voyons ce qui se passe » que les idées mathématiques sont cachées. En voici une : dans les cas d'Euler et de Lagrange, les solutions ont des pôles. Ça veut dire qu'elle partent à l'infini. Vous ne l'avez pas vu en regardant tourner votre toupie. La hauteur x ou γ'' reste inférieure à 1. Comment pourrait-elle devenir infinie ? La toupie n'explose pas !

Regardons mieux. Nous avons négligé la branche rouge de la courbe, au-dessus de $x \geq 1$. Et celle-là, bien sûr, elle part à l'infini. Mais ça ne correspond à aucun mouvement réel de la toupie, on l'a dit,



Michèle Audin est mathématicienne, spécialiste des systèmes intégrables, professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.



Toupiques de Kowalevski
et de Lagrange

Pendule sphérique

Géodésiques

**Regarder, c'est
imaginer.**

notre x ne tend jamais vers l'infini. Et pourtant, c'est la contemplation de cette branche « infinie » de la courbe qui va nous faire avancer.

La situation ici est similaire à celle des nombres dont on sait bien que les carrés sont des nombres positifs... jusqu'au jour où l'on a besoin de racine de $\sqrt{-1}$ et où l'on introduit les nombres « complexes », imaginaires. Pour « voir » les mouvements de la toupie où x tend vers l'infini, il faut imaginer que le temps est un nombre complexe. « *La mathématique est la science qui demande le plus d'imagination* » disait Sophie Kowalevski.

Un bon endroit pour une parenthèse historique : ce qui s'est passé entre le *cas de Lagrange* et le *cas de Kowalevski*, c'est qu'on a inventé l'*analyse complexe* ; au lieu d'étudier simplement des fonctions d'une variable réelle, on sait étudier des fonctions d'une variable complexe. En particulier, les solutions de l'équation $x^2 = P(x)$ peuvent s'écrire $x(t) = Ap(Bt + C)$, où p (qui se prononce bien sûr « pé ») est une fonction complexe de variable complexe inventée par Weierstrass, le professeur de Sophie Kowalevski à Berlin.

Revenons à Kowalevski qui s'est donc posé la question : est-ce que les solutions ont toujours ce type de comportement, c'est-à-dire des points à l'infini sympathiques comme celui de notre courbe ? Contrairement à ce que l'on croit peut-être, c'est le comportement le plus simple possible pour une solution d'un système comme celui du solide. Eh bien, en effet, c'est tellement simple que ça n'arrive presque jamais.

En général, les solutions sont beaucoup plus compliquées. Elles ne présentent ce comportement « simple » que dans trois cas,

- le cas d'Euler,
- celui de Lagrange et, nous dit Kowalevski,
- « *En effectuant les calculs, je me suis assurée que ces conditions ne sont pas remplies dans le cas général ; mais que, outre les deux cas déjà connus, elles sont encore remplies dans un cas nouveau, où les constantes satisfont aux équations suivantes $A = B = 2C, z_0 = 0.$* »

Le premier objet dessiné sur la figure ci-dessus est une *toupie de Kowalevski*, elle est inspirée de celle que l'on voit tourner dans le DVD [9]. Le point fixe est le centre de l'anneau.

« *C'est ce cas que je me propose d'étudier dans les paragraphes suivants* », nous dit-elle à la septième page de l'article, qui en comporte cinquante-cinq. Ensuite, eh bien, elle résout, c'est-à-dire qu'elle exprime effectivement les solutions en termes de *fonctions θ de deux variables*, de « nouvelles » fonctions qu'elle connaît bien. Comme le note le rapport de la Commission du prix Bordin, « *Les propriétés des fonctions θ à deux variables indépendantes permettent de donner la solution complète sous la forme la plus précise et la plus élégante ; et l'on a ainsi un nouvel et mémorable exemple d'un problème de Mécanique dans lequel interviennent ces fonctions transcendentes, dont les applications avaient été bornées jusqu'ici à l'analyse pure ou à la Géométrie [...]* »

**Les mathématiques d'aujourd'hui,
systèmes intégrables**

Le cas de Kowalevski est un exemple de ce que l'on appelle un *système intégrable*. à défaut de donner une définition mathématique précise (qui serait un peu lourde et n'apporterait rien), je dirai que c'est un système différentiel qui possède beaucoup, suffisamment de quantités conservées (énergie, moment,...) ce qui donne à leurs solutions un comportement très régulier.

Voici quelques exemples de systèmes mécaniques intéressants rassemblés sur une figure. Le premier objet est une toupie de Kowalevski. On a reconnu la toupie de Lagrange. On voit aussi un pendule sphérique (au-dessus d'une de ses trajectoires vue du dessus), des géodésiques d'une surface de révolution et d'un ellipsoïde. Tous ces systèmes sont intégrables. Le comportement très régulier mentionné ci-dessus se manifeste par la présence d'« anneaux » dans lesquels les trajectoires sont

confinées. Il s'agit d'un comportement très similaire à celui de l'extrémité de l'axe entre ses deux cercles parallèles observé dans le cas de la toupie.

En plus de cet aspect dynamique, l'intégrabilité desdits systèmes signifie bien que l'on est capable de les « intégrer », d'en écrire les solutions.

Revenons donc à la question de la résolution des équations du solide. Dans le cas de la toupie, j'ai expliqué que l'on se ramenait à l'équation différentielle

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)(\alpha - 2x) - (c - kx)^2 = P(x)$$

en utilisant les lois de conservation, parce que dans ce cas, la physique fournissait beaucoup de quantités conservées, particulièrement parce que la toupie est symétrique. De façon analogue, Kowalevski a résolu les équations dans son cas grâce à un polynôme R de degré 5, mais d'où elle l'a sorti, ce polynôme ? Eh bien, justement, dans son cas aussi, il y a une quantité conservée supplémentaire

$$K = |(p + iq)^2 + (\gamma + i\gamma')|^2$$

que j'écris pour la beauté complexe de la chose et c'est ce qui permet la résolution.

On touche ici aux aspects de ce travail qui nous intéressent le plus aujourd'hui.

Première question. On a demandé que les solutions n'aient que des pôles. On a trouvé que le système est intégrable. La propriété de Kowalevski (n'avoir que des pôles) est maintenant appelée *complète intégrabilité algébrique*. La relation entre cette notion et celle d'intégrabilité que je viens d'évoquer n'est pas encore très claire.

Deuxième question. Et d'ailleurs, indépendamment des pôles, pourquoi ce système est-il intégrable ? Le fait que Kowalevski ait trouvé son intégrale première est certainement conséquence de ses grandes qualités de calculatrice, plus répandues en son temps qu'aujourd'hui. Comment trouve-t-on une intégrale première ? Et d'ailleurs, d'où sort ce cas bizarre ?

C'est un des sujets sur lesquels, depuis environ trente ans, il y a eu énormément de progrès. Les systèmes intégrables sont liés aux courbes algébriques, je l'ai dit, mais aussi à la théorie des représentations et beaucoup de *quantités conservées* apparaissent assez naturellement lorsque l'on écrit les systèmes mécaniques correspondants en termes de groupes. La toupie de Kowalevski est restée très mystérieuse jusqu'à il y a environ une quinzaine d'années (un siècle après « notre » article [5]), lorsque un très beau travail [8] a révélé que le cas de Kowalevski n'est pas si bizarre que ça, puisqu'il est la manifestation dans notre dimension 3 d'espace d'une famil-

le de *toupies* qui apparaissent de façon parfaitement naturelle en dimensions plus grandes, au cœur-même des relations entre intégrabilité et théorie des groupes. C'est d'ailleurs grâce à cette description que l'on a pu trouver la belle paire de Lax [4] que Robert Silhol et moi-même avons utilisée dans [3]. Note personnelle : c'était ma première rencontre avec le texte de Kowalevski dont il est question ici. La deuxième arrive dans la question suivante.

Troisième question. Comment montre-t-on qu'un système est intégrable ? Eh bien, pour montrer qu'il l'est, il « suffit » de trouver assez de quantités conservées... Et si vous n'en trouvez pas ? C'est que vous n'avez pas été assez malin ? Ou qu'on ne pouvait pas en trouver ? Alors, comment montrer qu'un système n'est pas intégrable ? Prenons quelques exemples.

Les corps, trois corps, n corps, comme dit Jean-François Peyret (voir l'article *Un cerveau sur les planches* dans ce numéro). Deux corps, la Terre et le Soleil, en interaction gravitationnelle, c'est un système intégrable (une conséquence des lois de Kepler). Trois corps, on ajoute la Lune, ce n'est plus intégrable, n corps avec $n \geq 3$ non plus, Jean-François ! Autre exemple, le mouvement d'un satellite autour de la Terre, le satellite est en orbite, sur une orbite circulaire, et on étudie son mouvement propre autour de son centre de gravité. Ce mouvement est-il intégrable ?

On dispose désormais d'une méthode assez puissante, grâce à un théorème de Morales et Ramis [7, 1] qui utilise une théorie née en même temps que la toupie de Kowalevski, la théorie de Picard-Vessiot (ou théorie de Galois différentielle). Ce théorème lie une propriété de régularité des solutions (comme celle de Kowalevski), à savoir le fait que le groupe de Galois n'est pas trop compliqué, à l'intégrabilité du système.

Ce théorème a de nombreuses applications. Par exemple, le mouvement d'un satellite en orbite autour de son centre de gravité n'est pas intégrable. Plus proches de ce qui nous occupe aujourd'hui, Andrzej Maciejewski et Maria Przybylska redémontrent [6] en utilisant ce critère galoisien (un théorème de Ziglin qui dit que) que le solide pesant, notre solide, n'est intégrable que dans les cas évoqués ci-dessus (Euler, Lagrange, Kowalevski). C'est dire que dans cet exemple, l'intégrabilité et l'intégrabilité algébrique coïncident.

M. A.

Références

J'ai indiqué l'essentiel, plus pour montrer l'actualité des questions soulevées ici que pour fournir des références lisibles par un grand public, dont je crains qu'elles n'existent pas. L'article [2] contient une bibliographie plus complète sur certains aspects historiques.

[1] M. Audin – *Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens*, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis, ...], Séminaire Bourbaki, 2000-2001, *Astérisque* 282 (2002), p. 113–135.

[2] —, *Mon choix de Sophie*, (2006), http://www-irma.u-strasbg.fr/_maudin/choix-sophie.pdf.

[3] M. Audin & R. Silhol – *Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski*, *Compositio Math.* 87 (1993), p. 153–229.

[4] A. I. Bobenko, A. G. Reiman & M. A. Semenov-Tian-Shansky – *The Kowalevski top 99 years later*, *Commun. Math. Phys.* 122 (1989), p. 321–354.

[5] S. Kowalevski – *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe*, *Acta Math.* 12 (1889), p. 177–232.

[6] A. Maciejewski & M. Przybylska – *Differential Galois approach to the Non-Integrability of the Heavy Top Problem*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* 14 (2005), p. 123–160.

[7] J. Morales-Ruiz – *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, *Progress in Math.*, Birkhäuser, 1999.

[8] A. G. Reyman & M. A. Semenov-Tian-Shanski – *Group theoretical methods in the theory of finite dimensional integrable systems*, *Dynamical systems VII*, *Encyclopædia of Math. Sci.*, Springer 16 (1994).

[9] P. Richter, H. Dullin & A. Wittek – *Kowalewska Kreisell*, IWF, Göttingen, 1997, DVD, <http://www.iwf.de>.