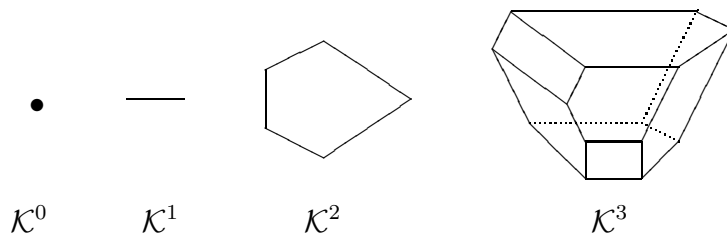


LES MULTIPLES FACETTES DE L'ASSOCIAÈDRE

JEAN-LOUIS LODAY

1. INTRODUCTION

L'associaèdre \mathcal{K}^n est un polytope de dimension n dont les sommets sont en bijection avec les parenthésages du mot $x_0x_1 \dots x_{n+1}$.



L'ensemble des sommets est aussi en bijection avec les arbres binaires planaires à $n + 2$ feuilles, c'est pourquoi on le note aussi parfois K_{n+2} . Ce polytope a de nombreuses propriétés à la fois géométriques, combinatoires, topologiques et algébriques.

Tout d'abord on construit l'associaèdre comme l'enveloppe convexe de ses sommets en donnant des coordonnées explicites à partir des propriétés combinatoires des arbres. En tant que complexe cellulaire l'associaèdre est homéomorphe au complexe de Stasheff qui joue un rôle clé dans la caractérisation des espaces topologiques homotopes à un espace de lacets. Ensuite on montre l'existence d'une structure d'ordre partiel sur l'ensemble des sommets de l'associaèdre, structure qui peut se lire sur la réalisation euclidienne du polytope. Puis on compare l'associaèdre au permutoèdre dont l'ensemble des sommets est en bijection avec les permutations. Algébriquement on peut munir l'espace vectoriel ayant pour base les arbres binaires planaires d'une structure d'algèbre associative. Cette structure peut se construire grâce à la relation d'ordre. En fait cette algèbre possède une structure plus fine,

Date: April 18, 2005.

2000 Mathematics Subject Classification. 52B11, 55P47,

Key words and phrases. Associaèdre, permutoèdre, polytope de Stasheff, arbre binaire planaire, algèbre dendriforme, algèbre de Zinbiel.

être prise comme définition de l'ensemble Y_n (réunion des $Y_p \times Y_q$ pour $n = p + 1 + q$). Exemples :

$$|\vee| = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}, \quad |\vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}, \quad \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} |\vee| = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \vee \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}.$$

A tout arbre $t \in Y_n, n > 0$, on associe un point $M(t) \in \mathbb{R}^n$ à coordonnées entières positives de la façon suivante. Numérotions les feuilles de t de gauche à droite par $0, 1, \dots, n$. Ainsi on peut numéroter les sommets internes de 1 à n (le sommet numéro i est entre les feuilles $i-1$ et i). Soit a_i le nombre de feuilles sur la gauche du sommet i et soit b_i le nombre de feuilles sur sa droite. Remarquons que ces deux entiers ne dépendent que du sous-arbre supérieur déterminé par le sommet i . On pose alors:

$$M(t) := (a_1 b_1, \dots, a_i b_i, \dots, a_n b_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Par exemple on obtient en basses dimensions:

$$M\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (1), \quad M\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (1, 2), \quad M\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (2, 1),$$

$$M\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (1, 2, 3), \quad M\left(\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array}\right) = (1, 4, 1).$$

Pour l'arbre correspondant au parenthésage $((x_0 x_1) x_2)(x_3 x_4)$ (voir ci-dessus) on trouve le point de coordonnées $(1 \times 1, 2 \times 1, 3 \times 2, 1 \times 1) = (1, 2, 6, 1)$.

On note H_n l'hyperplan de \mathbb{R}^n d'équation $x_1 + \dots + x_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2.1. Lemme. *Pour tout arbre $t \in Y_n$ le point $M(t)$ appartient à l'hyperplan H_n .*

Preuve. C'est immédiat pour $n = 1$. On remarque que pour la décomposition $t = t^l \vee t^r$ avec $t^l \in Y_p$ et $t^r \in Y_q$ on a

$$M(t) = (M(t^l), (p+1)(q+1), M(t^r)),$$

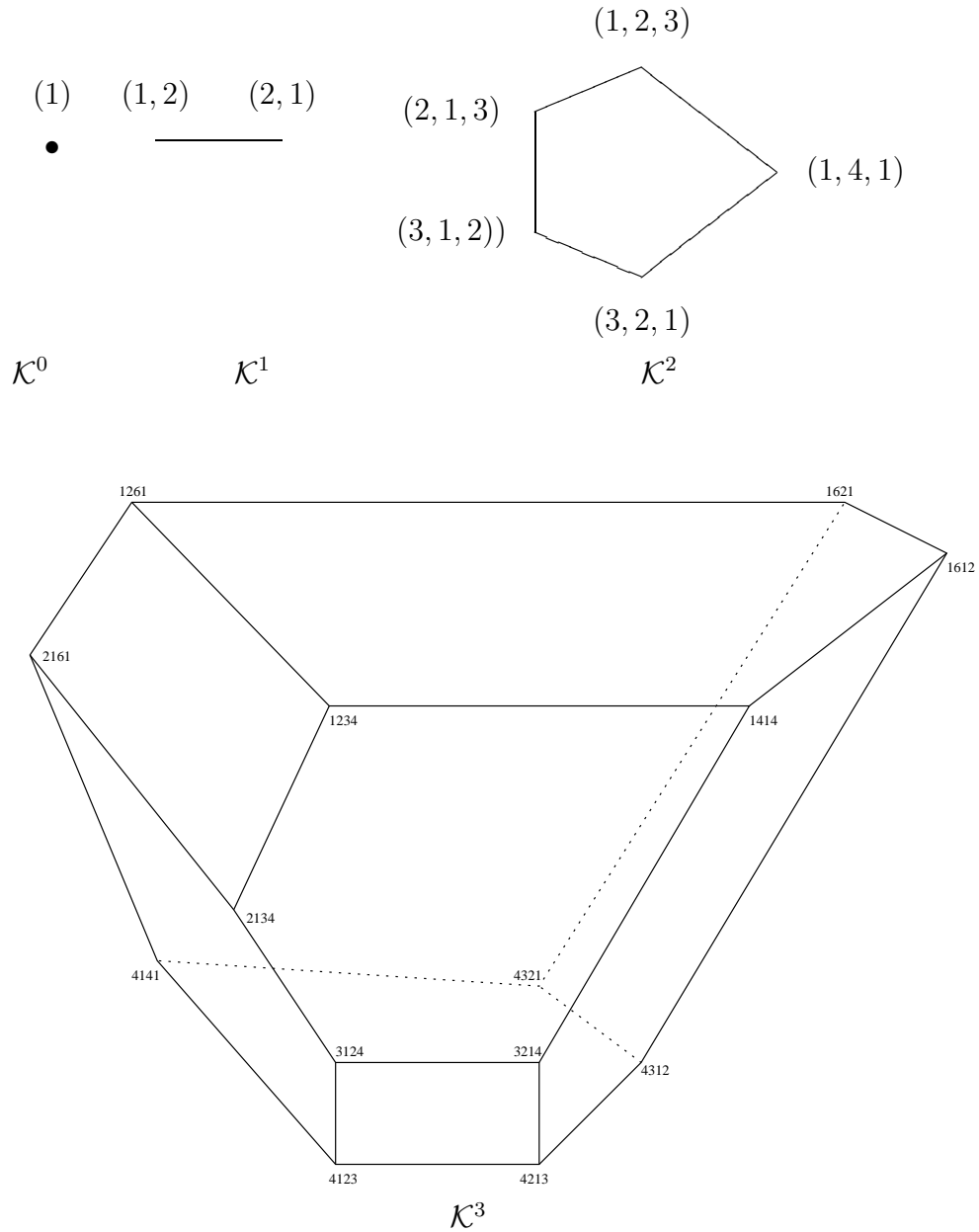
puisque t^l a $p+1$ feuilles et t^r a $q+1$ feuilles. Par récurrence on obtient:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i = \frac{p(p+1)}{2} + (p+1)(q+1) + \frac{q(q+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

puisque $n = p + 1 + q$. □

2.2. Définition. Pour n fixé on appelle associaèdre ou polytope de Stasheff l'enveloppe convexe, notée \mathcal{K}^{n-1} , des points $M(t)$ de l'hyperplan H_n pour $t \in Y_n$.

L'associaèdre \mathcal{K}^n est un polytope convexe de dimension n :



Il est intéressant de déterminer les sous-espaces affines qui contiennent les faces de ce polytope. Puisque \mathcal{K}^{n-1} est contenu dans l'hyperplan

H_n ces sous-espaces seront de codimension 2 et donc complètement déterminés par H_n et un autre hyperplan.

Soient i et k deux entiers positifs tels que $i + k \leq n + 1$. Notons $F_{i,k}$ l'hyperplan d'équation

$$x_i + x_{i+1} + \dots + x_{i+k-1} = \frac{k(k+1)}{2} .$$

On a donc $F_{1,n} = H_n$. On peut montrer que $F_{i,k} \cap H_n$ contient une face de \mathcal{K}^{n-1} et que toute face de \mathcal{K}^{n-1} est contenue dans un sous-espace affine de ce type. En tant que polytope une telle face est isomorphe (à homothétie près) à $\mathcal{K}^{k-1} \times \mathcal{K}^{n-k-1}$.

Exercice. Trouver la face de \mathcal{K}^3 qui contient les sommets de coordonnées $(3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (4, 1, 2, 3), (4, 2, 1, 3)$.

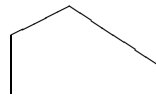
2.3. Construire \mathcal{K}^{n+1} à partir de \mathcal{K}^n . Il est très simple de construire le simplexe (resp. le cube) de dimension $n + 1$ à partir de son analogue de dimension n . Pour l'associahèdre, c'est un peu plus compliqué, mais possible. Voici la recette. On part de \mathcal{K}^n , qui est une boule et dont le bord est une sphère (cellulaire). Les cellules de ce bord sont de la forme $\mathcal{K}^p \times \mathcal{K}^q$ avec $p + q = n - 1$. On va "grossir" chaque cellule $\mathcal{K}^p \times \mathcal{K}^q$ en une cellule de dimension n en la remplaçant par $\mathcal{K}^p \times \mathcal{K}^{q+1}$. On laisse au lecteur le soin de comprendre comment ces nouvelles cellules se recollent naturellement entre elles pour former un nouveau complexe cellulaire. Puis on prend le cône sur cet espace, et on constate qu'on a obtenu \mathcal{K}^{n+1} .

Exemple $n = 1$:

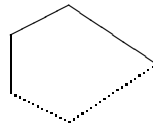
– \mathcal{K}^1



– \mathcal{K}^1 grossi

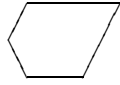


– Cône sur \mathcal{K}^1 grossi = \mathcal{K}^2

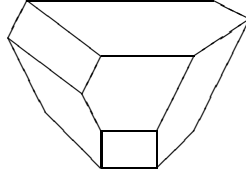


Exemple $n = 2$:

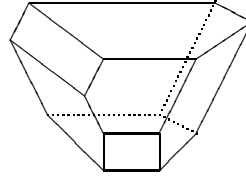
– \mathcal{K}^2



– \mathcal{K}^2 grossi



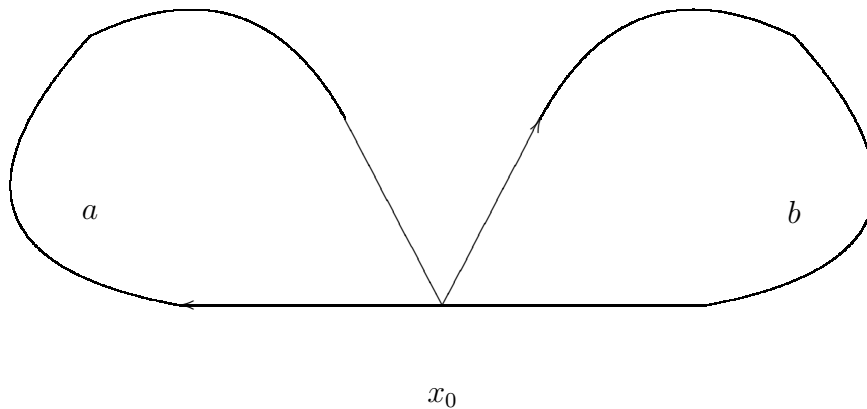
– Cone sur \mathcal{K}^2 grossi = \mathcal{K}^3



Cette construction permet de "simplicialiser" l'associahèdre, c'est à dire de le décomposer en une réunion de simplexes. Montrez que pour \mathcal{K}^n le nombre de simplexes nécessaires est $(n+1)^{n-1}$.

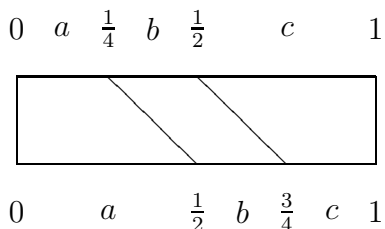
3. TOPOLOGIE

Un lacet a dans un espace topologique pointé (X, x_0) est une application continue de l'intervalle $I = [0, 1]$ sur X qui envoie 0 et 1 sur le point-base x_0 . On peut composer deux lacets a et b pour obtenir un nouveau lacet noté ab . Il est obtenu en parcourant a de 0 à $\frac{1}{2}$ et b de $\frac{1}{2}$ à 1.



Si on a 3 lacets a, b, c les produits $(ab)c$ et $a(bc)$ ne sont pas égaux. En effet les images dans X sont les mêmes, mais elles n'ont pas la même

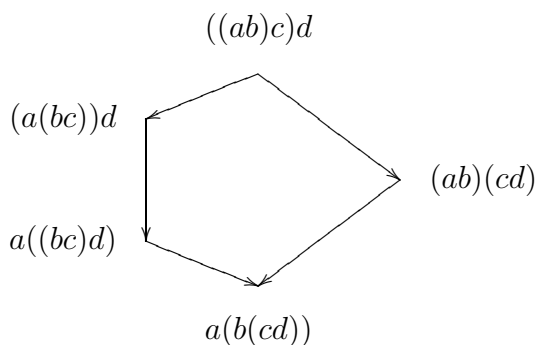
paramétrisation. Dans le premier cas on parcourt a de 0 à $\frac{1}{4}$, b de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{2}$ et c de $\frac{1}{2}$ à 1. Dans le second cas on parcourt a de 0 à $\frac{1}{2}$, b de $\frac{1}{2}$ à $\frac{3}{4}$ et c de $\frac{3}{4}$ à 1. Il est facile de voir que ces deux lacets sont *homotopes* :



Plus précisément on a construit une application continue $F : I \times I \rightarrow X$ telle que $F(0, -) : I \rightarrow X$ soit le lacet $(ab)c$ et telle que $F(1, -) : I \rightarrow X$ soit le lacet $a(bc)$. Dans l'espace des lacets ΩX de l'espace pointé (X, x_0) on a donc un chemin $F : I \rightarrow \Omega X$ du point $(ab)c$ au point $a(bc)$:



Que se passe-t-il lorsqu'on a 4 lacets a, b, c, d ? On peut alors former 5 compositions différentes, chacune d'elles correspondant à un parenthésage du mot $abcd$, c'est-à-dire à un arbre binaire planaire à quatre feuilles. Non seulement les points correspondants sont reliés par des chemins (homotopies), mais les deux compositions possibles qui vont de $((ab)c)d$ à $a(b(cd))$ sont aussi homotopes (parmi les chemins d'extrémités fixes). On voit apparaître ici une certaine décomposition cellulaire de la boule D^2 (le disque en fait) et donc de son bord (le cercle).



Jim Stasheff a démontré en 1966 (cf. [Sta1]) que ce phénomène était général. Plus précisément il a démontré l'existence d'une certaine décomposition cellulaire de la boule D^n pour tout n qui reflète l'existence d'homotopies entre homotopies dès que l'on se donne $n + 2$ lacets et que l'on veut comparer tous les parenthésages de $a_0 a_1 \dots a_{n+1}$. Les sommets (0-cellules) de cette décomposition cellulaire sont donc en



bijection avec les parenthésages, c'est-à-dire les arbres binaires planaires à $n+2$ feuilles. Les 1-cellules correspondent aux homotopies élémentaires entre parenthésages, les 2-cellules aux homotopies entre homotopies, etc. C'est cet espace que l'on appelle le *complexe de Stasheff*. Il joue un rôle primordial dans la reconnaissance des espaces qui sont homotopiquement équivalents à des espaces de lacets (c'est-à-dire presque des groupes topologiques).

Même s'il est évident en basses dimensions que, à homéomorphisme près, le complexe de Stasheff peut être réalisé comme un polytope (pentagone pour $n = 2$), ce n'est qu'en 1989 qu'une démonstration du cas général fut publiée (cf. [Lee]). D'autres réalisations, plus explicites ont été obtenues, par exemple, par Gelfand, Kapranov et Zelevinsky (cf. [GKZ]). Leur réalisation utilise l'interprétation des parenthésages en termes de décomposition triangulaire de polygones. Voir aussi, plus récemment, l'appendice de [Sta2] par Shnider et Stasheff. La réalisation proposée ci-dessus est sans doute la plus simple à ce jour.

4. COMBINATOIRE

L'interprétation homotopique du complexe de Stasheff énoncée au paragraphe précédent suggère l'existence d'une structure d'ordre partiel sur l'ensemble des sommets, c'est-à-dire sur l'ensemble des arbres binaires planaires ayant un nombre de feuilles données.

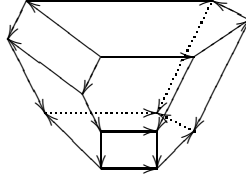
4.1. Structure d'ordre. Etant donnée une structure d'ordre partiel, noté $<$, sur un ensemble E on dit que $x < y$ est une *relation de couverture* (entre x et y) s'il n'existe pas d'éléments z , distinct de x et y tel que $x < z < y$. Une structure d'ordre sur un ensemble fini est évidemment déterminée par ses relations de couverture. On définit une relation de couverture sur l'ensemble Y_n de la manière suivante : pour tout $t, s \in Y_n$ on dit que t est plus petit que s , noté $t < s$, si s est obtenu à partir de t en changeant, localement, une sous-partie de t de

la forme  en . Cette relation de couverture induit une structure d'ordre partiel sur Y_n souvent appelé *ordre de Tamari*. Donc on a $t < s$ pour la relation d'ordre partiel si et seulement si il existe une suite

$$t = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = s$$

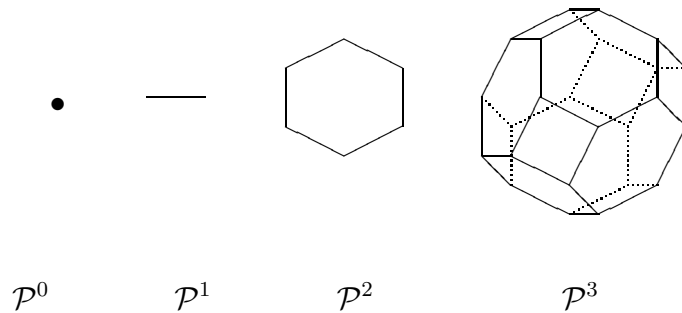
où $t_i < t_{i+1}$ est une relation de couverture pour tout i . Il se trouve que chaque relation de couverture correspond à un côté de l'associaèdre.

Voir ci-dessus pour le pentagone. En dimension 3 on obtient:

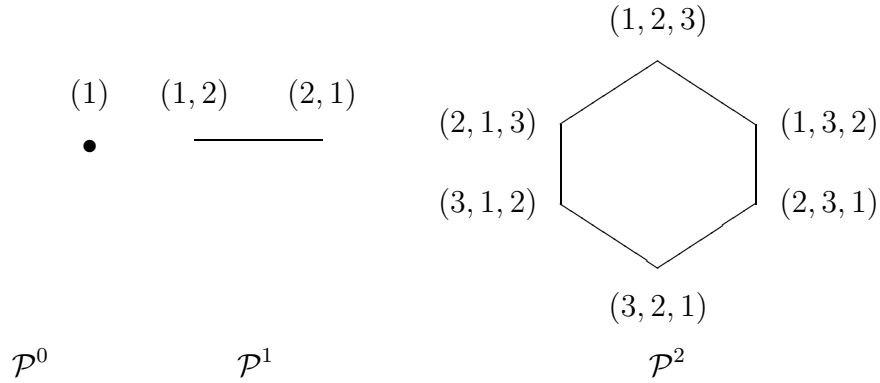


Rappelons que tout poset (= ensemble partiellement ordonné) admet une réalisation géométrique (bien définie à homéomorphisme près), qui est un complexe cellulaire. Dans le cas du poset de Tamari cette réalisation est précisément le complexe de Stasheff. La réalisation euclidienne proposée au paragraphe 1 a la propriété suivante vis à vis de cette relation d'ordre. Il y a un plus petit sommet, qu'on appelle le pôle Nord et qui correspond au parenthésage $(\cdot((a_0a_1)a_2)\cdots a_{n+1})$. Il y a un plus grand sommet, qu'on appelle le pôle Sud et qui correspond au parenthésage $(a_0(a_1(\cdots(a_n a_{n+1})\cdot)))$. Si l'on décide que la gravité va du nord au sud, alors l'ordre partiel correspond exactement à "descendre" le long des côtés du polytope. Voir dessin en section 3 pour \mathcal{K}^2 .

Il existe un autre polytope ayant des propriétés analogues, c'est le permutoèdre, dont les sommets sont en bijection avec les permutations. Notons S_n le groupe symétrique formé des permutations σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Considérons $M(\sigma) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ comme un point de \mathbb{R}^n à coordonnées entières. Tous les points $M(\sigma)$ sont dans l'hyperplan H_n puisque $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. L'enveloppe convexe des $M(\sigma)$ pour $\sigma \in S_n$ forme un polytope de dimension $n - 1$ noté \mathcal{P}^{n-1} appelé le *permutoèdre*.



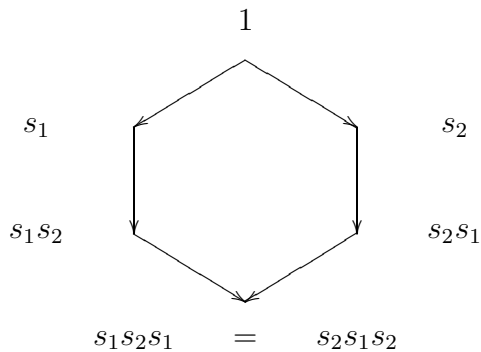
En basses dimensions les coordonnées des sommets sont :



L'ensemble des sommets de \mathcal{P}^{n-1} , c'est-à-dire le groupe symétrique S_n , est muni d'un ordre partiel tel que les relations de couverture correspondent aux côtés de \mathcal{P}^{n-1} , c'est l'ordre de Bruhat faible. Il se définit de la manière suivante. Soit s_i la transposition qui échange i et $i + 1$. On sait que le groupe S_n admet pour présentation les générateurs s_i , $i = 1, \dots, n - 1$, et les relations

$$\begin{cases} s_i^2 = 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \quad \text{si } |i - j| \geq 2. \end{cases}$$

On peut alors montrer que toute permutation admet une écriture de longueur minimale. On a une relation de couverture, notée $\sigma < \omega$, pour l'ordre de Bruhat faible si et seulement si $\omega = \sigma s_i$ pour un certain i et la longueur minimale de ω est strictement supérieure à la longueur minimale de σ . Exemple:



Nous allons maintenant montrer les relations étroites qui existent entre le permutoèdre et l'associaèdre. Tout d'abord le polytope \mathcal{K}^n contient le polytope \mathcal{P}^n , ou d'un autre point de vue plus "solide", on

peut obtenir \mathcal{P}^n à partir de \mathcal{K}^n par troncation. Voici comment. Les faces de \mathcal{P}^{n-1} appartiennent à des hyperplans affines qui se décrivent à partir des “shuffles”¹. Un $(k, n - k)$ -*shuffle* est une permutation $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_k; \omega_{k+1}, \dots, \omega_n)$ de $(1, 2, \dots, n)$ telle que $\omega_1 < \dots < \omega_k$ et $\omega_{k+1} < \dots < \omega_n$. On considère le polynôme

$$p_\omega(x_1, \dots, x_n) := (n - k)(x_{\omega_1} + \dots + x_{\omega_k}) - k(x_{\omega_{k+1}} + \dots + x_{\omega_n}) + \frac{1}{2}nk(n - k).$$

On note \mathcal{H}_ω l’hyperplan de \mathbb{R}^n d’équation $p_\omega(x_1, \dots, x_n) = 0$. Les hyperplans affines de H_n contenant les faces de \mathcal{P}^{n-1} sont les $\mathcal{H}_\omega \cap H_n$ associés aux shuffles ω . On remarque que si la suite d’entiers $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ du shuffle ω est une suite d’entiers consécutifs, alors $\mathcal{H}_\omega \cap H_n$ est exactement le sous-espace affine $F_{\omega_1, k} \cap H_n$ contenant une face de \mathcal{K}^{n-1} . Cette assertion découle de la comparaison des équations de ces hyperplans.

On peut aussi reconstruire l’associaèdre à partir du permutoèdre par la méthode suivante. Tout d’abord on construit une application ensembliste $\phi : S_n \rightarrow Y_n$ comme le composé $S_n \cong \tilde{Y}_n \rightarrow Y_n$ où \tilde{Y}_n est l’ensemble des *arbres binaires planaires à niveaux*. La différence entre les éléments de \tilde{Y}_n et ceux de Y_n est que, dans \tilde{Y}_n , deux sommets distincts sont réputés être à des niveaux différents. Ainsi les deux arbres



sont distincts dans \tilde{Y}_n mais représentent le même élément dans Y_n . Il est facile de voir qu’il y a une bijection entre \tilde{Y}_n et S_n : à tout arbre à niveau on associe la permutation $i \mapsto$ niveau du i -ème sommet. La surjection $\tilde{Y}_n \rightarrow Y_n$ consiste évidemment à oublier les niveaux.

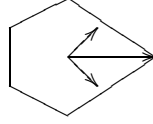
On est maintenant en mesure de construire la réalisation euclidienne de \mathcal{K}^{n-1} à partir de celle de \mathcal{P}^{n-1} . Soit $t \in Y_n$ un arbre binaire planaire et $\phi^{-1}(t)$ l’ensemble des permutations σ de S_n ayant t pour image par ϕ . On a alors le résultat suivant.

4.2. Proposition. *Soit C le centre du permutoèdre \mathcal{P}^{n-1} de coordonnées $C = (\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2})$. On a l’égalité vectorielle:*

$$\overrightarrow{CM}(t) = \sum_{\sigma \in \phi^{-1}(t)} \overrightarrow{CM}(\sigma).$$

¹Un shuffle, on dit aussi un “battage”, tire son nom d’une manipulation de jeux de cartes qui consiste à mélanger deux jeux ordonnés sans changer l’ordre de chacun d’entre eux.

Ainsi le point $M(t)$ s'obtient facilement à partir des $M(\sigma)$ pour σ antécédent de t :



5. ALGÈBRE

Il existe sur l'espace vectoriel engendré par les arbres binaires planaires une structure d'algèbre associative définie inductivement par la formule suivante: pour $t = t^l \vee t^r \in Y_p$ et $s = s^l \vee s^r \in Y_q$ on pose

$$t * s := t^l \vee (t^r * s) + (t * s^l) \vee s^r .$$

Cette formule n'a pas de sens lorsque t ou s vaut $|$. On pose alors $t * | = t$ et $| * s = s$, ce qui permet d'amorcer la récurrence. Ainsi on a

$$\Upsilon * \Upsilon = |\vee(|* \Upsilon) + (\Upsilon * |)\vee| = |\vee \Upsilon + \Upsilon \vee| = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} .$$

On note $K[Y_n]$ l'espace vectoriel sur le corps K ayant pour base les éléments de Y_n .

5.1. Proposition. *L'opération $*$ est associative, et donc $(\bigoplus_{n \geq 0} K[Y_n], *)$ est une algèbre associative unitaire sur le corps K .*

Preuve. Par récurrence ! □

Pour l'instant cette structure ne fait intervenir que les arbres binaires planaires, c'est-à-dire les sommets de l'associaèdre, et la notion de greffe. Et pourtant on va voir qu'elle est liée à la structure géométrique du polytope, via la structure de poset. On a vu que, étant donnés deux arbres t et s , on peut les greffer en créant une nouvelle racine. Mais on peut aussi les greffer différemment. On note t/s (lire t sur s) l'arbre obtenu en identifiant la racine de t à la feuille de gauche de s , et on note $t \setminus s$ (lire t sous s) l'arbre obtenu en identifiant la racine de s à la feuille de droite de t . Ainsi le nombre de sommets internes de t/s (comme de $t \setminus s$) est la somme des nombres de sommets internes de t et de s . Par exemple :

$$\Upsilon / \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} , \quad \Upsilon \setminus \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} .$$

Pour l'ordre partiel de Tamari on a toujours

$$t/s < t \setminus s$$

ou bien l'égalité si l'un des deux arbres est \mid .

On peut montrer le résultat suivant qui relie la structure d'algèbre $*$ et l'ordre de Tamari :

5.2. Théorème. [LR2] *Pour tous arbres binaires planaires t et s on a l'égalité*

$$t * s = \sum_{t/s \leq x \leq t \setminus s} x .$$

La somme est donc étendue à tous les arbres qui se trouvent entre t/s et $t \setminus s$. On appelle cet ensemble un *intervalle* en combinatoire.

Dans la définition du produit $*$ sur $\bigoplus_n K[Y_n]$ on voit nettement deux termes distincts. Introduisons les deux opérations \prec , appelée *gauche* et \succ , appelée *droite* :

$$t \prec s := t^l \vee (t^r * s) \quad , \quad t \succ s := (t * s^l) \vee s^r .$$

Comme on a

$$t * s := t \prec s + t \succ s$$

par définition, on dit que l'opération associative $*$ se *scinde* en deux opérations. Celles-ci ne sont pas associatives, par contre la relation d'associativité de $*$ se scinde en trois relations, qui sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x \prec y) \prec z = x \prec (y * z), \\ (x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z), \\ (x * y) \succ z = x \succ (y \succ z). \end{array} \right.$$

Un espace vectoriel sur K , noté A , muni de deux opérations binaires \prec et \succ satisfaisant aux trois relations ci-dessus (avec $*$ $= \prec + \succ$ évidemment), est appelé une *algèbre dendriforme*. On constate immédiatement que toute algèbre dendriforme est une algèbre associative pour le produit $*$.

Il se trouve que $(\bigoplus_n K[Y_n], \prec, \succ)$ est une algèbre dendriforme très particulière. En effet elle est aux algèbres dendriformes ce que l'algèbre des polynomes en une variable est aux algèbres associatives. Plus précisément elle possède la propriété universelle suivante: pour toute algèbre dendriforme A et tout élément $a \in A$ il existe un et un seul morphisme d'algèbres dendriformes $f : \bigoplus_n K[Y_n] \longrightarrow A$ qui envoie l'arbre $\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}$ sur a . On dit que $(\bigoplus_n K[Y_n], \prec, \succ)$ est l'algèbre dendriforme libre sur un générateur (de même que l'algèbre de polynome en une variable est l'algèbre associative libre sur un générateur) (cf. [Lo1]).

5.3. Séries dendriformes. Ce résultat a plusieurs conséquences intéressantes. Par exemple il permet de généraliser la notion de série entière $\sum_n a_n x^n$ en remplaçant les entiers n par des arbres binaires planaires t . Ainsi on peut travailler avec des séries de la forme $\sum_t a_t x^t$, c'est-à-dire les additionner, les multiplier, les composer. Le point crucial, conséquence de la propriété universelle, consiste à donner un sens à $(\sum_t a_t x^t)^s$ pour tout arbre s . Le principe consiste à écrire s en fonction du générateur, puis de remplacer celui-ci par l'élément dont on

veut prendre la puissance. Par exemple si $s =$  alors, puisque

$s =$  \succ  \prec  , on a

$$\left(\sum_t a_t x^t\right)^s = \left(\sum_t a_t x^t\right) \succ \left(\sum_t a_t x^t\right) \prec \left(\sum_t a_t x^t\right).$$

Pour plus de détails on pourra consulter [Lo2] et [BF].

5.4. Algèbres de Zinbiel. On sait que les algèbres commutatives forment une classe importante parmi les algèbres associatives. On définit une *algèbre dendriforme commutative* comme étant une algèbre dendriforme qui vérifie la relation $x \succ y = y \prec x$ pour tous éléments x et y . Il en résulte, bien sûr, que le produit associatif $*$ est commutatif. Puisque tout produit droit est un produit gauche, on peut réécrire les trois relations de définition avec, par exemple, le seul produit gauche. Ainsi la première relation devient

$$(x \prec y) \prec z = x \prec (y \prec z) + x \prec (z \prec y). \quad (Zb)$$

On vérifie aisément que la troisième relation donne aussi la relation (Zb) et que la seconde relation est une conséquence de (Zb). Ainsi une algèbre dendriforme commutative est définie par une seule opération, en l'occurrence \prec , satisfaisant une seule relation, à savoir (Zb). Cette structure était déjà connue dans un autre contexte et est appelée *algèbre de Zinbiel*², cf. [Lo1]. L'intérêt des algèbres de Zinbiel est qu'elles sont aux algèbres commutatives ce que les algèbres associatives sont aux

²On pourra lire une courte biographie de Professeur (virtuel) Guillaume Zinbiel dans le numéro 109 de L'Ouvert (avril 2004).

algèbres de Lie:

$$\begin{array}{ll} \text{algèbres de Zinbiel} & \longrightarrow \text{algèbres commutatives} \\ (Z, x \prec y) & \mapsto (Z, xy = x \prec y + y \prec x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{algèbres associatives} & \longrightarrow \text{algèbres de Lie} \\ (A, xy) & \mapsto (A, [x, y] = xy - yx). \end{array}$$

6. INVERSION DE SÉRIES ENTIÈRES

On considère la série entière

$$f(x) = x + a_1x^2 + a_2x^3 + \cdots + a_nx^{n+1} + \cdots$$

et on note

$$g(x) = x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots + b_nx^{n+1} + \cdots$$

son inverse pour la composition, c'est-à-dire $f(g(x)) = x$. Le coefficient b_n est un polynôme en les a_i , $1 \leq i \leq n$. En basses dimensions on obtient

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1 \\ b_2 &= 2a_1^2 - a_2 \\ b_3 &= -5a_1^3 + 5a_1a_2 - a_3 \\ b_4 &= 14a_1^4 - 21a_1^2a_2 + 6a_1a_3 + 3a_2^2 - a_4 \end{aligned}$$

et plus généralement

$$b_n = \sum (-1)^{\sum n_i} \lambda(n_1, \dots, n_k) a_1^{n_1} \cdots a_k^{n_k}$$

où la somme est étendue à tous les k -uplets d'entiers positifs ou nuls (n_1, \dots, n_k) tels que $n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k = n$. Ici le coefficient $\lambda(n_1, \dots, n_k)$ est le nombre de cellules de l'associaèdre \mathcal{K}^{n-1} qui sont isomorphes au produit cartésien $(\mathcal{K}^0)^{n_1} \times \cdots \times (\mathcal{K}^{k-1})^{n_k}$. La traduction en termes d'arbres planaires est la suivante. A tout arbre planaire t on associe le k -uplet $n(t) = (n_1(t), \dots, n_k(t))$ où $n_i(t)$ est le nombre de sommets de t ayant une racine et $i + 1$ feuilles. Ainsi pour la corolle on obtient $(0, \dots, 0, 1)$. Pour un arbre binaire planaire on obtient (n) s'il a $n + 1$ feuilles. Alors le coefficient $\lambda(n_1, \dots, n_k)$ est le nombre d'arbres planaires t à $n + 1$ feuilles tels que $n(t) = (n_1, \dots, n_k)$.

Par exemple $\lambda(n)$ est le nombre d'arbres binaires planaires à $n + 1$ feuilles, c'est-à-dire le nombre de Catalan $c_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

Il existe une preuve "opéradique" de la formule ci-dessus qui fait intervenir explicitement les parenthésages, mais il serait intéressant d'en trouver une qui fasse intervenir la structure topologique de l'associaèdre.

7. VARIANTES, QUESTIONS, PROBLÈMES

7.1. Familles de polytopes. Les simplexes, les hypercubes, les associaèdres, les permutoèdres forment des familles de polytopes dont le nombre de cotés en dimension 2 est respectivement 3, 4, 5, 6. Qu'en est-il pour $k \geq 7$? Remarquons que pour $k = 2$ il est naturel de considérer la famille des espaces globulaires (2 cellules en chaque dimension, sauf en dimension maximale où il n'y a qu'une cellule), même si ce ne sont pas des polytopes. Voir la figure "Polytopes" ci-dessous.

7.2. Autres polytopes simples. Dans l'hyperplan H_n le permutoèdre peut être défini par des inégalités, à savoir $p_\omega(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ où ω parcourt les $(k, n - k)$ -shuffles, cf. 4.1. On a vu que si l'on se restreint à certains shuffles, on obtient l'associaèdre. Un autre exemple est donné en se restreignant aux ω de la forme $(1, 2, \dots, k; k + 1, \dots, n)$ ou $(k + 1, \dots, n; 1, 2, \dots, k)$. Le polytope obtenu est un hypercube (à une affinité près (cf. [Lo3])). C'est donc encore un polytope simple, c'est-à-dire un polytope de dimension $n - 1$ donc chaque sommet est adhérent à n cotés. Peut-on caractériser les familles de shuffles qui définissent des polytopes simples ?

7.3. Noeud de trèfle. Il y a une relation étrange entre le noeud de trèfle et l'associaèdre \mathcal{K}^3 . Si on dessine sur \mathcal{K}^3 un chemin qui part du centre d'un carré (au sens large, c'est-à-dire éventuellement un rectangle) va vers le centre d'un pentagone adjacent, puis vers l'autre carré adjacent, etc, alors on finit par revenir au point de départ en étant passé par tous les centres des pentagones une fois et tous les centres des carrés deux fois. En remplaçant (judicieusement) les intersections aux centres des carrés par des "pont-tunnels", on trouve le noeud de trèfle.

7.4. Algèbres de Hopf. L'algèbre dendriforme construite sur les arbres binaires planaires au paragraphe 5 a en fait une structure plus riche: c'est une algèbre de Hopf (cf. [LR1]). C'est la version non-commutative de l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer. Elle est reliée au problème de renormalisation, cf. [BF].

7.5. Arbres planaires. On peut se demander si les propriétés algébriques des arbres binaires planaires exposées au paragraphe 5 peuvent s'étendre aux arbres planaires (pas seulement ceux qui sont binaires). Tout d'abord il est intéressant de remarquer que ces arbres sont en bijection avec les cellules de l'associaèdre. On a déjà vu que les arbres binaires planaires donnent les sommets. A l'autre extrémité, la corolle (arbre à un seul sommet) correspond à la cellule maximale.

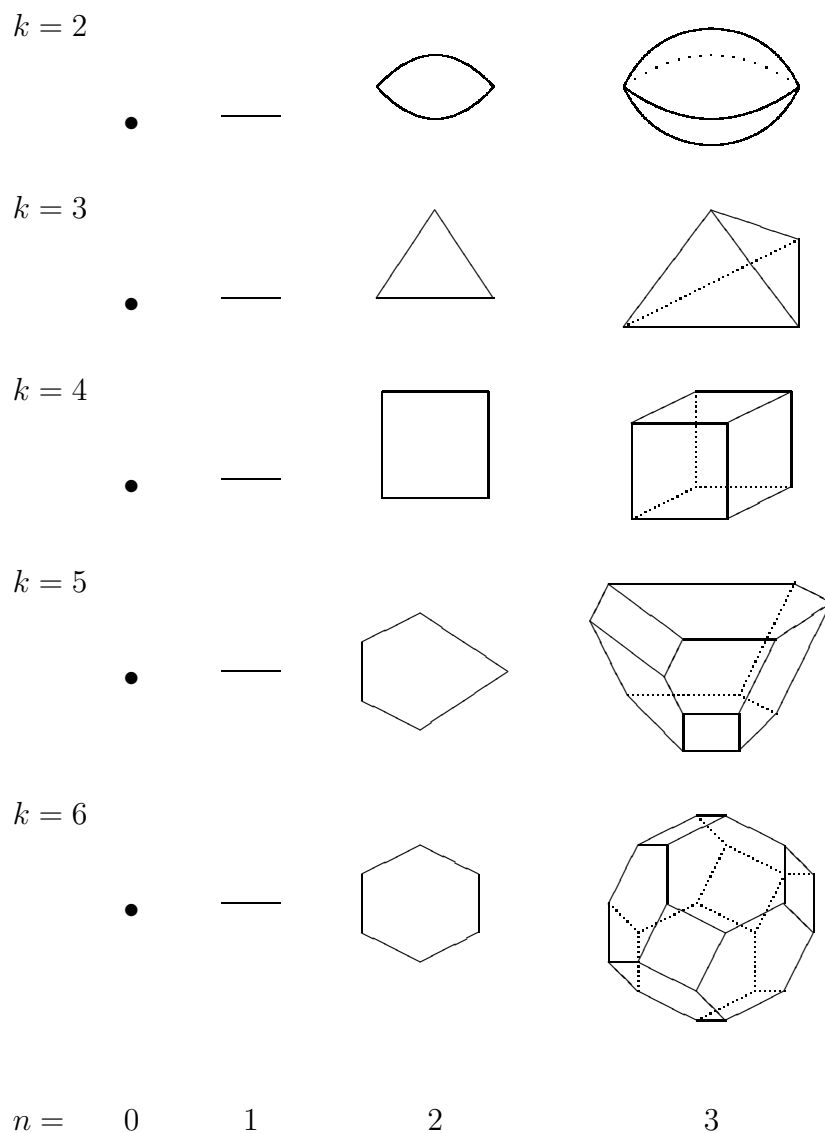


FIGURE 1. Polytopes

Pour les arbres à trois feuilles on a maintenant trois arbres:



Les deux premiers correspondent aux opérations droite et gauche respectivement. Il est donc naturel d'introduire une troisième opération binaire pour tenir compte de la corolle. On obtient ainsi une nouvelle structure d'algèbres avec 3 opérations génératrices. On montre qu'elles

satisfont à 7 relations (une par cellule du triangle). Voir [LR3] et [PR] pour plus de détails.

7.6. Polynôme d'Ehrhart. Voici un petit problème concernant l'associaèdre. Le mathématicien strasbourgeois Eugène Ehrhart a défini un invariant très intéressant des polytopes, que l'on appelle tout simplement le polynôme d'Ehrhart. On en trouvera, par exemple, une construction et ses principales propriétés dans un article de l'Ouvret par T. Delzant [Del]. Problème: calculer le polynôme d'Ehrhart de l'associaèdre. On trouvera quelques calculs concernant le polynôme d'Ehrhart du permutaèdre dans [BP].

7.7. Physique-Chimie. La nature nous offre de nombreux exemples d'atomes (ou de molécules) formant un tétraèdre ou un cube. On trouve aussi des permutaèdres, appelés *cellules de Birkhoff* dans ce contexte. Existe-t-il des molécules ayant la forme d'un associaèdre ?

REFERENCES

- [BF] C. Brouder; A. Frabetti, *QED Hopf algebras on planar binary trees*. J. Algebra 267 (2003), no. 1, 298–322.
- [BP] M. Beck ; D. Pixton, *The Ehrhart polynomial of the Birkhoff polytope*. Discrete Comput. Geom. 30 (2003), no. 4, 623–637.
- [Del] T. Delzant, *Le polynôme d'Ehrhart* L'ouvert 98 (2000), pp 52-59.
- [Dev] S. L. Devadoss, *Tessellations of moduli spaces and the mosaic operad*, Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998), 91–114, Contemp. Math., 239, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [GKZ] I. M. Gelfand; M.M. Kapranov; A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory and Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994. x+523 pp.
- [Lee] C. Lee, *The associahedron and triangulations of the n-gon*, European J. Combin. 10 (1989), no. 6, 551–560.
- [Lo1] J.-L. Loday, *Dialgebras*, in “Dialgebras and related operads”, 7–66, Lecture Notes in Math., 1763, Springer, Berlin, 2001.
- [Lo2] J.-L. Loday, *Arithmetree*, Journal of Algebra 258 (2002), 275-309.
- [Lo3] J.-L. Loday, *Realization of the Stasheff polytope*, Archiv der Mathematik 83 (2004), 267-278.
- [LR1] J.-L. Loday; M.O. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*. Adv. in Maths 139 (1998), 293–309.
- [LR2] J.-L. Loday; M.O. Ronco, *Order structure on the algebra of permutations and of planar binary trees*, J. Algebraic Combinatorics, 15(3) (2002), 253–270.
- [LR3] J.-L. Loday; M.O. Ronco, *Trialgebras and families of polytopes*. In ”Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-theory” Contemporary Mathematics 346 (2004), 369–398.
- [PR] P. Palacios; M. Ronco, *Weak Bruhat order on the set of faces of the permutahedra*. Preprint 2004, ArXiv: math.CO/0404352.

- [Sta1] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H -spaces*. I, II. Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; *ibid.* 293-312.
- [Sta2] J. D. Stasheff, *From operads to "physically" inspired theories*. Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 53-81, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

Solution de l'exercice. La face de \mathcal{K}^3 qui contient ces quatre points est dans l'hyperplan $F_{2,2}$.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, CNRS ET UNIVERSITÉ
LOUIS PASTEUR, 7 RUE R. DESCARTES, 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE
E-mail address: loday@math.u-strasbg.fr
URL: www-irma.u-strasbg.fr/~loday/