C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, p. 141-146, 1995

Algèbre/*Algebra*

Algèbres ayant deux opérations associatives (digèbres)

Jean-Louis LODAY

Résumé – Nous donnons des axiomes pour des algèbres ayant deux opérations associatives. Ce nouveau type d'algèbre, appelé « digèbre », est aux algèbres de Leibniz ce que les algèbres associatives sont aux algèbres de Lie. Nous construisons la théorie d'homologie des digèbres à partir des arbres binaires. Le calcul de l'homologie d'une digèbre libre permet de montrer que l'opérade associée aux digèbres est une opérade de Koszul.

Algebras with two associative operations (dialgebras)

Abstract – *We give axioms for algebras with two associative operations. This new type of algebra, called "dialgebra", is related to Leibniz algebras in a way similar to the relationship between associative algebras and Lie algebras. We define the homology theory of dialgebras which is based on the set of binary trees. The computation of the homology of a free dialgebra shows that the operad associated to the dialgebras is a Koszul operad.*

Abridged English Version – An *associative dialgebra D*, or *dialgebra* for short, over a field $\mathbb{K}$ is a vector space equipped with two binary operations denoted $\dashv$ and $\vdash$ satisfying the five axioms

$$\begin{cases} x \dashv (y \dashv z) = (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z. \end{cases}$$

We show that the free dialgebras $\mathbf{Dias}(V)$ over the $\mathbb{K}$-vector space V is isomorphic to $TV \otimes V \otimes TV$ where TV is the tensor module over V.

Any dialgebra D gives rise to a Leibniz algebra D_L (*cf.* [3]) having the same underlying vector space and whose bracket is given by $[x, y] = x \dashv y - y \vdash x$. This functor from dialgebras to Leibniz algebras has a left adjoint which defines the notion of *universal enveloping dialgebra* of a Leibniz algebra.

The notion of dialgebra defines a quadratic operad (*cf.* [2]) which admits a dual that we describe explicitly (*cf.* 1.12). The dual dialgebras are strongly related to dual Leibniz algebras and to associative algebras (*cf.* diagram in 1.12).

For any dialgebra D we construct a chain complex by means of *binary planar trees.* More precisely the module of n-chains is made of $(2n)!/n!(n+1)!$ copies of $D^{\otimes n}$ indexed by the binary planar trees having $n+1$ leaves. This construction gives rise to a homology theory $HY_*(D)$ for dialgebras. We prove that the homology of a free dialgebra is trivial (*cf.* 2.5). As a consequence the dialgebra operad is Koszul in the sense of Ginzburg and Kapranov (*cf.* [2]).

There is also a cohomology theory for dialgebras, and it turns out that $HY^*(D)$ is naturally a dual dialgebra (in the operad sense).

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0764-4442/95/03210141 $ 2.00

Dans cette Note $\mathbb{K}$ est un corps et le produit tensoriel au-dessus de $\mathbb{K}$ est noté $\otimes$. Pour tout espace vectoriel V on note TV l'algèbre (associative unitaire) tensorielle sur V.

1. DIGÈBRES. – 1.1. *Définition.* – Une *digèbre associative* sur $\mathbb{K}$ (ou simplement *digèbre*) est un $\mathbb{K}$-module D muni de deux opérations binaires (applications linéaires) :
opération *gauche* : $\dashv$: $D \otimes D \to D$;
opération *droite* : $\vdash$: $D \otimes D \to D$,
vérifiant les cinq axiomes suivants :

$$\begin{cases} x \dashv (y \dashv z) = (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z) \\ (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z) \\ (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z, \end{cases}$$

pour tout x, y, z dans D.

On remarquera que chacune des deux opérations est associative. Un morphisme de digèbres est une application linéaire compatible aux 2 opérations.

1.2. *Exemples.* – *a*) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative. On peut la munir d'une structure de digèbre en posant $x \dashv y = xy = x \vdash y$ pour tout x, $y \in A$.

b) Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative, M un A-bimodule et $f : M \to A$ un morphisme de A-bimodules. On munit M d'une structure de digèbre en posant, pour tout m, $m' \in M$,

$$m \dashv m' := mf(m'), \qquad \text{et} \quad m \vdash m' := f(m)m'.$$

c) Si D et D' sont deux digèbres le produit tensoriel $D \otimes D'$ est encore une digèbre pour

$$(x \otimes x') \dashv (y \otimes y') = (x \dashv y) \otimes (x' \dashv y'),$$

et

$$(x \otimes x') \vdash (y \otimes y') = (x \vdash y) \otimes (x' \vdash y').$$

En particulier l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(D) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \otimes D$ des matrices $n \times n$ sur D est une digèbre.

1.3. PROPOSITION. – *La digèbre libre* $\mathbf{Dias}(V)$ *sur le* $\mathbb{K}$*-module* V *a pour module sous-jacent* $TV \otimes V \otimes TV$ *et pour opérations :*

$$\omega_1 \otimes v_1 \otimes \omega_1' \dashv \omega_2 \otimes v_2 \otimes \omega_2' = \omega_1 \otimes v_1 \otimes (\omega_1'\omega_2 v_2 \omega_2')$$
$$\omega_1 \otimes v_1 \otimes \omega_1' \vdash \omega_2 \otimes v_2 \otimes \omega_2' = (\omega_1 v_1 \omega_1' \omega_2) \otimes v_2 \otimes \omega_2'.$$

On remarquera qu'une digèbre libre est un cas particulier de l'exemple *b*) avec $M = TV \otimes V \otimes TV$, $A = TV$ et l'homomorphisme f est la concaténation. Le point principal de la démonstration de la proposition 3 est le résultat suivant :

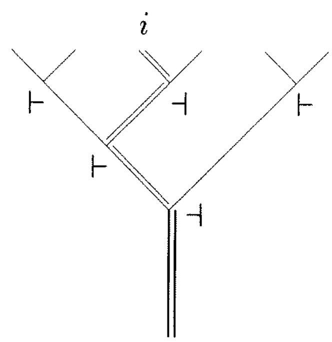
1.4. LEMME ET NOTATION. – *Dans une digèbre* D *tout monôme du type* $x_1 \dots x_n$ *(avec des signes* $\dashv$, $\vdash$ *et un certain parenthésage) est égal à un monôme du type*

$$x_1 \vdash \cdots \vdash x_i \dashv \cdots \dashv x_n,$$

dont la valeur ne dépend pas du parenthésage. On le note $x_1 \cdots \check{x}_i \cdots x_n$.

1.5. *Remarque.* – L'indice i du monôme ci-dessus est déterminé de la façon suivante. Un monôme dans D est décrit par un arbre binaire où chaque sommet est marqué de l'un des deux signes $\dashv$ ou $\vdash$. En remontant à partir de la racine et en suivant la direction gauche (resp. droite) aux sommets marqués $\dashv$ (resp. $\vdash$) on aboutit à l'indice i.

Exemple :



1.6. *Algèbres de Leibniz* [3]. – Une *algèbre de Leibniz* $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel muni d'une opération binaire $[-, -] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfaisant à la relation de Leibniz :

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y].$$

Une algèbre de Lie est un exemple d'algèbre de Leibniz.

1.7. Proposition. – *Soit D une digèbre sur $\mathbb{K}$. Le crochet*

$$[x, y] = x \dashv y - y \vdash x$$

satisfait à la relation de Leibniz et munit donc D d'une structure d'algèbre de Leibniz (notée D_L).

1.8. *Définition.* – Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Leibniz et $T\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes T\mathfrak{g}$ la digèbre libre sur le module sous-jacent. Le quotient par l'idéal (au sens des digèbres) engendré par les éléments $x \dashv y - y \vdash x - [x, y]$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$ est appelé la *digèbre enveloppante* de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$:

$$Ud(\mathfrak{g}) := (T\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes T\mathfrak{g})/\{x \dashv y - y \vdash x - [x, y] \,|\, x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

1.9. Proposition. – *Le foncteur $\mathfrak{g} \mapsto Ud(\mathfrak{g})$ est adjoint à gauche du foncteur $D \mapsto D_L$.*

1.10. *Module sur une digèbre.* – Par définition un *module* M sur une digèbre D est un espace vectoriel muni de deux opérations $\vdash$: $D \otimes M \to M$ et $\dashv$: $M \otimes D \to M$ qui vérifient, pour x, y, z dans D ou M, les cinq axiomes 1.1 lorsqu'ils ont un sens. On constate qu'un bimodule sur une algèbre associative A est équivalent à un module sur la digèbre A.

1.11. *L'opérade* **Dias**. – Tout type d'algèbre donne naissance à une opérade algébrique. Pour les définitions et propriétés des opérades algébriques on pourra consulter [2] ou [5]. D'après la proposition 3 on voit que, en dimension n, l'opérade **Dias** associée aux digèbres associatives est telle que

$$\mathbf{Dias}(n) = n\,\mathbb{K}[S_n],$$

i.e. la somme de n copies de la représentation régulière du groupe symétrique S_n. On peut montrer que **Dias** est une opérade cyclique au sens de [1], c'est-à-dire que **Dias** (n) est en fait une représentation de S_{n+1} et que la composition est compatible à cette action.

L'opérade **Dias** est quadratique, elle admet donc une opérade duale **Dias**$^!$.

1.12. Proposition. – *Une* **Dias**$^!$*-algèbre,* i.e. *une digèbre duale, est un espace vectoriel* R *sur* $\mathbb{K}$ *équipé de deux opérations binaires notées* $\prec$ *et* $\succ$ *vérifiant les trois axiomes*

$$\begin{cases} (a \prec b) \prec c = a \prec (b \prec c) + a \prec (b \succ c) \\ a \succ (b \prec c) = (a \succ b) \prec c \\ a \succ (b \succ c) = (a \prec b) \succ c + (a \succ b) \succ c. \end{cases}$$

On pourra vérifier élémentairement que $D \otimes R$ muni du crochet

$$\begin{aligned} [x \otimes a,\, y \otimes b] := {} & (x \dashv y) \otimes (a \prec b) - (y \vdash x) \otimes (b \succ a) \\ & - (y \dashv x) \otimes (b \prec a) + (x \vdash y) \otimes (a \succ b), \end{aligned}$$

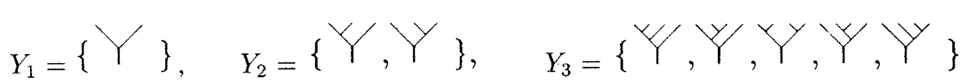
est une algèbre de Lie (*cf.* [2], corollary 2.2.9).

La comparaison des différentes catégories d'algèbres (*cf.* [4] pour les algèbres de Leibniz duales) donne un diagramme commutatif dont la symétrie par rapport à l'axe vertical médian reflète la dualité des opérades :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Dias}^! - alg \arrow[dr] & & \mathbf{Dias} - alg \arrow[dr] & \\ \mathbf{Leib}^! - alg \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{As} - alg \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{Leib} - alg \\ & \mathbf{Com} - alg \arrow[ur] & & \mathbf{Lie} - alg \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

2. Homologie des digèbres. – 2.1. *Arbres binaires.* – On note Y_n l'ensemble des arbres binaires planaires ayant une seule racine et $n+1$ feuilles. Le qualificatif binaire signifie que chaque sommet a une racine et deux feuilles. Un élément de Y_n sera appelé un n-arbre.

Exemples :



Le nombre d'éléments de Y_n est $c_n = (2n)!/n!(n+1)!$ (nombre de Catalan). Il est commode d'étiqueter les feuilles d'un arbre de gauche à droite par $0, 1, \ldots, n$. Pour tout i, $1 \leqq i \leqq n-1$, on note $\theta_i(y)$ l'arbre obtenu à partir de y en supprimant la feuille numéro i.

2.2. *Complexe de chaînes d'une digèbre.* – Par définition le complexe de chaînes $(CY_*(D),\, d)$ d'une digèbre D est défini par $CY_n(D) = \mathbb{K}[Y_n] \otimes D^{\otimes n}$, $d = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i d_i$, avec

$$d_i(y;\, a_1, \ldots, a_n) := (\theta_i(y);\, a_1, \ldots, a_i \circ_i^y a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Le symbole $\circ_i^y$ est $\dashv$ ou bien $\vdash$ suivant que la i-ième feuille de y est orientée SE-NW(\) ou SW-NE(/).

2.3. Lemme. – *Pour tout $i < j$ on a $d_i\, d_j = d_{j-1}\, d_i$, donc $(CY_*(D),\, d)$ est un complexe de chaînes.*

C'est une conséquence des 5 axiomes des digèbres.

2.4. *Homologie des digèbres.* – Par définition l'*homologie de la digèbre D* est l'homologie du complexe de chaînes ci-dessus :

$$HY_n(D) := H_n(CY_*(D), d), \qquad n \geqq 1.$$

2.5. Théorème. – *L'homologie de la digèbre libre sur l'espace vectoriel V est triviale, plus précisément*

$$HY_1(TV \otimes V \otimes TV) \cong V,$$
$$HY_n(TV \otimes V \otimes TV) = 0, \qquad \textit{pour} \quad n > 1.$$

La démonstration se fait en exhibant une homotopie explicite

$$h = h_n := CY_n(D) \to CY_{n+1}(D).$$

Étant donné un n-arbre y on note $\chi_i(y)$ (resp. $\xi_i(y)$) le $(n+1)$-arbre obtenu en remplaçant la i-ième feuille de y par l'arbre $\curlyvee$ (resp. en ajoutant devant la i-ième feuille une feuille parallèle à celle-ci). Dans les formules suivantes $\breve{\omega}_i$ est un élément homogène de $TV \otimes V \otimes TV$, et y est un n-arbre. Pour $\omega = u_1 \dots u_n \in TV$ on note $\omega^{\smile}$ l'élément $u_1 \dots \breve{u}_n \in TV \otimes V \otimes TV$ (*voir* lemme 4). On pose

$$h(y;\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \breve{\omega}_n\, u) = (-1)^n\, (\chi_n(y);\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \breve{\omega}_n, \breve{u}),$$
$$h(y;\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \omega_n\, v\, \breve{u}) = (-1)^n\, (\xi_n(y);\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \omega_n\, \breve{v}, \breve{u}),$$

lorsque le dernier paramètre est simplement $\breve{u}$, il y a 3 cas :

– si les deux dernières feuilles de y sont de la forme $\curlyvee$, alors

$$h(y;\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \breve{u}) = 0,$$

– si les deux dernières feuilles de y sont de la forme $//$, alors

$$h(y;\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1}\, v,\, \breve{u}) = (-1)^n\, (\chi_n(y) - \xi_{n-1}(y);\, \breve{\omega}_1, \dots, \breve{\omega}_{n-1},\, \breve{v}, \breve{u}),$$
$$h(y;\, \breve{\omega}_1, \dots, \omega_{n-1}\, \breve{v},\, \breve{u}) = (-1)^n\, (\chi_n(y) - \chi_{n-1}(y);\, \breve{\omega}_1, \dots, \omega_{n-1}{}^{\smile}, \breve{v}, \breve{u}).$$

On vérifie que $dh_n + h_{n-1}\, d = id_n$ pour tout $n > 1$.

~~Corollaire. – Pour toute algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ il y a un isomorphisme naturel $HL_n(\mathfrak{g}) \cong HY_n(Ud(\mathfrak{g}))$, $n \geqq 1$.~~

2.6. Théorème. – *Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique zéro. L'opérade* **Dias** *associée aux digèbres associatives sur $\mathbf{K}$ est une opérade de Koszul (et donc aussi l'opérade duale* **Dias**$^!$).

La première partie de la preuve consiste à calculer les espaces $\mathbf{Dias}(n)$ à partir de la digèbre duale libre et de montrer que $\mathbf{Dias}(n) \cong \mathbf{K}[Y_n] \otimes \mathbf{K}[S_n]$. Puis on montre que le complexe construit par Ginzburg et Kapranov ayant pour espace de chaînes $(\mathbf{Dias}^!(n) \otimes D^{\otimes n})_{S_n}$ est précisément $CY_*(D)$. Enfin, par le théorème 4.2.5 de [2], le théorème 2.5 implique que **Dias** est une opérade de Koszul.

La cohomologie d'une digèbre D, notée $HY^*(D)$, se définit comme l'homologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(CY_*(D),\, \mathbf{K})$.

2.7. Théorème. – *Pour toute digèbre D le module gradué $HY^*(D)$ est naturellement équipé d'une structure de digèbre duale graduée (au sens de* 1.12).

Note remise le 10 avril 1995, acceptée le 10 mai 1995.

Références bibliographiques

[1] E. Getzler et M. M. Kapranov, Cyclic operads and cyclic homology, *preprint*, 1994.

[2] V. Ginzburg et M. M. Kapranov, Koszul duality for operads, *Duke Math. J.*, 76, 1994, pp. 203-272.

[3] J.-L. Loday, Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz, *Enseign. Math.*, 39, 1993, p. 269-293.

[4] J.-L. Loday, Cup-product for Leibniz cohomology and dual Leibniz algebras, *Math. Scand.*, 1995, (à paraître).

[5] J.-L. Loday, La renaissance des opérades, in *Séminaire Bourbaki*, Exposé 792, novembre 1994, *Astérisque*, 26 p. (à paraître).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et CNRS,
7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France.
e-mail: loday@math.u-strasbg.fr