EXPOSITIONES
MATHEMATICAE

Expo. Math. 12 (1994), 165-178

Série de Hausdorff, idempotents Eulériens et algèbres de Hopf

Jean-Louis Loday

Summary. The Hausdorff series can be made explicit through some element $e_n^{[1]}$ in the group algebra $\mathbf{Q}[S_n]$ of the symmetric group. The very same element appears as an idempotent which splits Harrison homology from Hochschild homology. A theoretical proof of this fact is given by using the convolution operation in Hopf algebras. As a by-product one obtains a simple construction of all the Eulerian idempotents $e_n^{[i]}$ and easy proofs of their properties.

La série de Hausdorff $\Phi(X,Y) = \sum_{n>0} \Phi_n(X,Y)$, où $\Phi_n(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré n en les variables non commutatives X et Y, est définie par l'identité

$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(\Phi(X,Y)).$$

On peut montrer (*cf.* proposition 3.4) que le polynôme $\Phi_n(X,Y)$ est de la forme $\sum_{i+j=n} \frac{1}{i!}\frac{1}{j!} \varphi_n(\underbrace{X,\ldots,X}_{i \text{ fois}},\underbrace{Y,\ldots,Y}_{j \text{ fois}})$, où $\varphi_n(X_1,\ldots,X_n)$ est un certain polynôme de degré n en les variables non commutatives $X_1,\ldots X_n$, linéaire en chacune des variables X_i. Si on note

$$(0) \qquad \sigma.(X_1X_2\ldots X_n) = X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}\ldots X_{\sigma(n)}$$

l'action de la permutation σ, $\varphi_n(X_1,\ldots,X_n)$ est de la forme

$$\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma \sigma.(X_1\ldots X_n),\ a_\sigma \in \mathbf{Q}.$$

Par abus de notation on note $\varphi_n = \sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\sigma \in \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$. Les coefficients a_σ ont été calculés explicitement (*cf.* [So], [He], [R], [S] et 4.2), ils ne dépendent que du nombre de descentes de σ. Cette expression combina-

0723-0869/94/020165-14$4.30

toire permet de constater que φ_n est l'idempotent eulérien $e_n^{[1]}$ qui permet d'identifier l'homologie de Harrison-André-Quillen à un facteur direct de l'homologie de Hochschild (*cf.* [Ba], [GS1], [L1] et 4.3).

Le but de cet article est de donner une définition intrinsèque de $e_n^{[1]} \in \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$ à l'aide de l'algèbre de Hopf tensorielle. Cette définition, qui permet de montrer facilement la propriété de scindage évoquée ci-dessus (*cf.* [GS 2], [L2, section 4.5]) permet aussi de montrer, sans calculs combinatoires, que $\varphi_n = e_n^{[1]}$ (*cf.* théorème 3.1). De plus, il en résulte aisément que $e_n^{[1]}$ est un idempotent.

En fait $e_n^{[1]}$ est le premier d'une famille d'idempotents $e_n^{[1]}, e_n^{[2]}, \ldots, e_n^{[n]}$ de $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$, qui permettent de scinder complètement l'homologie de Hochschild (*cf.* [GS1] [L1]). L'approche en termes d'algèbres de Hopf permet de déduire la suite $e^{[i]} = (e_1^{[i]}, e_2^{[i]}, \ldots, e_n^{[i]}, \ldots)$ à partir de la suite $e^{[1]}$, et même en fait de la suite $\mathrm{Id} = (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \ldots)$, par les formules

$$e^{[i]} = \frac{(e^{[1]})^{*i}}{i!}, \quad e^{[1]} = \log^*(\mathrm{Id}).$$

Dans ces formules $e^{[i]}$ représente un endomorphisme k-linéaire d'un module tensoriel $T(V)$ et $*$ désigne le produit de convolution (*cf.* les sections 1 et 2). Il suit aussi immédiatement de cette présentation que les éléments $\psi^k = \Sigma_i k^i e_n^{[i]}$ sont à coefficients entiers.

Une large part des résultats exposés ici sont la traduction, dans le cadre des algèbres de Hopf, des résultats de C. Reutenauer exposés dans [R]. Ce point de vue, qui permet de faire le lien avec la décomposition de l'homologie de Hochschild en caractéristique zéro (*cf.* [L2, section 4.5]), a été exploité plus généralement par M. Ronco [Ro].

Je remercie Pierre Cartier et Maria Ronco pour d'utiles conversations sur ce sujet et le rapporteur pour ses commentaires.

1. Algèbres de Hopf et convolution

Soit k un anneau commutatif et $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf sur k. On note $\mu : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la multiplication (associative), d'unité $u : k \to \mathcal{H}$, et $\Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ la co-multiplication (co-associative), de co-unité $c : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Rappelons que Δ est un homomorphisme d'algèbres et donc que μ est un homomorphisme de co-algèbres. La plupart des résultats exposés ici n'utilise pas l'antipode et donc n'utilise que la structure de bigèbre de $\mathcal{H}$.

Soit f et $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ deux applications k-linéaires. Par définition, la *convolution* de f et g est l'application k-linéaire

$$f * g := \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}.$$

Les quatre résultats suivants sont des conséquences faciles de la structure de bigèbre de $\mathcal{H}$.

1.1. PROPOSITION. — *La convolution est associative.* □

1.2. PROPOSITION. — *Le composé* $uc : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *est l'élément neutre pour la convolution.* □

1.3. PROPOSITION. — *Si* $h : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *est un morphisme d'algèbres (resp. de co-algèbres), alors* $h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)$ *(resp.* $(f * g) \circ h = (f \circ h) * (g \circ h)$*).* □

1.4. PROPOSITION. — *Si* $\mathcal{H}$ *est commutative (resp. co-commutative) alors* $f * g$ *est un morphisme d'algèbres (resp. co-algèbres) lorsque* f *et* g *le sont.* □

1.5. DÉFINITION. — La p-ième *opération d'Adams* de $\mathcal{H}$ est l'opérateur

$$\psi^p := \mathrm{Id} * \mathrm{Id} * \cdots * \mathrm{Id} \qquad (p \text{ facteurs}).$$

On a évidemment $\psi^1 = \mathrm{Id}$ et $\psi^p * \psi^q = \psi^{p+q}$.

1.6. PROPOSITION. — *Si* $\mathcal{H}$ *est commutative (ou co-commutative) on a*

$$\psi^p \circ \psi^q = \psi^{pq} \ , \ p, q \geq 1.$$

Démonstration. Puisque Id est un morphisme d'algèbres, il en est de même pour ψ^p par la proposition 1.4. (en supposant $\mathcal{H}$ commutative par exemple). De la proposition 1.3 on déduit

$$\psi^p \circ \psi^q = \psi^p \circ (\mathrm{Id} * \cdots * \mathrm{Id}) = \psi^p * \cdots * \psi^p = \psi^{pq}. \square$$

1.7. Remarque. — Si $\mathcal{H}$ admet une antipode S, on peut poser $\psi^{-1} = S$ car $\psi^{-1} * \psi^{1} = S * \mathrm{Id} = \mu \circ (S \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = uc$, qui est l'élément neutre pour la convolution (*cf.* 1.2). La proposition 1.6 est alors valable pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$.

2. Idempotents Eulériens

Soit V un module libre sur k (qui sera $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) et soit $T(V)$ son algèbre tensorielle :

$$T(V) = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots$$

La multiplication est définie par concaténation et la comultiplication est l'unique homomorphisme d'algèbre $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ tel que

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \text{ et } \Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v \text{ pour } v \in T(V)_1 = V.$$

Remarquons que la formule générale pour Δ est donnée par

$$\Delta(v_1 \ldots v_n) = \sum_{p+q=n} v_{i_1} \ldots v_{i_p} \otimes v_{i_{p+1}} \ldots v_{i_{p+q}} \tag{2.1}$$

où la somme est étendue à tous les (p, q)-shuffles $(i_1, \ldots, i_{p+q})$ de $(1, \ldots, n)$.

Considérons T comme un foncteur de la catégorie des k-modules dans la catégorie des k-modules gradués. Toute transformation naturelle de foncteurs $\theta : T \to T$ définit un élément $\theta_n \in k[\mathfrak{S}_n]$ par la formule suivante :

$$\theta_n \cdot (v_1 v_2 \ldots v_n) = \theta\ (v_1 v_2 \ldots v_n) \in T(V)_n = V^{\otimes n}, \tag{2.2}$$

pour tout $v_1, \ldots, v_n \in V$.

En effet il suffit de prendre des éléments v_i linéairement indépendants dans V. Si θ' est une autre transformation naturelle de foncteurs, le composé $\theta \circ \theta'$ est relié à la structure produit de l'algèbre de groupe $k[\mathfrak{S}_n]$ par la formule

$$(\theta \circ \theta')_n = \theta'_n \theta_n.$$

Ceci est dû à la convention (0) adoptée pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$ (i.e. action à droite).

Les transformations naturelles de foncteurs ψ^p décrites en section 1 donnent donc naissance à des éléments $\psi_n^p \in \mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$, appelés encore *opérations d'Adams.* Il est clair, d'après leur définition, qu'on peut les rendre explicites en termes de shuffles (*cf.* 2.1).

L'identité de la proposition 1.6 entre opérations d'Adams se traduit par l'identité suivante dans $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$:

(2.3) $$\psi_n^p \psi_n^q = \psi_n^{pq}.$$

On peut voir cette identité comme une relation entre les shuffles et la structure multiplicative de $\mathbf{Z}[\mathfrak{S}_n]$.

2.4. Lemme. — *Soit $\theta : T(V) \to T(V)$ un homomorphisme k-linéaire gradué. Si $\theta(1) = 0$, alors $(\theta^{*k})_n = 0$ pour tout $n < k$.*

Démonstration. Pour $k = 1$ c'est précisément l'hypothèse puisque $T(V)_0 = k$ est engendré par 1. Plus généralement, pour $n < k$, $\Delta^k(v_1 \dots v_n)$ est une somme de termes du type $a_1 \otimes \dots \otimes a_k$ où l'un au moins des a_i vaut 1. Appliquant $\theta \otimes \cdots \otimes \theta$ on trouve 0 car $\theta(1) = 0$. □

Posons $J = \mathrm{Id} - uc : T(V) \to T(V)$ et choisissons $k = \mathbf{Q}$. On définit les éléments $e^{[i]}$ par

(2.5) $$e^{[1]} := \log^*(uc + J) = J - \frac{J^{*2}}{2} + \frac{J^{*3}}{3} - \dots + (-1)^{k-1}\frac{J^{*k}}{k} + \cdots$$

(2.6) $$e^{[i]} := \frac{(e^{[1]})^{*i}}{i!}, \ i \geq 1.$$

Puisque l'élément neutre de la convolution est uc, il est naturel de poser

(2.7) $$e^{[0]} := \frac{(e^{[1]})^{*0}}{0!} = uc.$$

Remarquons que $J(1) = 0$, donc, d'après le lemme 2.4, la série $\log^*(uc + J)$ a un sens. Plus précisément la restriction de J^{*k} à $V^{\otimes n}$ est nulle pour $k > n$.

2.8. DÉFINITION. — On appelle *idempotents eulériens* les éléments $e_n^{[i]} \in \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$ définis par l'action de $e^{[i]}$ sur $v_1 v_2 \dots v_n \in V^{\otimes n}$ (on démontre ci-dessous que ce sont bien des idempotents).

2.9. THÉORÈME. — *Les idempotents eulériens satisfont aux propriétés suivantes*

(*a*) *Pour* $n = 0$, $e_0^{[0]} = 1$, $e_0^{[i]} = 0$ *sinon, pour* $n \geq 1$, $e_n^{[0]} = 0$ *et* $e_n^{[i]} = 0$ *si* $i > n$.

(*b*) *Pour tout* $p \in \mathbf{Z}$ *et* $n \geq 1$ *on a*

$$\psi_n^p = pe_n^{[1]} + p^2 e_n^{[2]} + \dots + p^n e_n^{[n]},$$

en particulier

$$\mathrm{id}_n = e_n^{[1]} + e_n^{[2]} + \dots + e_n^{[n]}.$$

(*c*) $e_n^{[i]} e_n^{[j]} = \begin{cases} e_n^{[i]} & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$

Les $e_n^{[i]}$, $i = 1, \dots, n$, forment donc une famille complète d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$.

Démonstration. (a) Puisque $e^{[0]} = uc$ on a $e_0^{[0]} = (uc)_0 = \mathrm{id}$ et $e_n^{[0]} = (uc)_n = 0$ si $n \geq 1$. Puisque $J(1) = 0$, on a aussi $e^{[1]}(1) = 0$. Donc, d'après le lemme 2.4, $(e^{[1]})^{*i}$ est nul lorsqu'on le restreint à $V^{\otimes n}$ pour $i > n$, d'où $e_n^{[i]} = 0$ pour $i > n$.

(b) Les deux séries formelles $\exp(X) = 1 + \sum_{i \geq 1} \frac{X^i}{i!}$ et $\log(1 + X) = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{X^i}{i}$ sont reliées par l'identité

$$\exp(p \log(1 + X)) = (1 + X)^p \ , \ p \in \mathbf{N}.$$

Dans l'anneau des applications k-linéaires graduées de $T(V)$ dans lui-même, muni du produit de convolution (*cf.* propositions 1.1 et 1.2) on applique cette identité à l'élément $J = \mathrm{id} - uc$. On obtient

$$\exp^*(p \log^*(uc + J)) = (uc + J)^{*p} = \mathrm{Id}^{*p} = \psi^p.$$

Puisque, par définition, $e^{[1]} = \log^*(uc + J)$ et $e^{[i]} = \dfrac{(e^{[1]})^{*i}}{i!}$, on obtient

$$uc + \sum_{i\geq 1} p^i e^{[i]} = \psi^p.$$

La restriction à $V^{\otimes n}$ donne les équations cherchées, car $e_n^{[i]} = 0$ pour $i > n$.

(c) Pour n fixé la matrice exprimant les éléments ψ_n^p, $1 \leq p \leq n$, en fonction des $e_n^{[i]}$, $1 \leq i \leq n$, est une matrice de Vandermonde, donc inversible dans $\mathbf{Q}$. Puisque $\psi_n^p \psi_n^q = \psi_n^{pq}$ on en déduit l'existence d'une famille unique de coefficients a_{ijk} tels que

$$e_n^{[i]} e_n^{([j]} = \sum_{n=1}^{n} a_{ijm} e_n^{[m]}.$$

L'égalité entre opérations d'Adams ci-dessus implique

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} p^i q^j a_{ijm} = (pq)^m, \text{ pour } m = 1, \ldots, n.$$

La seule solution de ce système d'équations est $a_{iii} = 1$ et $a_{ijm} = 0$ sinon. D'où le résultat. □

2.10. Remarque. Soit $L(V)$ l'algèbre de Lie libre sur V considérée comme un sous-e.v. de $T(V)$. On désigne par $L(V)^{[i]}$ le sous-e.v. de $T(V)$ engendré par les P^i pour $P \in L(V)$. Par le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt on a : $T(V) = \bigoplus_{i\geq 0} L(V)^{[i]}$. L'idempotent $e_n^{[i]}$ s'interprète alors comme la projection sur la composante de degré $[i]$ (*cf.* [He] et [R]).

3. La série de Hausdorff

La série de Hausdorff $\Phi(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{m\geq 1} \Phi_m(X_1, \ldots, X_n)$, où $\Phi_m(X_1, \ldots, X_n)$ est un polynôme homogène de degré m en les variables non commutatives $X_1, \ldots, X_n$ est définie par l'égalité de séries formelles (*cf.* [B]) :

$$\exp(X_1)\exp(X_2)\cdots\exp(X_n) = \exp(\Phi(X_1, \ldots, X_n)).$$

On note $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n)$ la partie multilinéaire de $\Phi_n(X_1, \ldots, X_n)$ (remplacer X_i^2 par 0 pour tout i dans Φ_n).

3.1. THÉORÈME. — $\varphi_n(X_1, \ldots, X_n) = e_n^{[1]} \cdot (X_1 X_2 \ldots X_n)$.

3.2. PRÉLIMINAIRES. — Avant de passer à la démonstration de 3.1 nous allons introduire quelques notations et faire quelques rappels.

Dans une algèbre de Hopf, un élément x est dit *grouplike* si $\Delta(x) = x \otimes x$. Le produit de deux éléments grouplike est grouplike. Il est immédiat de vérifier que si x est grouplike alors

$$(f * g)(x) = f(x)g(x), \tag{3.3}$$

pour tous endomorphismes f et g.

Un élément y est dit *primitif* si $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$. Le crochet ($[a, b] = ab - ba$) de deux éléments primitifs est primitif. Le module des éléments primitifs de $T(V)$ est l'algèbre de Lie libre sur V.

L'algèbre tensorielle complétée $\widehat{T}(V)$ du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel V est donnée par $\widehat{T}(V) = \prod_{n \geq 0} V^{\otimes n}$. Un élément $x \in \widehat{T}(V)$ est dans l'idéal d'augmentation si et seulement si sa composante de degré 0 est nulle : $x_0 = 0$. Pour un tel élément x son exponentielle $\exp(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n!}$ est bien définie. Il est facile de vérifier que si x est primitif, alors $\exp(x)$ est grouplike. Inversement si $(1+y)$ (avec $y_0 = 0$) est grouplike, alors $\log(1+y) = \sum_{n>0} (-1)^n \frac{y^n}{n}$ est primitif.

Démonstration du théorème 3.1. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des éléments linéairement indépendants dans V. Puisque X_i est primitif, $\exp(X_i)$ est grouplike ainsi que le produit $\exp(X_1) \ldots \exp(X_n)$. En appliquant le commentaire précédent (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \log(\exp(X_1) \ldots \exp(X_n)) &= \log^*(\mathrm{Id})(\exp(X_1) \ldots \exp(X_n)) \\ &= e^{[1]}(\exp(X_1) \ldots \exp(X_n)). \end{aligned}$$

Notre but est de calculer la composante n-linéaire de degré n de cet élément. On peut donc supposer $X_i^2 = 0$ pour tout i. La composante de degré n de $\exp(X_1)\dots\exp(X_n)$ est alors la composante de degré n de $(1+X_1)\dots(1+X_n)$, c'est-à-dire $X_1X_2\dots X_n$. Avec les notations de la section 2 on obtient alors

$$\varphi_n(X_1,\dots,X_n) = e_n^{[1]}\cdot(X_1X_2\dots X_n). \ \square$$

La série de Hausdorff est alors entièrement déterminée dès que l'on a montré la

3.4. PROPOSITION (E.D. Dynkin).
On a

$$\Phi_m(X_1,\dots,X_n) = \sum \frac{1}{i_1!\dots i_n!}\varphi_m(\underbrace{X_1,\dots,X_1}_{i_1},\underbrace{X_2,\dots,X_2}_{i_2},\ \underset{\dots}{\dots}\ ,\underbrace{X_n,\dots,X_n}_{i_n})$$

où la somme est étendue à tous les m-uplets d'entiers positifs ou nuls $(i_1,\dots,i_m)$ tels que $i_1+\dots+i_m=n$.

Démonstration. Il suffit de faire la démonstration pour $n=2$, la démonstration pour n quelconque étant analogue. Dans l'égalité

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = \log^*(\exp(X)\exp(Y))$$

la composante de degré m du terme de gauche est $\Phi_m(X,Y)$. Celle du terme de droite est $e_m^{[1]}(\sum_{i+j=m}\frac{X^i}{i!}\cdot\frac{Y^j}{j!})$ soit, d'après le théorème 3.1, $\varphi_m(\sum_{i+j=m}\frac{X^i}{i!}\frac{Y^j}{j!}) = \sum\frac{1}{i!j!}\varphi_m(\underbrace{X,\dots,X}_{i},\underbrace{Y,\dots,Y}_{j})$. $\square$

Cette interprétation de φ_n, via les algèbres de Hopf, nous permet de démontrer facilement une propriété classique.

3.5. PROPOSITION. — *L'élément $\varphi_n(X_1,\dots,X_n)$ de $T(V)$ appartient à l'algèbre de Lie libre $L(V)\subset T(V)$.*

Démonstration. Puisque $L(V) = \operatorname{Prim} T(V)$ il suffit de montrer que $\varphi_n(X_1,\dots,X_n)$, est primitif.

Puisque $u = \exp(X_1)\ldots\exp(X_n) \in \widehat{T}(V)$ est grouplike, $\log u$ est primitif. Or $\log u = \log^* u$, donc $\log^*(u)$, c'est-à-dire $e^{[1]}(u)$, est primitif. En particulier sa composante de degré n, à savoir $e_n^{[1]} \cdot (X_1, \ldots, X_n) = \varphi_n(X_1, \ldots X_n)$ est primitive. □

Remarque. Un théorème classique (Dynkin-Specht-Wever) affirme que, en caractéristique zéro, si un polynôme homogène de degré k est en fait dans $L(V)$, alors on obtient son expression en termes de commutateurs en remplaçant tout monôme $X_1X_2\ldots X_k$ par $\frac{1}{k}[[\ldots[X_1, X_2], \ldots], X_k]$. Une démonstration élégante utilisant la convolution de $T(V)$ est décrite dans [W].

4. Compléments

4.1. EXPLICITATION DE $e_n^{[1]}$. — Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $d(\sigma)$ désigne le nombre de *descentes* de σ, c'est-à-dire le nombre d'entiers i tels que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

4.2. PROPOSITION. — $e_n^{[1]} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \sigma$ *avec* $a_\sigma = \dfrac{(-1)^{d(\sigma)}}{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ d(\sigma) \end{pmatrix}^{-1}$.

Démonstration. Chacune des descriptions de $e_n^{[1]}$ obtenues dans les sections précédentes permet de démontrer cette proposition. Les équations (2.9.b) permettent d'écrire, en inversant partiellement la matrice de Vandermonde, l'élément $e_n^{[1]}$ en fonction des ψ_n^p (*cf.* [Ro]) .Or, par définition de la convolution, les ψ_n^p peuvent s'écrire en termes de shuffles, et les coefficients de ceux-ci ne dépendent que du nombre de descentes (*cf.* [L1]).

Voici une démonstration plus directe, mais plus combinatoire utilisant l'égalité $\varphi_n = e_n^{[1]}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation ayant d descentes en $n_0, n_0 + n_1, \ldots, n_0 + n_1 + \ldots + n_{d-1}$ avec $n = n_0 + \cdots + n_d$. D'après (0) on cherche à calculer le coefficient de $X_{\sigma(1)}X_{\sigma(2)}\ldots X_{\sigma(n)}$ dans le développement de $\log(1+Z)$ pour

$$Z = (\sum_i X_i + \sum_{i<j} X_iX_j + \sum_{i<j<k} X_iX_jX_k + \cdots + X_1X_2\cdots X_n).$$

Puisque $\log(1+Z) = Z - \dfrac{Z^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{Z^n}{n} + \cdots$, on doit calculer la contribution $\alpha(j)$ de chaque puissance Z^j. Considérons un parenthèsage de $X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(n)}$ en j paquets, chaque paquet provenant d'un monôme de Z :

$$\overset{j_0 \text{ paquets}}{\underbrace{X_{\sigma(1)}\cdots}_{n_0}} \;\Big|\; \overset{j_1 \text{ paquets}}{\underbrace{\cdots}_{n_1}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; \overset{j_d \text{ paquets}}{\underbrace{\cdots X_{\sigma(n)}}_{n_d}} \;\Big|.$$

On a $\alpha(j)=\sum_{(j_0,\dots,j_d)}\binom{n_0-1}{j_0-1}\binom{n_1-1}{j_1-1}\cdots\binom{n_d-1}{j_d-1}$, où la somme est étendue aux $(d+1)$-uples d'indices $(j_0,\dots,j_d)$ tels que $j_0+\cdots+j_d=j$, $1\le j_k\le n_k$ pour tout k.

Évidemment le fait que les indices soient croissants dans les monômes de Z est ici le point important.

On trouve alors $\alpha(j)=\binom{n-d-1}{j-d-1}$ et finalement

$$a_\sigma=\sum_{j=d+1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}\binom{n-d-1}{j-d-1}=\frac{1}{n}\binom{n-1}{d}^{-1}.$$

Pour ce dernier calcul on a utilisé l'identité :

$$\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r}{k+r}\binom{m}{r}=$$

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\Big(\int_0^1 x^{k+r-1}dx\Big)\binom{m}{r}=\int_0^1(1-x)^m x^{k-1}dx=\frac{(k-1)!m!}{(k+m)!}.\quad\square$$

Pour les premières valeurs de n on obtient :

$$e_1^{[1]}=(\ )$$

$$e_2^{[1]}=\frac{1}{2}[(\ )-(12)]$$

$$e_3^{[1]}=\frac{1}{3}(\ )-\frac{1}{6}[(12)+(23)+(123)+(132)]+\frac{1}{3}(13)$$

$$\begin{aligned}e_4^{[1]}=\frac{1}{4}(\ )-\frac{1}{12}&[(12)+(23)+(34)+(123)+(234)+(243)+(132)\\&+(1234)+(1243)+(1432)+(13)(24)]\\&+\frac{1}{12}[(13)+(14)+(24)+(124)+(134)+(142)+(143)+(1342)\\&+(1324)+(1423)+(12)(34)]\\&-\frac{1}{4}(14)(23)).\end{aligned}$$

On remarquera que la dimension de la représentation $e_n^{[1]}$ est $n!$ fois le coefficient de la permutation identité ( ), c'est-à-dire $(n-1)!$.

4.3. Idempotents eulériens, algèbre cotensorielle et homologie de Hochschild .

Dans les paragraphes précédents on a utilisé la structure d'algèbre de Hopf co-commutative de l'algèbre tensorielle $T(V)$ et l'action à droite du groupe symétrique. Par dualité on peut définir les mêmes idempotents eulériens $e_n^{[i]}$ en utilisant la structure d'algèbre de Hopf *commutative* de l'algèbre *cotensorielle* $T'(V)$ et l'action à gauche du groupe symétrique.

Pour appliquer les propriétés des idempotents eulériens à l'homologie de Hochschild il faut de plus prendre en compte la structure graduée de $T'(V)$. La structure d'algèbre de $T'(V)$ est alors définie à l'aide des shuffles signés. La procédure de la section 1 donne naissance aux idempotents eulériens (signés) $e_n^{(i)} \in \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$. Leur relation avec les $e_n^{[i]}$ est tout simplement donnée par

$$s(e_n^{[i]}) = e_n^{(i)},$$

où $s : \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n] \to \mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$ est l'isomorphisme induit par $s(\sigma) = sgn(\sigma)\sigma$.

Il est clair que, pour tout n, les idempotents $e_n^{(i)}, i = 1, \ldots, n$, forment une famille complète d'idempotents orthogonaux.

Pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre commutative unitaire A et tout A-module M le bord de Hochschild b munit $M \otimes T'(A)$ d'une structure de complexe dont l'homologie $H_n(A, M)$ est l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M. L'action à gauche de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sur $M \otimes A^{\otimes n}$,

$$\sigma \cdot (m, a_1, \ldots, a_n) = (m, a_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, a_{\sigma^{-1}(n)}),$$

s'étend linéairement en une action de $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$, d'où la possibilité de faire opérer les $e_n^{(i)}$. La compatibilité de b à la structure d'algèbre de Hopf de $T'(A)$ implique les égalités

$$be_n^{(i)} = e_{n-1}^{(i)} b.$$

Ces relations permettent de décomposer l'homologie de Hochschild (*cf.* [GS1,GS2,L1,L2]). En particulier l'image de $e^{(1)}$ s'identifie à l'homologie de Harrison-André-Quillen (*cf.* [Ba] et loc. cit.).

4.4. IDEMPOTENTS EULÉRIENS ET OPÉRATEUR CYCLIQUE.

Soit $\tau_n = (12\dots n)$ la permutation cyclique de $\mathfrak{S}_n$ et $t_n = sgn(\tau_n)\tau_n$ l'élément correspondant de $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$. Il existe des relations étroites entre les $e_n^{(i)}$, les $e_{n+1}^{(i)}$ et t_n. Notons $\sigma \mapsto \tilde{\sigma}$ l'inclusion de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathfrak{S}_{n+1}$ définie par $\tilde{\sigma}(1) = 1$ et $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i-1)$ pour $2 \leq i \leq n+1$. On note aussi $N_n = 1 + t_n + t_n^2 + \cdots + t_n^{n-1}$. On a alors les égalités suivantes dans $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_{n+1}]$

$$\tilde{e}_n^{(i)}(1 - t_{n+1}) = (1 - t_{n+1})e_{n+1}^{(i)}$$
$$e_{n+1}^{(i)} N_{n+1} = N_{n+1}\tilde{e}_n^{(i-1)}.$$

De ces identités on peut conclure que le bicomplexe définissant l'homologie cyclique d'une algèbre (sur $\mathbf{Q}$) se scinde en somme de sous-complexes (*cf.* [L1] et [L2] pour plus de détails).

Références

[Ba] Barr, M., *Harrison homology, Hochschild homology and triples*, J. Alg. 8 (1968) 314–323.

[Bo] Bourbaki, N., *Groupes et Algèbres de Lie*, Chapitre 2, Hermann, Paris, 1972.

[GS1] Gerstenhaber, M., Schack, S.D., *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Applied Algebra 48 (1987), 229–247.

[GS2] Gerstenhaber, M., Schack, S.D., *The shuffle bialgebra and the cohomology of commutative algebras*, J. Pure Applied Algebra 70 (1991), 263–272.

[He] Helmstetter, J., *Série de Hausdorff d'une algèbre de Lie et projections canoniques de l'algèbre enveloppante*, J. Algebra 120 (1989), 170–199.

[L1] Loday, J.-L., *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96 (1989), 205–230.

[L2] Loday, J.-L., *Cyclic Homology*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 301, Springer Verlag, 1992.

[P] Patras, F., *Contruction géométrique des idempotents Eulériens. Filtration des groupes de polytopes et des groupes d'homologie de Hochschild*, Bull. Soc. Math. France 119 (1991), 173–198.

[R1] Reutenauer, C., *Theorem of PBW, logarithm and representations of the symmetric group whose orders are the Stirling numbers*, Springer Lect. Notes in Math. 1234 (1986), 267–284.

[R2] Reutenauer, C., *Free Lie Algebras*, (to appear).

[Ro] Ronco, M., *Adams operations on a Hopf algebra* , (to appear).

[So] Solomon, L., *On the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem*, , J. Comb. Theory 4 (1968), 363–375.

[S] Strichartz, R.S., *The Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula and solutions of differential equations* , J. Funct. Anal. 72 (1987), 302–345.

[W] Wigner, D., *An identity in the free Lie algebra,* Proc. Amer. Math. Soc. (1989), 639–640.

Received: 30.10.92
Revised: 02.04.93

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex