

Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives

Jean-Louis Loday

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS (UA 001),
7 rue René Descartes,
F-67084 Strasbourg, France

0. Introduction

Le but essentiel de cet article est d'étudier une filtration naturelle de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique des algèbres commutatives. La méthode employée consiste à construire des λ -opérations au sens de Grothendieck, d'où une γ -filtration pour chacune de ces théories. Ces filtrations existent sans aucune hypothèse de caractéristique sur l'anneau de base. Lorsque celui-ci contient le corps des rationnels \mathbf{Q} ces filtrations proviennent de graduations (décomposition de Hodge). On identifie certains des gradués associés à des théories connues (cohomologie de de Rham, homologie de Harrison).

La construction des λ -opérations utilise la *partition eulérienne* du groupe symétrique. Dans cette partition deux permutations appartiennent à la même classe d'équivalence si et seulement si elles ont le même nombre de descentes. Les cardinaux de ces classes sont les nombres eulériens. On définit à partir de cette partition les *éléments eulériens* dans l'algèbre du groupe symétrique. La première propriété remarquable des éléments eulériens est qu'ils forment une sous-algèbre *commutative* de l'algèbre du groupe symétrique. La seconde propriété est qu'ils commutent (en un sens que l'on précisera) au bord de Hochschild et au bord de Connes. C'est ce qui nous permettra de construire les λ -structures de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique.

Le contexte idéal pour énoncer ces propriétés est celui de la catégorie des ensembles finis, ou plutôt de l'algèbre qui lui est associée. C'est dans ce cadre que nous écrirons les démonstrations. Il présente l'avantage de montrer l'existence de λ -opérations (avec toutes les propriétés qui en découlent) sur l'homologie cyclique de tout module cyclique qui provient d'un foncteur de la catégorie des ensembles finis (resp. sur l'homologie simpliciale de tout module simplicial qui provient d'un foncteur de la catégorie des ensembles finis pointés).

Ces résultats ont été annoncés dans une Note aux Comptes Rendus [L2].

Voici le contenu de cet article chapitre par chapitre.

Le chapitre 1 est dévolu à l'étude de la partition eulérienne du groupe symétrique S_n . Cette partition donne naissance aux éléments eulériens $!_n$ dans l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[S_n]$; on en donne quelques propriétés essentielles notamment vis

à vis de la multiplication. Cette dernière s'exprime (cf. 1.7) sous la forme simple $\lambda_n^k \lambda_n^{k'} = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda_n^{k'k}$ où λ_n^k est une certaine combinaison linéaire des éléments eulériens l_n^1, \dots, l_n^k . On donnera deux démonstrations de nature assez différente de cette relation. La première que nous avons obtenue utilise la théorie des invariants et la structure de λ -anneau de l'algèbre des représentations de l'algèbre de Lie des matrices (cf. 5.5). La seconde, plus proche de l'homologie de Hochschild, est dans l'esprit de l'article de Gerstenhaber et Schack [G-S] (cf. 2.8 et 2.9). Ces propriétés multiplicatives ont un intérêt (en particulier combinatoire) indépendamment des applications aux théories d'homologie que l'on va faire. A cette occasion on a été amené à considérer les *nombre eulériens signés* et à conjecturer leur relation de récurrence. Celle-ci a été démontrée a posteriori par D. Foata [F].

Dans le chapitre 2 on introduit l'algèbre \mathbb{L} associée à la catégorie des ensembles finis *Fin* (et sa sous-algèbre \mathbb{L}' associée à la catégorie des ensembles finis pointés *Fin'*). Elle contient à la fois les algèbres des groupes symétriques, les bords de Hochschild et les bords de Connes. Le coeur de cet article consiste à démontrer des propriétés de commutation entre ces bords et les éléments eulériens du chapitre précédent (propositions 2.3 et 2.13). Comme conséquence on retrouve à partir des éléments eulériens une famille d'idempotents orthogonaux de $K[S_n]$ (proposition 2.8), dont on montre qu'elle est universelle pour la commutation au bord de Hochschild. L'existence de cette famille avait été démontrée par Gerstenhaber et Schack.

Dans le chapitre 3 on utilise les relations de commutation dans \mathbb{L}' pour étudier l'homologie (simpliciale) de certains modules simpliciaux, «certains» signifiant ceux pour lesquels le foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow (K\text{-modules})$ se factorise à travers la catégorie *Fin'*. C'est en particulier le cas pour le foncteur $[n] \mapsto M \otimes A^{\otimes n}$ où A est une K -algèbre commutative et M un A -module, qui en est l'exemple le plus important.

On montre ainsi l'existence de λ - et γ -opérations, d'où des filtrations sur l'homologie du module simplicial. Si K contient \mathbf{Q} on a une décomposition (type décomposition de Hodge) $H_n = H_n^{(1)} \oplus \dots \oplus H_n^{(n)}$ de l'homologie, qui coïncide avec celle donnée par Gerstenhaber et Schack [G-S] dans le cas de l'exemple précédent. Toujours dans cet exemple, le premier groupe gradué associé s'identifie à l'homologie de Harrison et le dernier au module des n -formes différentielles.

Le chapitre 4 est analogue au chapitre 3 mais porte sur l'homologie cyclique. Ainsi tout module cyclique provenant d'un foncteur $\text{Fin} \rightarrow (K\text{-modules})$ admet sur son homologie des λ -opérations qui en font un γ -anneau. L'exemple type est bien entendu $[n] \mapsto A^{\otimes n+1}$ où A est une K -algèbre commutative. Lorsque K contient \mathbf{Q} on a une décomposition $HC_n = HC_n^{(1)} \oplus \dots \oplus HC_n^{(n)}$ de l'homologie cyclique qui coïncide avec celle décrite par Burghlelea-Vigué-Poirrier [B-V] et avec celle décrite par Feigin-Tsygan [F-T] pour l'exemple type. Ainsi notre point de vue permet de faire le lien entre ces deux décompositions et de les rendre plus explicites. On montre comment se comporte, pour la γ -filtration, la longue suite exacte de Connes liant l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique.

L'objet du chapitre 5 est de décrire un contexte dans lequel les λ -opérations en homologie cyclique s'écrivent comme de vraies puissances extérieures. On

y rappelle le résultat principal de [L-P], qui affirme que, via la théorie des invariants, les éléments eulériens s'interprètent comme des puissances extérieures sur les matrices. On utilise cette traduction pour donner une démonstration des propriétés multiplicatives des éléments eulériens.

L'appendice est essentiellement un rappel sur les γ -anneaux dans le cas particulier d'un idéal de carré nul.

Notations. On note S_n le groupe symétrique considéré comme groupe d'automorphismes de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Ses éléments sont appelés permutations. On notera $\omega = \omega_n = (1\ n)(2\ n-1)\dots$ la «symétrie par rapport à $(n+1)/2$ » dont la signature est $(-1)^{n(n-1)/2}$.

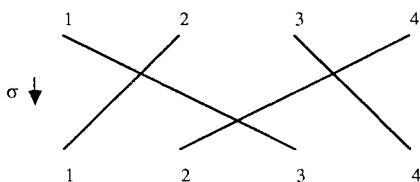
L'algèbre sur l'anneau K du groupe S_n est notée $K[S_n]$. La signature s'étend en un homomorphisme $\text{sgn}: K[S_n] \rightarrow K$. On note $\varepsilon_n = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma)\sigma$. Cet élément a la propriété suivante: pour tout $x \in K[S_n]$ on a $x\varepsilon_n = \text{sgn}(x)\varepsilon_n$. Le coefficient binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ est noté $\binom{n}{k}$.

1. Éléments eulériens de l'algèbre du groupe symétrique

On définit les *éléments eulériens* dans $K[S_n]$ et certaines combinaisons linéaires particulières de ceux-ci. On énonce quelques-unes de leurs propriétés. Lorsque les formules seront indépendantes de l'indice $n \geq 1$ on se permettra de ne pas le mentionner. Pour toute permutation σ on note $\text{Im } \sigma$ la suite $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$.

1.1. Définition. Le couple d'entiers consécutifs $(i, i+1)$ est appelé une *descente* pour la permutation $\sigma \in S_n$ si $\sigma(i) > \sigma(i+1)$.

Par exemple lorsque $\text{Im } \sigma = \{3, 1, 4, 2\}$, σ a deux descentes.



La notion inverse de celle de descente est celle de *retour* (reading en anglais). Le couple d'entiers consécutifs $(j, j+1)$ est un retour pour σ si $j+1$ apparaît avant j dans la suite $\text{Im } \sigma$. La permutation σ a k descentes si et seulement si σ^{-1} a k retours.

La notion de descente permet de décomposer l'ensemble S_n .

1.2. Définition. On pose $S_{n,k} = \{\sigma \in S_n \mid \sigma \text{ a } (k-1) \text{ descentes}\}$. La *partition eulérienne* de S_n est donnée par $S_n = S_{n,1} \cup \dots \cup S_{n,n}$.

Il est clair que id est la seule permutation n'ayant aucune descente, donc $S_{n;1} = \{\text{id}\}$. On a aussi $S_{n;n} = \{\omega_n\}$. Plus généralement ω_n permet d'établir une symétrie sur la partition eulérienne.

1.3. Lemme. $S_{n;k} = \omega_n S_{n;n-k+1} = S_{n;n-k+1} \omega_n$.

Démonstration. Si σ a $k-1$ descentes, il est clair que $\omega_n \sigma$ et $\sigma \omega_n$ ont $(n-1) - (k-1)$ descentes: ce sont les autres couples d'entiers. On en déduit $\omega_n \sigma$ et $\sigma \omega_n \in S_{n;n-k+1}$. \diamond

1.4. Définition-notation. Le cardinal de $S_{n;k}$ est noté $\alpha_{n;k}$ et est appelé *nombre eulérien*.

Les propriétés des nombres eulériens sont classiques (cf. [F-S]). On a en particulier

$$(1.4.0) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{n,k} = n!, \quad \alpha_{n,k} = \alpha_{n,n-k+1}.$$

$$(1.4.1) \quad \alpha_{n,k} = k \alpha_{n-1,k} + (n-k+1) \alpha_{n-1,k-1},$$

$$(1.4.2) \quad \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i}{i} \alpha_{n,k-i} = k^n \quad (\text{formule de Worpitzki}),$$

$$(1.4.3) \quad \sum_{i=1}^n i \alpha_{n,i} = \frac{(n+1)!}{2}.$$

Les formules (1.4.0) sont immédiates. Pour (1.4.1) on établit une bijection entre $S_{n;k}$ et la réunion de k copies de $S_{n-1;k}$ et $(n-k+1)$ copies de $S_{n-1;n-k-1}$ par suppression de n dans $\text{Im } \sigma$, $\sigma \in S_{n;k}$. La formule (1.4.2) se déduit de (1.4.1) et la formule (1.4.3) de (1.4.0).

Les premières valeurs de $\alpha_{n,k}$ sont données par le tableau suivant:

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	4	1			
4	1	11	11	1		
5	1	26	66	26	1	
6	1	57	302	302	57	1

On montre facilement que $\alpha_{n,2} = 2^n - (n+1)$.

Les résultats principaux de cet article sont conséquences des propriétés des éléments eulériens de l'algèbre sur \mathbf{Z} du groupe symétrique, que nous allons maintenant définir.

1.5. Définition-notation. Pour tout $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$ l'élément eulérien l_n^k est défini par

$$l_n^k = (-1)^{k-1} \sum_{\sigma \in S_{n;k}} \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbf{Z}[S_n].$$

Il est pratique de poser $\mathbf{Z}[S_0] = \mathbf{Z}$, $l_0^k = 1$ et $l_n^k = 0$ dans tous les autres cas.

La relation entre éléments eulériens et nombres eulériens est donnée par

$$\operatorname{sgn}(l_n^k) = (-1)^{k-1} \alpha_{n,k}.$$

On voit immédiatement que le lemme 1.3 implique les égalités

$$(1.5.1) \quad l_n^n = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \omega_n \quad \text{et} \quad l_n^k l_n^n = l_n^k l_n^k = l_n^{n-k+1}.$$

On remarque aussi que $\varepsilon_n = \sum_k (-1)^{k-1} l_n^k$.

1.6. Définition. Les λ -éléments de $\mathbf{Z}[S_n]$ sont définis, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\lambda^k = \lambda_n^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+i}{i} l_n^{k-i}.$$

On remarque que pour $n \geq 1$ la somme est en fait de $i=0$ à $k-1$. On a aussi

$$(1.6.1) \quad l_n^k = \lambda_n^k + (n+1) \lambda_n^{k-1} + \dots + \binom{n+1}{i} \lambda_n^{k-i} + \dots + \binom{n+1}{k-1} \lambda_n^1.$$

On voit donc que, d'une part $(\lambda_n^1, \dots, \lambda_n^n)$ forme une base du module libre engendré par (l_n^1, \dots, l_n^n) , d'autre part λ_n^i appartient à ce module pour tout i , en particulier pour tout $i > n$, λ_n^i est combinaison linéaire à coefficients entiers en les λ_n^k pour $k=1, \dots, n$.

L'une des propriétés importantes des éléments eulériens est qu'ils engendrent une sous-algèbre commutative dans $\mathbf{Z}[S_n]$. En fait on a un théorème plus précis à l'aide des λ_n^k .

1.7. Théorème. $\lambda_n^k \lambda_n^{k'} = \lambda_n^{k'} \lambda_n^k = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda_n^{kk'}$.

Le produit utilisé dans cette formule est celui de l'algèbre de groupe $\mathbf{Z}[S_n]$. On donnera deux démonstrations distinctes de ce théorème, l'une en 5.5 via la théorie des invariants et l'autre en utilisant le bord de Hochschild (cf. 2.8 et 2.9).

Il résulte du théorème 1.7 et de (1.6.1) que le produit $l_n^k l_n^{k'} = l_n^{k'} l_n^k$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers en les l_n^i , ce qui n'est pas du tout évident a priori.

1.8. γ -opérations et opérations d'Adams. On sait que les λ -opérations donnent naissance aux γ -opérations et aux opérations d'Adams ψ^k (cf. Appendice). Dans notre contexte les formules obtenues sont les suivantes

$$\gamma^k = \gamma_n^k = \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} \lambda_n^i = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n+1-k+i}{i} l_n^{k-i}$$

$$\text{et} \quad \psi^k = \psi_n^k = (-1)^{k-1} k \lambda_n^k.$$

En particulier on remarquera que $\gamma_n^1 = \text{id}$ et $\gamma_n^{n+1} = (-1)^n \varepsilon_n$ et $\gamma_n^k = 0$ si $k > n + 1$. Les éléments γ_n^k , $k = 1, \dots, n$ forment aussi une base du module engendré par les éléments eulériens (pour $n \geq 1$).

En termes d'opérations d'Adams le théorème 1.7 s'écrit

$$\psi^k \psi^{k'} = \psi^{k'} \psi^k = \psi^{kk'}.$$

1.9. Shuffles. Soient p et q deux entiers ≥ 1 , un (p, q) -shuffle est une permutation σ dans S_{p+q} telle que $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. Par exemple l'application σ telle que $\text{Im } \sigma = \{2, 4, 5, 1, 3\}$ est un $(3, 2)$ -shuffle. On définit de la même manière la notion de (p_1, p_2, \dots, p_k) -shuffle.

On pose pour tout $n \geq 1$ et $2 \leq k \leq n$:

$$\text{sh}^k = \text{sh}_n^k = (-1)^{k-1} \sum \text{sgn}(\sigma) \sigma \in \mathbf{Z}[S_n]$$

où la somme est étendue à tous les (p_1, p_2, \dots, p_k) -shuffles pour tous les k -uplets d'indices (p_1, \dots, p_k) tels que $p_1 + \dots + p_k = n$ et $p_j \geq 1$ pour tout j . Il est naturel de poser $\text{sh}_n^1 = \text{id}$.

1.10. Proposition.

$$\text{sh}_n^k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \lambda_n^i \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Démonstration. On exprime tout d'abord sh_n^k à l'aide des l_n^i . On dira qu'un shuffle σ est un «vrai» (p_1, \dots, p_k) -shuffle si $\sigma(p_i) > \sigma(p_i + 1)$ pour tout $i = 1, \dots, k$. L'ensemble des vrais (p_1, \dots, p_k) -shuffles est exactement $S_{n,k}$ car la condition ci-dessus exprime précisément que σ a $k-1$ descentes (cf. 1.1).

D'autre part un vrai (p_1, \dots, p_i) -shuffle peut être considéré comme un (p_1, \dots, p_k) -shuffle de $\binom{n-i}{k-i}$ manières différentes. Il s'en suit que $\text{sh}_n^k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{n-k+i}{i} l_n^{k-i}$ d'où son expression en termes de λ_n^i . \diamond

1.11. Corollaire. $\text{sh}^k - \text{sh}^{k-1} = \gamma^k$.

Démonstration. C'est une conséquence de 1.8 et de l'égalité triangulaire des coefficients binomiaux. \diamond

On remarquera que $\text{sh}_n^n = (-1)^{n-1} \varepsilon_n$ et $\text{sh}_n^k = 0$ pour $k \geq n + 1$.

1.12. Les idempotents $e_n^{(i)}$. Jusqu'à maintenant on travaillait dans $\mathbf{Z}[S_n]$. Pour la fin de ce paragraphe on se place dans $\mathbf{Q}[S_n]$. On définit les éléments $e_n^{(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$ comme solutions dans $\mathbf{Q}[S_n]$ des n équations ($k = 1, \dots, n$)

$$(1.12.1)_k \quad (-1)^{k-1} \lambda_n^k = k e_n^{(1)} + \dots + k^i e_n^{(i)} + \dots + k^n e_n^{(n)}.$$

Pour $i > n$ on pose $e_n^{(i)} = 0$. De l'expression du déterminant de la matrice de Vandermonde on déduit que $e_n^{(i)} \in \mathbf{Z}[1/n!][S_n]$.

1.13. Proposition. On a $\text{sgn}((-1)^{k-1} \lambda_n^k) = k^n$ et $\text{sgn}(e_n^{(i)}) = 0$ si $1 \leq i < n$ et $\text{sgn}(e_n^{(n)}) = 1$.

Démonstration. D'après la définition des λ_n^k en fonction des l_n^k on a

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}((-1)^{k-1} \lambda_n^k) &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i (-1)^{k-i-1} \binom{n+i}{i} \alpha_{n,k-i} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n+i}{i} \alpha_{n,k-i} = k^n \end{aligned}$$

d'après la formule de Worpitzki (1.4.2). Les équations (1.12.1)_k impliquent le résultat cherché pour les $e_n^{(i)}$. \diamond

On verra (cf. 2.8. g) qu'en fait la formule (1.12.1)_k est vraie pour tout $k \geq 1$. Pour l'instant on montre cette égalité pour $k = n + 1$.

1.14. Lemme. *L'égalité (1.12.1)_k est vraie pour $k = n + 1$, en particulier les $e_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, n + 1$ sont solutions du système d'équations de $n + 1$ équations à $n + 1$ inconnues*

$$(-1)^{k-1} \lambda_n^k = k e_n^{(1)} + \dots + k^i e_n^{(i)} + \dots + k^n e_n^{(n)} + k^{n+1} e_n^{(n+1)}, \quad k = 1, \dots, n + 1.$$

Démonstration. On va montrer que la relation linéaire $l_n^{n+1} = 0$ qui lie les λ_n^k pour $k = 1, \dots, n + 1$ implique que $e_n^{(n+1)} = 0$. En effet elle s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k+1} \lambda_n^k = 0.$$

Or on montre aisément par récurrence que

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n+1}{k+1} k^i = 0$$

pour $1 \leq i \leq n$ et $= (-1)^{n+1} (n+1)!$ pour $i = n + 1$; d'où on déduit $e_n^{(n+1)} = 0$. La dernière équation de ce système est donc précisément (1.12.1)_{n+1}. \diamond

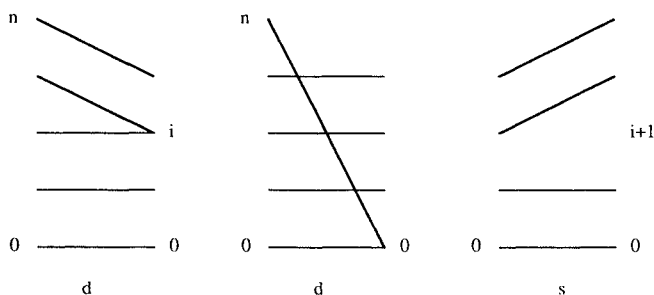
2. L'algèbre \mathbb{L} de la catégorie des ensembles finis

On immerge l'algèbre du groupe symétrique dans un anneau plus gros issu de la catégorie des ensembles finis. Ceci nous permet de montrer d'importantes propriétés de commutation entre les éléments eulériens d'une part et les bords de Hochschild et les bords de Connes d'autre part. Une conséquence inattendue s'en déduit: les propriétés des éléments eulériens pour la multiplication dans l'algèbre de groupe.

2.1. Les catégories Fin et Fin' . Soit $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ un ensemble fini à n éléments. Par définition la catégorie Fin a pour objets les ensembles $[n]$ et pour morphismes les applications ensemblistes. Munissons $[n]$ du point-base 0. La sous-catégorie de Fin des applications respectant le point-base (i.e. $f(0) = 0$) est notée Fin' .

Classiquement Δ est la sous catégorie de Fin des applications croissantes au sens large (pour l'ordre $0 < 1 < \dots < n$ sur $[n]$). On sait que la catégorie opposée Δ^{op} est engendrée par les applications faces $d_i: [n] \rightarrow [n-1]$, $i=0, \dots, n$ et dégénérescences $s_i: [n] \rightarrow [n+1]$, $i=0, \dots, n$.

(2.1.1) On définit un foncteur de $\Delta^{op} \rightarrow Fin'$, et donc par composition un foncteur $\Delta^{op} \rightarrow Fin$, de la manière suivante. L'image de d_i dans Fin' , que l'on note encore d_i par abus de notation, est donnée par $d_i(j)=j$ si $j \leq i$ et $d_i(j)=j-1$ si $j > i$ pour $i=0, \dots, n-1$; $d_n(j)=j$ si $j < n$ et $d_n(n)=0$; $s_i(j)=j$ si $j \leq i$ et $s_i(j)=j+1$ si $j > i$, pour $i=0, \dots, n$.



On vérifie aisément que ce foncteur est bien défini et donc aussi son composé $\Delta^{op} \rightarrow Fin$.

Remarque. Le foncteur $\Delta^{op} \rightarrow Fin'$ n'est pas injectif sur les morphismes, par exemple d_0 et $d_1: [1] \rightarrow [0]$ sont distincts dans Δ^{op} , mais égaux dans Fin' .

2.2. *Les algèbres \mathbb{L} et \mathbb{L}' .* L'algèbre \mathbb{L} est, en tant que groupe abélien, le groupe abélien libre sur l'ensemble des morphismes de Fin . Un élément de \mathbb{L} est donc une somme finie $\sum c_i f_i$ avec $c_i \in \mathbb{Z}$ et $f_i \in \text{Hom}_{Fin}([n], [p])$ pour un certain n et un certain p . La multiplication dans \mathbb{L} est donnée par:

$$fg = \begin{cases} f \circ g & \text{si } f \text{ et } g \text{ sont composables dans } Fin \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algèbre \mathbb{L}' est construite de la même manière en remplaçant la catégorie Fin par la catégorie Fin' . C'est donc une sous-algèbre de \mathbb{L} . Ces algèbres n'ont pas d'unité car Fin a un nombre infini d'objets. Mais elles ont des «unités locales», c'est à dire que pour toute famille finie d'éléments, il existe un élément qui joue le rôle d'unité.

On notera $\mathbb{L}_K = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ et similairement pour \mathbb{L}' .

L'algèbre \mathbb{L}' (et donc \mathbb{L}) contient de façon naturelle toutes les algèbres de groupe $\mathbb{Z}[S_n]$ car $S_n = \text{Aut}_{Fin'}([n])$. Ainsi $\sigma \in S_n$ peut être considéré comme une application (notée encore σ) $[n] \rightarrow [n]$ envoyant 0 sur 0. De même tous les éléments $\lambda_n^k, \lambda_n^k, \text{sh}_n^k, \dots$ définis au chapitre 1, peuvent être considérés comme des éléments de \mathbb{L}' .

On va tout d'abord montrer des formules de commutation dans \mathbb{L}' . On s'intéresse au bord de Hochschild abstrait

$$b_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \in \mathbb{L}', \quad \text{pour } d_i: [n] \rightarrow [n-1].$$

Ainsi b_n est un élément du sous-module $\mathbf{Z}[\text{Hom}_{\text{Fin}}([n], [n-1])]$ de \mathbb{L}' . On remarque que si $f_n \in \mathbf{Z}[S_n]$ et $f_{n-1} \in \mathbf{Z}[S_{n-1}]$ alors $b_n f_n$ et $f_{n-1} b_n$ appartiennent aussi à ce sous-module.

Les relations de Δ^{op} : $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ pour $i < j$ impliquent que $b_{n-1} b_n = 0$ dans \mathbb{L}' .

2.3. Proposition. *Pour tout n et tout k dans \mathbf{N} on a dans \mathbb{L}' l'égalité*

$$b_n l_n^k = (l_{n-1}^k + l_{n-1}^{k-1}) b_n.$$

Démonstration. On va montrer que dans le développement du produit $b l^k$ certains termes s'éliminent entre eux et que les termes restant sont exactement ceux de $(l^k + l^{k-1})b$.

Fixons $\sigma \in S_{n,k}$ et $d_i: [n] \rightarrow [n-1]$. On note $\text{sgn}(\sigma)$ la signature de σ et $\text{desc}(\sigma)$ son nombre de descentes (ici $k-1$).

1er cas. Supposons que $\sigma^{-1}(i+1) \neq \sigma^{-1}(i) \pm 1$. On va montrer que si $i \neq 0, n$, il existe σ' (uniquement déterminé) tel que $\text{desc}(\sigma') = \text{desc}(\sigma)$, $\text{sgn}(\sigma') = -\text{sgn}(\sigma)$, $d_i \sigma = d_i \sigma'$. En effet il suffit de prendre $\sigma' = (i \ i+1)\sigma$. L'égalité sur les signatures est immédiate. L'égalité sur les descentes est une conséquence de l'hypothèse: $\sigma^{-1}(i+1)$ et $\sigma^{-1}(i)$ non adjacents. L'égalité dans \mathbb{L}' provient de la relation $d_i(i \ i+1) = d_i$.

Pour $i=n$, il existe σ' (uniquement déterminé) tel que $\text{desc}(\sigma') = \text{desc}(\sigma)$, $\text{sgn}(\sigma') = (-1)^{n-1} \text{sgn}(\sigma)$, $d_n \sigma = d_0 \sigma'$. En effet il suffit de prendre $\sigma' = (1 \ 2 \dots n)\sigma$. L'égalité sur les signatures est immédiate. L'égalité sur les descentes est une conséquence de l'hypothèse: $0 \neq \sigma^{-1}(n) \pm 1$. L'égalité dans \mathbb{L}' provient de la relation $d_0(1 \ 2 \dots n) = d_n$.

2ème (resp. 3ème) cas. Supposons $\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) + 1$ (resp. $\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) - 1$). On va montrer qu'il existe σ' et j (uniquement déterminés) tels que $\text{desc}(\sigma') = \text{desc}(\sigma)$ (resp. $\text{desc}(\sigma') = \text{desc}(\sigma) - 1$), $\text{sgn}(\sigma') = (-1)^{i-j} \text{sgn}(\sigma)$ et $d_i \sigma = \sigma' d_j$. Pour $i \neq n$ (resp. $i \neq 0$) il suffit de prendre $j = \sigma^{-1}(i)$ (resp. $j = \sigma^{-1}(i+1)$) et de prendre pour σ' la permutation dont le diagramme se déduit de celui de σ en ôtant la ligne qui joint $\sigma^{-1}(i+1)$ à $i+1$. La construction de σ' ne change pas le nombre de descentes (resp. elle réduit le nombre de descentes de 1 car $\sigma^{-1}(i+1) = \sigma^{-1}(i) - 1$). La différence entre les deux signatures dépend du nombre de segments (dans le diagramme de σ) modulo deux qui coupent celui qui joint $\sigma^{-1}(i+1)$ à $i+1$, d'où le signe $(-1)^{i-j}$ (resp. $(-1)^{i-j-1}$). L'égalité dans \mathbb{L}' est immédiate par construction.

Pour les valeurs extrêmes $i=0$ et $i=n$ il faut remplacer $n+1$ par 0 et -1 par n .

En conclusion, dans le développement de bl^k les termes du premier cas s'éliminent entre eux deux à deux $((-1)^i d_i \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma + (-1)^i d_i \operatorname{sgn}(\sigma')\sigma' = 0$ et $d_0 \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma + (-1)^n d_n \operatorname{sgn}(\sigma')\sigma' = 0$), les termes du 2ème cas donnent $l^k b$ (car tous les produits $\sigma' d_j$ sont obtenus une fois et une seule) et, de même, les termes du 3ème cas donnent $l^{k-1} b$. \diamond

2.4. Corollaire. *Pour tout $k \geq 1$ on a dans \mathbb{L}' les relations*

$$b_n \lambda_n^k = \lambda_{n-1}^k b_n.$$

Démonstration. Cette relation résulte de l'expression de λ^k en fonction des l^i et de la relation triangulaire des coefficients binomiaux. \diamond

2.5. Corollaire. *Pour tout $k \geq 1$ on a dans \mathbb{L}' les relations*

$$b \gamma^k = \gamma^k b \quad \text{et} \quad b \operatorname{sh}^k = \operatorname{sh}^k b.$$

Démonstration. C'est une conséquence de 2.4, 1.8 et 1.10. \diamond

2.6. Corollaire. *Pour tout $n \geq 1$ et pour tout k on a $b_n e_n^{(k)} = e_{n-1}^{(k)} b_n$.*

Démonstration. Par définition les $e_n^{(k)}$ se déduisent des λ_n^k , $k=1, \dots, n$, par la matrice de Vandermonde inverse. Le lemme 1.14 montre que la même matrice permet de calculer les $e_{n-1}^{(k)}$ à partir des λ_{n-1}^k , $k=1, \dots, n$. La commutation des $e_n^{(k)}$ à b est alors une conséquence immédiate de la commutation des λ_n^k à b . \diamond

Ce corollaire nous amène tout naturellement à étudier les familles d'éléments $f_n \in \mathbf{Q}[S_n]$, $n \geq 1$, qui commutent aux b_n , i.e. $b_n f_n = f_{n-1} b_n$ pour tout n . Le premier résultat dans cette direction a été obtenu par Barr [B].

2.7. Lemme de Barr. *Soit $u \in \mathbf{Q}[S_n]$ tel que $b_n u = 0$ dans \mathbb{L}' , alors*

$$u = (1/n!) \operatorname{sgn}(u) \varepsilon_n.$$

Démonstration. cf. [B], p. 316. \diamond

En suivant Gerstenhaber et Schack [G-S] on va montrer quelques propriétés des $e_n^{(k)}$.

2.8. Proposition. *Les éléments $e_n^{(k)} \in \mathbf{Z}[1/n!][S_n]$ on les propriétés suivantes:*

a) *Pour toute famille $f_n \in \mathbf{Q}[S_n]$, $n \geq 1$, telle que $b_n f_n = f_{n-1} b_n$ pour tout n on a*

$$f_n = \operatorname{sgn}(f_1) e_n^{(1)} + \dots + \operatorname{sgn}(f_n) e_n^{(n)}.$$

b) *Les $e_n^{(k)}$ sont entièrement déterminés par les conditions suivantes: pour tout k fixé la famille des $e_n^{(k)}$ commute à b et $\operatorname{sgn}(e_n^{(k)}) = 0$ sauf pour $n = k$ où $\operatorname{sgn}(e_n^{(n)}) = 1$.*

c) *Pour n fixé les $e_n^{(k)}$ forment une famille complète d'idempotents orthogonaux, c'est à dire $\operatorname{id} = e_n^{(1)} + \dots + e_n^{(n)}$, $e_n^{(i)} e_n^{(j)} = 0$ si $i \neq j$ et $e_n^{(k)} e_n^{(k)} = e_n^{(k)}$.*

d) Soit a_n^{ij} l'entier défini par l'égalité de polynômes

$$\sum_{i=1}^n a_n^{i,j} t^i = (t-j+1)(t-j+2)\dots(t-j+n).$$

On a alors

$$e_n^{(i)} = (1/n!) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} a_n^{i,k} l_n^k.$$

En particulier

$$e_n^{(n)} = (1/n!) \varepsilon_n = (1/n!) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} l_n^k,$$

$$e_n^{(n-1)} = (1/2(n-1)!) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (n+1-2k) l_n^k,$$

et

$$e_n^{(1)} = (1/n!) \sum_{k=1}^n (k-1)!(n-k)! l_n^k.$$

e) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e_n^{(k)} = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \omega_n.$

f) Pour

$$\eta = \eta_n = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \quad \text{on a} \quad \lambda^k \eta_n = (-1)^{k-1} k^{[(n+1)/2]} \eta_n,$$

c'est à dire $\eta_n \in \text{Im } e_n^{[(n+1)/2]}$.

g) L'égalité $(-1)^{k-1} \lambda_n^k = k e_n^{(1)} + \dots + k^i e_n^{(i)} + \dots + k^n e_n^{(n)}$ est valable pour tout $k \in \mathbf{N}$.

h) Les idempotents $e_n^{(k)}$ coïncident avec les idempotents de Gerstenhaber et Schack.

Démonstration. On a déjà vu en 1.12 que $e_n^{(k)} \in \mathbf{Z}[1/n!][S_n]$.

a) Posons $\bar{f}_n = \text{sgn}(f_1) e_n^{(1)} + \dots + \text{sgn}(f_n) e_n^{(n)}$. On va montrer par récurrence sur n que $\bar{f}_n = f_n$. Pour $n=1$ on a $f_1 = \text{sgn}(f_1) e_1^{(1)} = \bar{f}_1$. Supposons que $\bar{f}_{n-1} = f_{n-1}$. Puisque les \bar{f}_n commutent à b on a $b(f_n - \bar{f}_n) = (f_{n-1} - \bar{f}_{n-1})b = 0$. D'après le lemme de Barr $f_n - \bar{f}_n = (\text{sgn}(f_n) - \text{sgn}(\bar{f}_n)) e_n^{(n)} = 0$ (cf. 1.13) et donc $\bar{f}_n = f_n$. \diamond

b) Soit $\bar{e}_n^{(k)}$ une autre famille d'éléments satisfaisant aux mêmes conditions. D'après a) on a $\bar{e}_n^{(k)} = \text{sgn}(\bar{e}_k^{(1)}) e_n^{(1)} + \dots + \text{sgn}(\bar{e}_k^{(n)}) e_n^{(n)} = e_n^{(k)}$. \diamond

c) Appliquons a) à la famille $e_n^{(i)} e_n^{(j)}$. Si $i \neq j$, $\text{sgn}(e_k^{(i)} e_k^{(j)}) = 0$ pour tout k , d'où $e_n^{(i)} e_n^{(j)} = 0$. Si $i=j$ alors $\text{sgn}(e_k^{(i)} e_k^{(i)}) = 1$ lorsque $k=i$ et $=0$ dans les autres cas, donc $e_n^{(i)} e_n^{(i)} = e_n^{(i)}$. Pour la première identité c'est a) appliquée à id (car $\text{sgn}(\text{id}) = 1$). \diamond

d) La matrice de passage donnant les $(-1)^{k-1} \lambda_n^k$ en fonction des $e_n^{(i)}$ (resp. des $(-1)^{j-1} l_n^j$) est la matrice de Vandermonde v_n telle que $v_n^{k,i} = k^i$ (resp. la matrice triangulaire c_n telle que $c_n^{k,j} = \binom{n+k-j}{k-j}$, cf. 1.6). Pour vérifier que la matrice de passage donnant les $e_n^{(i)}$ en fonction des $(-1)^{k-1} l_n^k$ est $(1/n!) a_n$ il suffit de vérifier l'égalité de matrices $v_n a_n = n! c_n$, soit

$$\sum_{i=1}^n v_n^{k,i} a_n^{i,j} = n! c_n^{k,j} \quad \text{pour tout } k \text{ et } j.$$

Or on a

$$\sum_{i=1}^n v_n^{k,i} a_n^{i,j} = \sum_{i=1}^n k^i a_n^{i,j} = (k-j+1)(k-j+2)\dots(k-j+n) = n! \binom{n+k-j}{k-j} = n! c_n^{k,j}. \quad \diamond$$

e) C'est la condition a) appliquée à la famille d'éléments $l_n^k = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \omega_n$ (de signature $(-1)^{n-1}$) qui commutent aux b_n (cf. [L1, lemme 1.1]). \diamond

f) Posons $\beta_{n,k} = \sum_{\sigma \in S_{n,k}} \text{sgn}(\sigma)$ (nombres eulériens signés). L'analogue de (1.4.1) pour les nombres eulériens signés est (cf. [F])

$$\begin{aligned} \beta_{2n,k} &= \beta_{2n-1,k} - \beta_{2n-1,k-1}, \\ \beta_{2n+1,k} &= k \beta_{2n,k} + (2n-k+2) \beta_{2n,k-1}. \end{aligned}$$

Comme conséquence on obtient un analogue de la formule de Worpitzki

$$\begin{aligned} \sum \binom{2n+i}{i} \beta_{2n,k-i} &= k^n, \\ \sum \binom{2n-1+i}{i} \beta_{2n-1,k-i} &= k^n. \end{aligned}$$

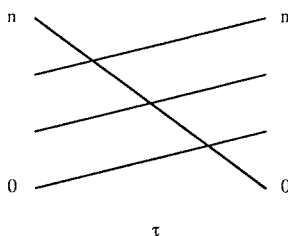
L'image de l_n^k par l'homomorphisme d'augmentation $\mathbf{Z}[S_n] \rightarrow \mathbf{Z}$, $\sigma \mapsto 1$, est $(-1)^{k-1} \beta_{n,k}$. Puisque $\sigma \eta = \eta$ pour tout $\sigma \in S_n$ on a $l_n^k \eta = (-1)^{k-1} \beta_{n,k} \eta$ et par conséquent $\lambda_n^k \eta = \sum (-1)^i \binom{n+i}{i} (-1)^{k-i-1} \beta_{n,k-i} \eta = (-1)^{k-1} k^{(n+1)/2} \eta$.

g) On applique a) aux $(-1)^{k-1} \lambda_n^k$ en utilisant 1.13.

h) Gerstenhaber et Schack ont construit dans [G-S] des éléments de $\mathbf{Q}[S_n]$ qui commutent à b et qui ont même signature que les $e_n^{(k)}$, ils leur sont donc égaux d'après b). \diamond

2.9. *Démonstration du théorème 1.7.* C'est une conséquence immédiate des énoncés g) et c) ci-dessus. \diamond

2.10. *La catégorie cyclique.* Nous allons maintenant montrer des formules de commutation relatives au bord de Connes B qui est un élément de \mathbb{L} . Soit $\tau = \tau_{n+1}$ l'isomorphisme de $[n]$ dans Fin défini par $\tau(i) = i + 1$ pour $0 \leq i \leq n$ et $\tau(n) = 0$ (permutation cyclique).



Rappelons la définition de la catégorie cyclique ΔC^{op} définie par A. Connes (et notée A^{op} dans [C2]). Elle a les mêmes objets que Δ^{op} . Ses générateurs sont ceux de Δ^{op} plus les opérateurs cycliques τ_{n+1} ($n \geq 0$). Ils sont soumis aux relations de Δ^{op} et à

- $\tau_{n+1}^{n+1} = \text{id}$,
- $d_i \tau_{n+1} = \tau_n d_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$,
- $d_0 \tau_{n+1} = d_n$,
- $s_i \tau_{n+1} = \tau_{n+2} s_{i-1}$,
- $s_0 \tau_{n+1} = \tau_{n+2} s_n$.

Cette catégorie est autoduale, c'est à dire qu'il y a un isomorphisme $\Delta C \cong \Delta C^{op}$ (cf. [C2]).

2.11. Proposition. *Il existe un foncteur $\Delta C^{op} \rightarrow Fin$ rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^{op} & \longrightarrow & \Delta C^{op} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Fin' & \longrightarrow & Fin \end{array}$$

Démonstration. On n'a pas le choix en ce qui concerne les images dans Fin des générateurs d_i et s_i . Pour τ_{n+1} on choisit comme image la permutation cyclique (notée aussi τ_{n+1}) décrite en 2.10. La vérification dans Fin des relations de ΔC^{op} est automatique. \diamond

On remarquera que ce foncteur n'est pas injectif sur les morphismes.

2.12. *Le bord de Connes abstrait.* On définit $B = B_n$ dans \mathbb{L} par la formule suivante

$$B_n = \delta_0 \left(\sum_{0 \leq i \leq n} \text{sgn}(\tau_{n+1}^i) \tau_{n+1}^i \right) \in \mathbf{Z}[\text{Hom}_{Fin}([n], [n+1])]$$

où $\delta_0: [n] \rightarrow [n+1]$ est le morphisme de *Fin* donné par $\delta_0(i) = i+1$. On remarquera que B_n est bien une combinaison linéaire de morphismes de $[n]$ dans $[n+1]$. Le bord de Connes est en fait $(1 - (-1)^{n+1} \tau_{n+2}) B_n$. Mais dans les chapitres suivants on va appliquer cet opérateur au complexe de Hochschild réduit sur lequel $\tau_{n+2} B_n$ opère trivialement. On peut donc se contenter de travailler avec B_n décrit ci-dessus.

2.13. Proposition. *Pour tout n et pour tout k on a dans \mathbb{L} la relation*

$$l_n^k B_{n-1} = B_{n-1} (k l_{n-1}^k - (n-k+1) l_{n-1}^{k-1}).$$

2.14. Corollaire. *Pour tout $k \geq 1$ on a dans \mathbb{L} les relations*

$$\lambda_n^k B_{n-1} = B_{n-1} k \lambda_{n-1}^k,$$

ainsi que $\gamma^k B = B(k\gamma^k - (k-1)\gamma^{k-1})$, $\text{sh}^k B = Bk(\text{sh}^k - \text{sh}^{k-1})$ et $e^{(k)} B = B e^{(k-1)}$.

Démonstration du corollaire. La première égalité résulte de 2.13 et d'un calcul sur les coefficients binomiaux. Pour les deux formules suivantes il est plus rapide de passer aux séries formelles. Posons $\lambda_t = \sum \lambda^k t^k$ et similairement pour γ et sh . On a alors $\gamma_t = \lambda_{t/1-t}$, et $\text{sh}_t = (1-t)^{-1} \gamma_t$. La formule pour γ (resp. sh) est équivalente à $\gamma_t B = B(t-t^2)\gamma'_t$ (resp. $\text{sh}_t B = Bt((1-t)\text{sh}'_t - \text{sh}_t)$ qui se déduit de la formule pour λ_t , à savoir $\lambda_t B = Bt\lambda'_t$.

La formule pour les $e^{(k)}$ procède du même argument que pour la démonstration de 2.6. \diamond

Démonstration de 2.13. Elle va occuper le reste de ce chapitre.

Pour tout $\sigma \in S_n$ on définit le nombre de *retours cycliques* comme étant le nombre de retours (cf. 1.1) de σ si n apparaît avant 1 dans la suite $\text{Im } \sigma$ et comme étant le nombre de retours de σ plus 1 sinon. Il est immédiat de vérifier que le nombre de retours cycliques ne dépend que du cycle $(\sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n))$.

On décompose $S_{n;k}$ en $S_{n;k}^0 \cup S_{n;k}^1$ suivant que σ^{-1} a k retours cycliques ou $k+1$ retours cycliques. L'élément eulérien l_n^k se décompose alors de manière évidente en $l_n^k = l_n^{k,0} + l_n^{k,1}$. On vérifie que

$$l_n^n l_n^{k,0} = l_n^{n-k+1,1} \quad \text{et} \quad l_n^n l_n^{k,1} = l_n^{n-k+1,0}.$$

Montrons que la proposition est une conséquence du

2.15. Lemme. $l_n^{k,1} B = k B l_{n-1}^k$.

En effet 2.13 est vrai dans le cas extrême $k=n$: $l_n^n B = -B l_{n-1}^{n-1}$ (déjà utilisé dans [L 1]). De l'égalité ci-dessus on déduit alors $l_n^{k,0} B = l_n^n l_n^{n-k+1,1} B = l_n^n (n-k+1) B l_{n-1}^{n-k+1} = -(n-k+1) B l_{n-1}^{k-1}$. Les deux égalités $l_n^{k,1} B = k B l_{n-1}^k$ et $l_n^{k,0} B = -(n-k+1) B l_{n-1}^{k-1}$ nous donnent précisément 2.13. \diamond

Démonstration de 2.15. Les permutations σ qui apparaissent dans $l_n^{k,1}$ laissent fixe 0. Donc on peut écrire $l_n^{k,1} \delta_0 = \delta_0 \bar{l}_n^{k,1}$ où $\bar{l}_n^{k,1}$ a la même écriture que $l_n^{k,1}$

avec $\bar{\sigma}$ opérant sur $\{0, \dots, n\}$ par $\bar{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $i \neq 0$ et $\bar{\sigma}(0) = 0$. Ainsi l'égalité à démontrer est équivalente à la formule suivante dans $\mathbf{Z}[S_n]$:

$$\bar{k}_n^{-1} (\sum \text{sgn}(\tau_n^i) \tau_n^i) = k (\sum \text{sgn}(\tau_n^i) \tau_n^i) k_n^{-1}.$$

On va en fait établir une bijection entre les différents éléments intervenant dans les développements à gauche et à droite.

2.16. Lemme. Fixons $\sigma \in S_{n;k}^1$ et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Il existe une unique permutation $\omega \in S_{n-1;k}$ et un unique entier j tels que $\bar{\sigma} \tau^i = \tau^j \omega$.

Démonstration. Il existe un unique j tel que $\omega = \tau^{-j} \bar{\sigma} \tau^i$ envoie 0 sur 0. Montrons que ce produit est dans $S_{n-1;k}$. Puisque $\bar{\sigma}^{-1}$ a k retours cycliques par hypothèse, il en est de même de $\omega = \tau^{-j} \bar{\sigma} \tau^i$. Puisque $\omega(0) = 0$, c'est aussi le nombre de retours de ω^{-1} , d'où $\omega \in S_{n-1;k}$. \diamond

2.17. Lemme. Fixons j et $\omega \in S_{n-1;k}$. Il existe k paires (i, σ) telles que $\omega = \tau^{-j} \bar{\sigma} \tau^i$ et $\sigma \in S_{n;k}^0$.

Démonstration. Considérons la famille $\tau^j \omega \tau^{-i}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. Puisque $\tau^j \omega \in S_{n-1;k}$ il y a dans cette famille k éléments ayant k retours cycliques et $(n-k)$ éléments ayant $(k+1)$ retours cycliques. Donc pour j et ω fixés il y a exactement k paires (i, σ) avec $\sigma \in S_{n-1;k}^0$. \diamond

Ces deux lemmes permettent d'établir la bijection cherchée. Les signes coïncident car ce sont toujours les signatures des permutations en cause. Ceci achève la démonstration de 2.15 et donc celle de 2.13. $\diamond \diamond$

3. Homologie de Hochschild

Soit $C: \text{Fin}' \rightarrow (K\text{-modules})$ un foncteur dont on note encore C le composé avec $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Fin}'$ décrit en 2.1. L'homologie $H_*(C)$ de ce module simplicial est l'homologie du complexe $(C_*, b = \sum_i (-1)^i d_i)$. On va montrer que les résultats des chapitres précédents permettent de construire sur $H_*(C)$ des λ -opérations. Nous allons énoncer ces résultats dans le cas particulier de l'homologie de Hochschild d'une algèbre commutative, mais il sera bien clair dans les démonstrations qu'ils sont valables pour tout foncteur C des ensembles finis pointés dans les K -modules. On laisse au lecteur le soin d'explicitier l'énoncé dans le cas général.

3.1. L'homologie de Hochschild. Soit K un anneau commutatif et A une K -algèbre commutative que l'on supposera toujours unitaire. Tout module M sur A peut être considéré comme un A -bimodule (parfois qualifié de «symétrique») par $am = ma$.

Le module simplicial défini par $[n] \mapsto C_n = M \otimes A^{\otimes n}$ a pour faces

$$d_i(m, a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} (ma_1, a_2, \dots, a_n) & \text{si } i = 0, \\ (m, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{si } 1 \leq i < n, \\ (a_n m, a_1, \dots, a_{n-1}) & \text{si } i = n, \end{cases}$$

et pour dégénérescences $s_i(m, a_1, \dots, a_n) = (m, a_1, \dots, a_i, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Par définition l'homologie de Hochschild de A à coefficients dans M est l'homologie de ce module simplicial. Elle est notée $H_*(A, M)$. Lorsque $M = A$ on notera aussi $HH_n(A)$ au lieu de $H_n(A, A)$.

3.2. Proposition. *Lorsque A est commutative et M symétrique, le foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow (K\text{-modules}), [n] \mapsto M \otimes A^{\otimes n}$ se factorise à travers la catégorie Fin' des ensembles finis pointés.*

Démonstration. On définit un foncteur $\text{Fin}' \rightarrow (K\text{-modules})$ de la manière suivante. Pour toute application pointée $f: [n] \mapsto [p]$ on pose

$$f(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_p) \in M \otimes A^{\otimes p}$$

(i.e. a_0 et $b_0 \in M$ et les autres coefficients sont dans A). On définit alors b_i par

$$\begin{aligned} b_i &= a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} & \text{si } f^{-1}(i) &= \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \text{ et} \\ b_i &= 1 & \text{si } f^{-1}(i) &= \emptyset. \end{aligned}$$

La commutativité de A et le fait que M soit symétrique impliquent que ce foncteur est bien défini. Le composé $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Fin}' \rightarrow (K\text{-modules})$, où le premier foncteur est celui défini en 2.1.1, donne bien le module simplicial de départ. \diamond

Il résulte de cette proposition que la différentielle $b = \sum_i (-1)^i d_i$ du complexe C_* est l'action de $b \in \mathbb{L}'_K$ sur C .

3.3. L'homologie de Harrison (cf. [B]), Elle s'exprime classiquement en termes de shuffles. Les modules $\text{Sh}_n = \sum_{k=2}^n \text{Im sh}_n^k$ forment un sous-complexe de C_* (cf.

2.4). Par définition l'homologie de Harrison, notée Harr_* , est l'homologie du complexe quotient C_*/Sh_* .

3.4. λ -opérations et filtration sur le complexe C_*

Puisque C est un Fin' -module, l'algèbre de groupe $K[S_n] \subset \mathbb{L}'_K$ opère sur C_n et on note cette opération par le même symbole, par exemple λ_n^k dans le cas des λ -opérations.

On a ainsi (cf. App.) une γ -filtration $F_i^\gamma C_n$ sur C_n . Le corollaire 2.5, qui démontre la commutation entre b et γ , implique que C_* est un complexe filtré. Il donne donc naissance à une suite spectrale $E_{p,q}^1 = H_p(F_q^\gamma/F_{q+1}^\gamma) \Rightarrow H_{p+q}(C_*)$. Notons $F_i H_n(C_*)$ la filtration sur l'aboutissement résultant de cette suite spectrale: $F_i H_n(C_*) = \text{Im}(H_n(F_i^\gamma C_*) \rightarrow H_n(C_*))$. On remarque qu'on a une inclusion $F_i^\gamma(C_*) \hookrightarrow F_i H_n(C_*)$ qui n'est pas forcément un isomorphisme.

3.5. Théorème. *Pour toute algèbre commutative unitaire A sur l'anneau K et pour tout A -module M on a*

$$(a) \quad F_1 H_n(A, M) = F_2 H_n(A, M) = H_n(A, M) \quad \text{pour } n > 0 \quad \text{et} \quad F_1 H_0(A, M) = H_0(A, M) = M \quad (\text{et idem pour } F_i^\gamma).$$

(b) $F_{n+2}H_n(A, M) = 0$ pour tout n (et idem pour F_i^γ).

(c) Supposons $M = A$. Soit E_{pq}^1 le premier terme de la suite spectrale associée à la γ -filtration de C_* . On a $E_{pq}^1 = 0$ pour $q \leq 1$ et pour $q > n + 1$; $E_{p2}^1 = \text{Harr}_p(A)$. L'application naturelle $\mu: \Omega_{A/k}^n \rightarrow HH_n(A)$ est une surjection (resp. un isomorphisme) sur $F_{n+1}H_n(A, A) = E_{n+1}^\infty$ (resp. si de plus $n!$ est inversible).

(d) On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n & \longrightarrow & HH_n \\ \text{sgn}(\gamma_n^k) \downarrow & & \downarrow \gamma_n^k \\ \Omega^n & \longrightarrow & HH_n \end{array}$$

où $\text{sgn}(\gamma_n^k)$ est un nombre entier. En particulier l'homomorphisme composé $\text{Im } \mu \hookrightarrow F_{n+1}^\gamma HH_n \hookrightarrow \text{Im } \mu$ est la multiplication par $n!$. Si $n!$ est inversible on a un isomorphisme $\Omega^n \cong F_{n+1}^\gamma HH_n$.

(e) $H_n(A, M)$ est un γ -anneau (special γ -ring) pour la multiplication triviale, en particulier pour tout $x \in F_i^\gamma H_n(A, M)$ on a $\lambda^k(x) + (-1)^k k! x \in F_{i+1}^\gamma H_n(A, M)$.

Démonstration. Ces résultats sont essentiellement fondés sur les formules concernant les γ_n^k énoncées en 1.8.

(a) Puisque $\gamma_n^1 = \text{id}$, on a, pour $n \geq 1$, $F_1 C_n = C_n$. D'après 1.8 on constate que $\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_n^k = 0$, donc $\text{id} = \gamma_n^1$ est combinaison linéaire de $\gamma_n^2, \dots, \gamma_n^{n+1}$. Ainsi on a $F_2 C_n = F_1 C_n = C_n$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Ceci résulte de $\gamma_n^k = 0$ pour $k \geq n + 2$ (cf. 1.8), qui implique $F_k^\gamma C_n = 0$ pour $k \geq n + 2$.

(c) La première affirmation est immédiate d'après (a) et (b). Pour la seconde on part de $F_2^\gamma C_n = C_n$. Montrons que F_3^γ , c'est à dire l'espace engendré par les images de $\gamma^3, \dots, \gamma^{n+1}$, est exactement l'image engendrée par $\text{sh}^2, \dots, \text{sh}^n$. En effet, d'après 1.11, cette dernière s'identifie à l'image engendrée par $\gamma^1 + \gamma^2, \gamma^3, \dots, \gamma^{n+1}$. Or la relation $\sum_{k=1}^{n+1} \gamma_n^k = 0$ implique que c'est aussi l'espace engendré par $\gamma^3, \dots, \gamma^{n+1}$, c'est à dire $F_3^\gamma C_n$. L'homologie de F_2^γ/F_3^γ (c'est à dire E_{p2}^1) est donc bien l'homologie de Harrison (cf. 3.3).

Posons $x = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ et $\bar{x} = a_0 da_1 \dots da_n$. L'homomorphisme μ est donné par $\mu(\bar{x}) = [\varepsilon_n(x)]$ (cf. [L-Q, formule 2.3]). D'après 1.8 on a $\gamma^{n+1} = (-1)^n \varepsilon_n$ et donc $\mu(\bar{x}) = (-1)^n [\gamma^{n+1}(x)]$. Ceci prouve que l'image de μ est $F_{n+1}H_n(C)$.

Lorsque $n!$ est inversible μ a un inverse donné par $x \mapsto (1/n!) \bar{x}$, c'est donc un isomorphisme sur $F_{n+1}H_n(C)$.

(d) La commutativité du diagramme résulte de

$$\gamma^i \circ \mu(\bar{x}) = [\gamma^i \circ \varepsilon_n(x)] = [\text{sgn}(\gamma^i) \varepsilon_n(x)] = \text{sgn}(\gamma^i) \mu(\bar{x}).$$

Si x est un cycle on a $\gamma^{n+1}[x] = [\gamma^{n+1}(x)] = (-1)^n [e_n(x)] = (-1)^n \mu(\bar{x})$ ce qui prouve l'inclusion de $F_{n+1}^\gamma HH_n$ dans $\text{Im } \mu$. D'autre part on a $n! \mu(\bar{x}) = (-1)^n \text{sgn}(\gamma^{n+1}) \mu(\bar{x}) = (-1)^n \gamma^{n+1} \mu(\bar{x})$, ce qui prouve l'autre inclusion.

Si $n!$ est inversible l'application $x \mapsto (1/n!) \mu(\bar{x})$ est un inverse pour μ . On a donc $n! \text{Im } \mu = F_{n+1}^\gamma HH_n = \text{Im } \mu = \Omega^n$.

(e) Puisque H_n est un anneau sans élément unité à multiplication triviale, il suffit d'après l'appendice de prouver que λ^k est une application \mathbf{Z} -linéaire et que $\lambda^k \lambda^{k'} = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda^{kk'}$. Ces propriétés résultent du chapitre 1 (en particulier 1.7).

La seconde assertion est une propriété des γ -anneaux (cf. la proposition de l'appendice). \diamond

3.6. Décomposition de Hodge en caractéristique zéro. Les résultats précédents ne font aucune hypothèse sur la caractéristique de l'anneau de base K . Par contre si l'on suppose que K contient \mathbf{Q} , on dispose des idempotents $e_n^{(k)}$ dans $K[S_n] \subset \mathbb{L}_k$ et la γ -filtration provient en fait d'un scindage du complexe de Hochschild. On note $C_n^{(k)}$ (resp. $H_n^{(k)}(A, M)$) l'image de l'action de $e_n^{(k)}$ sur C_n (resp. $H_n(A, M)$). D'après 2.6 le complexe C_* se scinde en somme directe des sous-complexes $C_*^{(k)}$ et $F_i^\gamma C_* = \bigoplus_{k < i} C_*^{(k)}$ ou encore $\text{Gr}_{k+1}^\gamma C_* = C_*^{(k)}$. La suite spectrale est alors complètement dégénérée et les deux filtrations de H_* coïncident.

3.7. Théorème ([B-V], [G-S]). Si K contient \mathbf{Q} on a, pour tout $n \geq 1$, une décomposition de Hodge de l'homologie de Hochschild:

$$H_n(A, M) = H_n^{(1)}(A, M) \oplus \dots \oplus H_n^{(n)}(A, M) \quad \text{avec}$$

$$H_n^{(1)}(A, A) = \text{Harr}_n(A) \quad \text{et} \quad H_n^{(n)}(A, A) = \Omega_{A/K}^n.$$

Cette dernière égalité était déjà dans [B]. Rappelons ici que $H_0(A, M) = H_0^{(0)}(A, M) = M$.

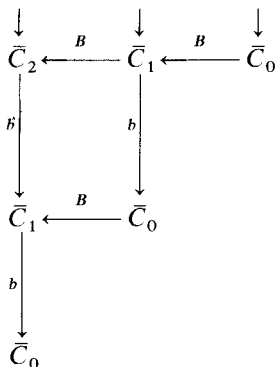
Démonstration. La première assertion est une conséquence immédiate du scindage du complexe de Hochschild mentionné plus haut. Les autres résultent de 3.5 c) et 3.5 d). \diamond

4. Homologie cyclique des algèbres commutatives

Soit $C: \text{Fin} \rightarrow (K\text{-modules})$ un foncteur de la catégorie des ensembles finis dans la catégorie des K -modules. D'après le chapitre 2 il détermine par composition avec $\Delta C^{\text{op}} \rightarrow \text{Fin}$ un foncteur de ΔC^{op} dans la catégorie des K -modules c'est à dire un module cyclique. Nous allons étudier dans ce chapitre les λ -opérations et leurs filtrations associées sur l'homologie cyclique de ce module cyclique.

Comme précédemment nous énoncerons les propriétés pour le cas de l'homologie cyclique d'une algèbre commutative, mais il sera bien clair dans les démonstrations que tout ceci est valable pour tout module cyclique provenant d'un foncteur $\text{Fin} \rightarrow (K\text{-modules})$.

4.1. *Homologie cyclique.* Un module cyclique est un foncteur $C: \Delta C^{op} \rightarrow (K\text{-modules})$. Par définition [L-Q] son homologie cyclique est l'homologie du bicomplexe $\bar{B}(C)$



où \bar{C}_n est le quotient de C_n par le sous-module engendré par les dégénérescences et où b et B sont les actions des éléments b et B de \mathbb{L}_K sur C_n .

Pour toute K -algèbre unitaire A le module simplicial $A^\# : [n] \mapsto A^{\otimes n+1}$ est un module cyclique pour $\tau_{n+1}(a_0, \dots, a_n) = (a_n, a_0, \dots, a_{n-1})$. On note $HC_*(A)$ les groupes d'homologie cyclique lorsque $C = A^\#$.

4.2. **Proposition.** *Lorsque A est commutatif le foncteur $A^\# : \Delta C^{op} \rightarrow (K\text{-modules})$ se factorise à travers la catégorie *Fin* des ensembles finis.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration de 3.2. En effet lorsque $M = A$ le foncteur de *Fin'* dans $(K\text{-modules})$ est en fait bien défini sur la catégorie *Fin* toute entière. Pour montrer que la restriction à ΔC^{op} est bien $A^\#$ il suffit de constater que $\tau_{n+1} = (0 \ 1 \dots n) \in K[S_{n+1}] \subset \mathbb{L}_K$ opère sur $A^{\otimes n+1}$ comme indiqué ci-dessus. \diamond

4.3. *λ -opérations et filtrations sur l'homologie cyclique*

On définit une opération λ^k sur le bicomplexe $\bar{B}(C)$ en prenant λ^k sur la première colonne, $k\lambda^k$ sur la seconde et plus généralement $k^i\lambda^k$ sur la i -ème. D'après 2.14 on a $Bk\lambda^k = \lambda^k B$, donc ces actions s'assemblent pour définir un endomorphisme du K -module différentiel gradué $\text{Tot } \bar{B}(C)$, que l'on note encore λ^k . Il induit ainsi une opération (toujours notée λ^k) sur le groupe d'homologie $HC_n(C) = HC_n(\text{Tot } \bar{B}(C))$. Il est clair que l'on a aussi des opérations γ^k , sh^k et ψ^k .

Comme dans le cas de l'homologie de Hochschild on a une γ -filtration sur le bicomplexe $\bar{B}(C)$, d'où une suite spectrale $E_{pq}^1 \Rightarrow HC_{p+q}(C)$. Les deux filtrations de $HC_n(C)$ (celle provenant de la suite spectrale et la γ -filtration) sont liées par une inclusion $F_i^\gamma HC_n \hookrightarrow F_i HC_n$.

4.4. **Théorème.** *Pour tout algèbre commutative unitaire A sur l'anneau K on a*

- (a) $F_1 HC_n(A) = F_2 HC_n(A) = HC_n(A)$ pour $n \geq 1$ et $F_1 HC_0(A) = HC_0(A) = A$ (et idem pour $F_i^\gamma HC_n$).
- (b) $F_{n+2} HC_n(A) = 0$ (et idem pour $F_i^\gamma HC_n$).

(c) Soit E_{nq}^1 les premiers termes de la suite spectrale associée à la γ -filtration de Tot $\bar{B}(C)$. On a $E_{pq}^1 = 0$ pour $q \leq 1$ et pour $q > p + 1$; $E_{p2}^1 = \text{Harr}_p(A)$ si $p \geq 3$ (pour $p = 2$ on a une suite exacte $0 \rightarrow \text{Harr}_2(A) \rightarrow E_{22}^1 \rightarrow H_{DR}^0(A) \rightarrow 0$).

(d) $HC_n(A)$ est un γ -anneau (special γ -ring) pour la multiplication triviale, en particulier pour tout $x \in F_i^\gamma HC_n(A)$ on a $\lambda^k(x) + (-1)^k k^i x \in F_{i+1}^\gamma HC_n(A)$.

On remarque en particulier que le générateur de $HC_{2n}(K)$ est dans $F_{n+1}^\gamma HC_{2n}(K)$ mais pas dans $F_{n+2}^\gamma HC_{2n}(K)$.

Démonstration. Les formules 2.14 montrent que $F_i \bar{B}(C)$ a pour première colonne $F_i \bar{C}$, puis pour deuxième colonne $F_{i-1} \bar{C}$, etc.

(a) et (b) Ce sont des conséquences immédiates de 3.5 a) et b).

(c) La première assertion est immédiate d'après $F_1^\gamma \bar{C}_n = F_2^\gamma \bar{C}_n$. La seconde, à savoir $E_{nq}^1 = 0$ pour $q > n + 1$, découle de $F_i^\gamma \bar{C}_j = 0$ pour $i > j + 1$.

Le bicomplexe $F_2^\gamma \bar{B}(C)/F_3^\gamma \bar{B}(C)$ a la forme suivante

$$\begin{array}{ccc}
 & \downarrow & \downarrow \\
 \text{Gr}_1^\gamma \bar{C}_3 & \longleftarrow & 0 \\
 \downarrow b & & \\
 \text{Gr}_1^\gamma \bar{C}_2 & \longleftarrow & 0 \\
 \downarrow b & & \\
 \text{Gr}_1^\gamma \bar{C}_1 & \xleftarrow{B} & \text{Gr}_1^\gamma \bar{C}_0 \\
 \downarrow b & & \\
 0 & &
 \end{array}$$

Puisque $\text{Gr}_1^\gamma \bar{C}_0 = A$, $\text{Gr}_2^\gamma \bar{C}_0 = A \otimes \bar{A}$ et que B induit d sur l'homologie horizontale, on en déduit la dernière assertion de (c).

(d) Les opérations λ^k sont \mathbf{Z} -linéaires et vérifient la propriété de multiplicativité 1.7, donc, d'après l'appendice, HC_n est un γ -anneau. \diamond

4.5. *Décomposition de Hodge de l'homologie cyclique en caractéristique zéro.* Supposons maintenant que l'anneau de base K contienne \mathbf{Q} . D'après 2.6 et 2.14 le bicomplexe $\bar{B}(C)$ se décompose en somme directe de sous-bicomplexes $\bar{B}(C)^{(i)}$ ayant la forme suivante

$$\begin{array}{ccc}
 i+1 & \begin{array}{c} \downarrow \\ \bar{C}_{i+1}^{(i)} \longleftarrow^B \bar{C}_i^{(i-1)} \longleftarrow \dots \\ \downarrow b \\ \bar{C}_i^{(i)} \longleftarrow^B \bar{C}_{i-1}^{(i-1)} \longleftarrow \dots \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ \dots \longleftarrow \bar{C}_2^{(1)} \longleftarrow 0 \\ \downarrow b \\ \dots \longleftarrow \bar{C}_1^{(1)} \longleftarrow \bar{C}_0^{(0)} \\ \downarrow \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

On note $HC_*^{(i)}$ l'homologie de $\text{Tot}_* \bar{B}(C)^{(i)}$. On a évidemment $HC_*^{(i)} = \text{Gr}_{i+1}^{\gamma} HC_*$ et ψ^k (resp. λ^k) opère par la multiplication par k^{i+1} (resp. $(-1)^{k-1} k^i$) sur cette composante.

Enonçons tout d'abord les principaux théorèmes concernant cette décomposition.

4.6. Théorème. *Si K contient \mathbf{Q} on a, pour tout $n > 0$, une décomposition de Hodge de l'homologie cyclique :*

$$\begin{aligned} HC_n(A) &= HC_n^{(1)}(A) \oplus \dots \oplus HC_n^{(n)}(A) \text{ avec} \\ HC_n^{(1)}(A) &= \text{Harr}_n(A) \text{ pour } n \geq 3 \text{ et une suite exacte} \\ 0 \rightarrow \text{Harr}_2 \rightarrow HC_2^{(1)} \rightarrow H_{DR}^0 \rightarrow 0 \text{ pour } n=2, \\ HC_n^{(n)}(A) &= \Omega_{A/K}^n / d\Omega_{A/K}^{n-1}. \end{aligned}$$

Lorsque l'algèbre A est lisse sur K cette décomposition s'écrit

$$\begin{aligned} HC_{2n} &= 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus H_{DR}^0 \oplus H_{DR}^2 \oplus \dots \oplus H_{DR}^{2n-2} \oplus \Omega^{2n} / d\Omega^{2n-1}, \\ HC_{2n+1} &= 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus H_{DR}^1 \oplus H_{DR}^3 \oplus \dots \oplus H_{DR}^{2n} \oplus \Omega^{2n+1} / d\Omega^{2n}. \end{aligned}$$

Dans [L1] on a démontré que, si A est muni d'une involution et si 2 est inversible dans K , on a une décomposition de l'homologie cyclique en somme directe de l'homologie diédrale HD_* et de l'homologie diédrale gauche HD'_* . Le lien entre ces deux décompositions est le suivant.

4.7. Proposition. *Munissons l'algèbre commutative A de l'involution triviale. On a alors*

$$HD_n(A) = \bigoplus_i HC_n^{(2i)}(A) \quad \text{et} \quad HD'_n(A) = \bigoplus_i HC_n^{(2i+1)}(A).$$

Connes a démontré que l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique sont liées par une suite exacte dite de périodicité [C2, L-Q]. Elle se comporte de la manière suivante vis-à-vis de la décomposition précédente.

4.8. Théorème. *Soit A une algèbre commutative sur l'anneau K contenant \mathbf{Q} . Pour tout i on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow HH_n^{(i)}(A) \rightarrow HC_n^{(i)}(A) \rightarrow HC_{n-2}^{(i-1)}(A) \rightarrow HH_{n-1}^{(i)}(A) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow HC_{i+1}^{(i)}(A) \rightarrow \Omega_A^{i-1} / d\Omega_A^{i-2} \rightarrow \Omega_A^i \rightarrow \Omega_A / d\Omega_A^{i-1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En particulier $HC_{2n}(K) = HC_{2n}^{(n)}(K) = K$.

Démonstration de 4.6. Le bicomplexe $\bar{B}(C)^{(1)}$ est exactement celui décrit dans la preuve de 4.4 c), d'où le résultat.

D'après la forme de $\bar{B}(C)^{(n)}$ et le fait que le conoyau de $b: C_i^{(i+1)} \rightarrow C_i^{(i)}$ soit Ω^i (B induisant d) on déduit que $HC_n^{(n)} = \Omega^n / d\Omega^{n-1}$.

Lorsque A est lisse le bicomplexe $\bar{B}(C)^{(i)}$ est quasi-isomorphe au bicomplexe formé du complexe de de Rham tronqué

$$\Omega^i \leftarrow \Omega^{i-1} \leftarrow \dots \leftarrow \Omega^0$$

sur la ligne i et 0 partout ailleurs (cf. [L-Q, 2.8]). Il suffit de prendre l'homologie pour trouver les formules cherchées. \diamond

Démonstration de 4.7. Le scindage du complexe C en $C^+ \oplus C^-$ (donnant HD et HD') se fait grâce à l'opérateur l_n^n , qui est d'ordre 2. En utilisant 2.8e) on montre que $l_n^n \Sigma (-1)^{k-1} e^{(k)} = l_n^n l_n^n = 1 = \Sigma e^{(k)}$, d'où $l_n^n e^{(k)} = (-1)^{k-1} e^{(k)}$. On en déduit la comparaison annoncée. \diamond

Démonstration de 4.8. L'homologie de la première colonne de $\bar{B}(C)^{(i)}$ est $HH_*^{(i)}$. L'homologie du quotient par cette première colonne est $HH_*^{(i-1)}$ décalé de 2. Le résultat annoncé n'est donc que la longue suite exacte d'homologie d'une suite exacte courte de complexes. \diamond

4.9. *Comparaison avec [B-V] et [F-T].* Une décomposition de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique d'une algèbre commutative dans le cas rationnel a été obtenue par Burghlelea et Vigué-Poirrier [B-V] par une méthode différente. En se plaçant dans la catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives (ADGC), ils résolvent A par une ADGC libre et montrent que l'homologie de A est l'homologie de cette ADGC. Grâce au calcul de l'homologie d'une algèbre tensorielle (cf. [L-Q, prop. 5.4]) on peut ramener l'homologie de l'ADGC en question à l'homologie d'un complexe plus simple (cf. [B-V, théorème 2.4]). C'est à partir de ce complexe qu'est définie pour toute ADGC la graduation de Burghlelea et Vigué-Poirrier. Le cas particulier d'une algèbre commutative est étudié dans [V], où est aussi démontré le théorème 4.6 ci-dessus.

En appliquant notre décomposition au module cyclique associé à l'ADGC ci-dessus et en passant au complexe plus simple, on constate que l'opération λ^k opère précisément par $(-1)^{k-1} k^i$ sur la i -ème composante de la graduation. Ceci démontre que les deux décompositions coïncident.

Dans [F-T] Feigin et Tsygan ont aussi défini des λ -opérations sur l'homologie cyclique dans le cas rationnel pour une algèbre commutative. Ils définissent ces opérations sur le complexe de Connes ($A^{\otimes n+1}/(1 - (-1)^n \tau, b)$). On a montré dans [L-P] que ces opérations sont les mêmes que les nôtres. Par conséquent leur décomposition de l'homologie cyclique coïncide avec celle décrite précédemment.

4.10. *Remarque.* Il est clair que la décomposition de Hodge du bicomplexe $\bar{B}(C)$ permet de définir une décomposition de Hodge pour l'homologie cyclique négative ainsi que pour l'homologie cyclique périodique.

5. λ -opérations et théorie des invariants

Dans ce chapitre K est un corps de caractéristique 0, par exemple \mathbf{Q} . Nous allons montrer que via la théorie des invariants les éléments eulériens peuvent s'interpréter comme de vraies puissances extérieures. C'est en fait le

résultat principal de [L-P]. Grâce à cette interprétation et aux propriétés de λ -anneau des représentations de l'algèbre de Lie des matrices, on en déduit une preuve de la propriété de multiplicativité des éléments eulériens.

5.1. *Théorie des invariants.* Notons $\mathfrak{gl}_p = \mathfrak{gl}_p(K)$ l'algèbre de Lie des matrices $p \times p$ à coefficients dans K . L'inclusion $\mathfrak{gl}_p \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{p+1}$ est obtenue en rajoutant une ligne et une colonne de zéros. A la limite on obtient $\bigcup_p \mathfrak{gl}_p = \mathfrak{gl}$.

Le produit tensoriel au-dessus de K de n copies de \mathfrak{gl}_p est noté $\mathfrak{gl}_p^{\otimes n}$. C'est un \mathfrak{gl}_p -module dont le quotient par cette action est le module des coinvariants $(\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p}$. Si V désigne l'espace vectoriel K^p on a $\mathfrak{gl}_p = \mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{gl}_p^{\otimes n}$ s'identifie à $\mathfrak{gl}(V^{\otimes n})$. A toute permutation $\sigma \in S_n$ est associé l'endomorphisme de $V^{\otimes n}$ qui permute les variables. On a ainsi un homomorphisme $K[S_n] \rightarrow \mathfrak{gl}(V^{\otimes n})$, qui par projection sur les coinvariants donne $K[S_n] \rightarrow (\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p}$. Cet homomorphisme est S_n -équivariant pour l'action de S_n par conjugaison sur $K[S_n]$.

La théorie des invariants nous dit que $K[S_n] \rightarrow (\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p}$ est un isomorphisme dès que $p \geq n$.

Soit U_n la classe de conjugaison du cycle $\tau = (1 \dots n)$ dans S_n . Il y a une bijection canonique $S_{n-1} \cong U_n$ qui est S_{n-1} -équivariante pour l'action à gauche de S_{n-1} sur lui-même et l'action par conjugaison de S_{n-1} sur U_n (S_{n-1} étant identifié au sous-groupe des permutations de S_n qui fixent 1).

Nous allons nous intéresser à l'inclusion

$$\text{inc}: K[S_{n-1}] \cong K[U_n] \hookrightarrow K[S_n] \cong (\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p}.$$

5.2. *Puissances extérieures des matrices.* Si $V = K^p$ alors $A^k V \cong K \binom{p}{k}$ et donc $\mathfrak{gl}(A^k V) \cong \mathfrak{gl} \binom{p}{k}$. On note A_p^k l'application k -ième puissance extérieure $A_p^k: \mathfrak{gl}_p \rightarrow \mathfrak{gl} \binom{p}{k}$ donnée par

$$A_p^k(\alpha)(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^k v_1 \wedge \dots \wedge v_{i-1} \wedge \alpha(v_i) \wedge v_{i+1} \wedge \dots \wedge v_k.$$

C'est un homomorphisme d'algèbres de Lie qui induit un homomorphisme S_n -équivariant $(\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p} \rightarrow (\mathfrak{gl} \binom{p}{k})_{\mathfrak{gl} \binom{p}{k}}$. Après stabilisation on en déduit

$$A_p^k: (\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p} \rightarrow (\mathfrak{gl} \binom{p}{k})_{\mathfrak{gl} \binom{p}{k}}.$$

On remarquera que pour $p \geq n$ ceci nous donne un endomorphisme S_n -équivariant de $(\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}} \cong K[S_n]$, mais, bien que le module ne dépende plus de p , l'endomorphisme en dépend toujours.

Le résultat principal de Loday-Procesi [L-P], qui relie puissances extérieures et éléments eulériens, est le suivant:

5.4. Théorème [L-P, prop. 3.4]. *Le diagramme ci-dessous est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 K[S_{n-1}] & \xrightarrow{\text{inc}} & (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}} \\
 \downarrow l_{n-1}^k & & \downarrow A_n^k \\
 K[S_{n-1}] & \xrightarrow{\text{inc}} & (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}
 \end{array}$$

la flèche verticale de gauche étant la multiplication par l_{n-1}^k . \diamond

La combinaison linéaire des l_{n-1}^k , qui donne λ_{n-1}^k (cf. 1.6), appliquée aux A_n^k nous donne un endomorphisme de $(\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}$ que l'on note $\lambda_{n,\mathfrak{gl}}^k$. On va voir que ces endomorphismes proviennent de l'anneau des représentations de \mathfrak{gl} .

5.4. Représentations de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl} . On note $R(\mathfrak{gl}_p)$ le groupe de Grothendieck des représentations de dimension finie sur K de l'algèbre de Lie \mathfrak{gl}_p . Les générateurs sont les classes d'équivalence d'homomorphismes d'algèbres de Lie $\mathfrak{gl}_p \rightarrow \mathfrak{gl}$. Un tel homomorphisme induit un autre homomorphisme $(\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p} \rightarrow (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}$, d'où en définitive une flèche

$$R(\mathfrak{gl}_p) \rightarrow \text{Hom}_{S_n}((\mathfrak{gl}_p^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}_p}, (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}).$$

En fait $R(\mathfrak{gl}_p)$ est un λ -anneau (cf. [G]) canoniquement isomorphe à l'algèbre de polynômes sur les indéterminées $\lambda^1(\text{id}_p), \lambda^2(\text{id}_p), \dots, \lambda^p(\text{id}_p)$. Le procédé de stabilisation habituel permet de définir $R(\mathfrak{gl}) = \varinjlim_p R(\mathfrak{gl}_p)$ qui est un λ -anneau canoniquement isomorphe à $K[\lambda^1, \dots, \lambda^p, \dots]$.

La flèche précédente se stabilise en

$$R(\mathfrak{gl}) \rightarrow \text{Hom}_{S_n}((\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}, (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}})$$

et l'image de λ^k par cette flèche est précisément $\lambda_{n,\mathfrak{gl}}^k$.

En fait on va seulement s'intéresser ici à la «partie primitive» $K[U_{n-1}]$ de $K[S_n] = (\mathfrak{gl}^{\otimes n})_{\mathfrak{gl}}$, c'est à dire à la flèche

$$R(\mathfrak{gl}) \rightarrow \text{Hom}_{S_{n-1}}(K[S_{n-1}], K[S_{n-1}]) \cong K[S_{n-1}].$$

On note ρ_* l'image dans $K[S_{n-1}]$ de $\rho \in R(\mathfrak{gl})$. On constate que $(\lambda^i)_* = \lambda_{n-1}^i$ car la restriction $\lambda_{n,\mathfrak{gl}}^i$ à $K[S_{n-1}]$ est λ_{n-1}^i (cf. 5.3).

5.5. Démonstration de 1.7. Puisque $R(\mathfrak{gl})$ est un λ -anneau on a la relation $\lambda^k(\lambda^{k'}) = P_{k,k'}(\lambda^1, \dots, \lambda^{kk'})$, qui implique $\lambda_{n-1}^k \lambda_{n-1}^{k'} = \lambda_{n-1}^k \circ \lambda_{n-1}^{k'} = \lambda^k(\lambda^{k'})_* = P_{k,k'}(\lambda^1, \dots, \lambda^{kk'})_*$. Comme on s'est restreint à l'action sur la partie primitive, la structure d'anneau est triviale et tous les produits de $P_{k,k'}$ donnent 0. Il reste donc $P_{k,k'}(\lambda^1, \dots, \lambda^{kk'})_* = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda_{n-1}^{kk'}$, d'où en définitive $\lambda_{n-1}^k \lambda_{n-1}^{k'} = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda_{n-1}^{kk'}$. \diamond

Note ajoutée après la rédaction. La décomposition de Hodge de l'homologie cyclique dans le cas rationnel a aussi été obtenue indépendamment par T. Natsume et S.D. Schack dans un preprint récent: «A decomposition for the cyclic cohomology of a commutative algebra». D'autre part on trouvera dans l'article

de P. Hanlon intitulé «The action of S_n on the components of the Hodge decomposition of Hochschild homology» des renseignements supplémentaires sur les idempotents $e_n^{(k)}$.

Appendice. Structure de γ -anneau d'un idéal à multiplication nulle

Un λ -anneau (special λ -ring) est un anneau commutatif unitaire R équipé d'applications ensemblistes $\lambda^k: R \rightarrow R$, $k \geq 0$ satisfaisant les propriétés suivantes

- i) $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$,
- ii) $\lambda^n(x + y) = \sum_{i=0}^n \lambda^i(x) \lambda^{n-i}(y)$,
- iii) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \dots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^n(y))$,
- iv) $\lambda^n(\lambda^m(x)) = P_{n,m}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^m(x))$,

où les polynômes P_n et $P_{n,m}$ sont certains polynômes universels (cf. [G, A-T]).

A partir des λ -opérations on construit des γ -opérations et des opérations d'Adams par les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \gamma^k(x) &= \lambda^k(x + k - 1), \\ \psi^k(x) - \psi^{k-1}(x) \lambda^1(x) + \dots + (-1)^{k-1} \psi^1(x) \lambda^{k-1}(x) + (-1)^k k \lambda^k(x) &= 0. \end{aligned}$$

Supposons que R soit augmenté et que l'augmentation $\varepsilon: R \rightarrow \mathbf{Z}$ soit un homomorphisme de λ -anneaux. La γ -filtration de l'idéal d'augmentation $I = \text{Ker } \varepsilon$ est définie par

$F_n^\gamma I = \{\text{groupe additif engendré par les monômes } \gamma^{n_1}(x_1) \dots \gamma^{n_r}(x_r), \text{ où } x_r \in I \text{ et } n_1 + \dots + n_r \geq n\}$.

Cette filtration possède les propriétés suivantes (cf. [A-T, prop. 5.4 et 5.5]):

$$\begin{aligned} x \in F_n^\gamma I &\Rightarrow \psi^k(x) + (-1)^k k \lambda^k(x) \in F_{n+1}^\gamma I \quad (n \geq 1), \\ x \in F_n^\gamma I &\Rightarrow \lambda^k(x) + (-1)^k k^{n-1} x \in F_{n+1}^\gamma I \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Soit I un anneau sans élément unité muni d'opérations γ^k . On dit que I est un γ -anneau (special γ -ring) s'il existe un λ -anneau augmenté R tel que I en soit l'idéal d'augmentation. On a donc $R = \mathbf{Z} \oplus I$ et $\lambda^k(n, x)$

$$= \left(\binom{n}{k}, \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \lambda^{k-i}(x) \right).$$

Proposition. Soit I un anneau sans élément unité muni de la multiplication triviale. Les opérations $\lambda^k: I \rightarrow I$ font de I un γ -anneau si et seulement si pour tout $x, y \in I$ on a

- a) $\lambda^0(x) = 0$, $\lambda^1(x) = x$,
- b) $\lambda^k(x + y) = \lambda^k(x) + \lambda^k(y)$,
- c) $\lambda^k(\lambda^{k'}(x)) = (-1)^{(k-1)(k'-1)} \lambda^{kk'}(x)$.

Démonstration. Il suffit de traduire les conditions des λ -anneaux. La condition i) se traduit en a) et la condition ii) en b) car le produit est nul dans I . La condition iii) est immédiate car le polynôme P_n est une somme de produits, il est donc nul dans I tout comme $\lambda^n(xy)$. La condition iv) se simplifie car le polynôme $P_{m,n}$ est $(-1)^{m-1}(-1)^{n-1}\lambda^{mn}$ + une somme de produits de λ^i , ce qui donne la condition c). \diamond

References

- [A-T] Atiyah, M.F., Tall, D.O.: Group representations, λ -rings and the J -homomorphism. *Topology* **8**, 253–297 (1969)
- [B] Barr, M.: Harrison homology, Hochschild homology and triples. *J. Algebra* **8**, 314–323 (1968)
- [B-V] Burghela, D., Vigué-Poirrier, M.: Cyclic homology of commutative algebras I, Proc. Louvain-la-Neuve (1986) (Lecture Notes in Maths, Vol. 1318), pp. 51–72. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1988
- [C1] Connes, A.: Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n . *C.R. Acad. Sci. Paris* **296**, 953–958 (1983)
- [C2] Connes, A.: Non commutative differential geometry. *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.* **62**, 257–360 (1985)
- [F] Foata, D.: Communication personnelle
- [F-S] Foata, D., Schützenberger, M.-P.: Théorie géométrique des polynômes eulériens. *Lecture Notes in Maths.*, Vol. 138). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
- [F-T] Feigin, B.L., Tsygan, B.L.: Additive K -theory. In: K -theory, arithmetic and geometry. (Lecture Notes in Maths., Vol. 1289, pp. 97–209). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1987
- [G-S] Gerstenhaber, M., Schack, S.D.: A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology. *J. Pure Appl. Algebra* **48**, 229–247 (1987)
- [G] Grothendieck, A.: Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch, dans SGA 6. (Lecture Notes Maths., Vol. 225, pp. 20–77). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
- [L-P] Loday, J.-L., Procesi, C.: Cyclic homology and lambda operations. Proc. Lake Louise Conf. Canada (to appear)
- [L-Q] Loday, J.-L., Quillen, D.: Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. *Comment. Math. Helv.* **59**, 565–591 (1984)
- [L1] Loday, J.-L.: Homologies diédrale et quaternionique. *Adv. Math.* **66**, 119–148 (1987)
- [L2] Loday, J.-L.: Partition eulérienne et opérations en homologie cyclique. *C.R. Acad. Sci. Paris* **307**, 283–286 (1988)
- [V] Vigué-Roierrier, M.: Cyclic homology and Quillen homology of a commutative algebra, Proc. Louvain-la-Neuve 1986 (Lect. Notes Math., Vol. 1318, pp. 238–245) Berlin Heidelberg New York: Springer 1988