ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-LOUIS LODAY

Comparaison des homologies du groupe linéaire et de son algèbre de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 4 (1987), p. 167-190.

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_167_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 4 (1987), 167-190.

COMPARAISON DES HOMOLOGIES DU GROUPE LINÉAIRE ET DE SON ALGÈBRE DE LIE

par Jean-Louis LODAY

La version infinitésimale du groupe linéaire GL_n est l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n$. Il n'est donc pas tout à fait surprenant que l'homologie du groupe discret $GL_n(A)$ pour un anneau local A se comporte comme l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(A)$.

Le but de ce qui suit est de faire une synthèse des résultats généraux (donc on n'y trouvera pas de résultats concernant des anneaux A particuliers), puis de pousser l'analogie $GL_n - \mathfrak{gl}_n$ aussi loin que possible. Comme l'état de nos connaissances en est à des stades différents suivant le domaine, cette comparaison est très fructueuse pour élaborer des conjectures et pose un certain nombre de questions naturelles. *A priori* cette analogie se présente sous la forme d'un dictionnaire

G_m	$x+y-xy$	GL_n	det	K_n	K_n^M
G_a	$x+y$	$\mathfrak{gl}_n$	tr	HC_{n-1}	$\Omega^{n-1}/d\Omega^{n-2}$

Comme rationnellement la partie primitive de l'homologie du groupe linéaire est la K-théorie algébrique et que celle de l'algèbre de Lie des matrices est l'homologie cyclique, on aura à comparer ces deux théories et celles qui s'y rattachent. En particulier on s'intéressera dans le dernier paragraphe à la *cohomologie motivique* (liée à la K-théorie algébrique) et on montrera en quoi nos connaissances sur l'homologie cyclique permettent de concocter un candidat pour son analogue additif.

Mots-clés : K-théorie - Homologie d'algèbres de Lie - Homologie cyclique - Cohomologie motivique.

1. GROUPE LINÉAIRE ET K-THÉORIE ALGÉBRIQUE

1.1. Les groupes K_1, K_2 et K_3.

Pour tout anneau A nous désignons par $GL_n(A)$ le groupe linéaire des matrices inversibles sur A. L'inclusion canonique

$$GL_n(A) \to GL_{n+1}(A)$$

permet de définir $\cup_n GL_n(A) = GL(A)$. Les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbf{Z}$ du groupe discret $GL_n(A)$ sont notés $H_i(GL_n(A))$. On sait que $H_1(GL_n(A))$ est l'abélianisé

$$GL_n(A)_{ab} = GL_n(A)/[GL_n(A), GL_n(A)].$$

Dans le cas d'un anneau local commutatif le déterminant $\det : GL_n(A) \to A^*$ induit un isomorphisme $H_1(GL_n(A)) \cong A^*$. Le noyau du déterminant est le groupe spécial linéaire $SL_n(A)$ qui est parfait lorsque A est local, c'est-à-dire $H_1(SL_n(A)) = 0$. Le groupe $H_2(SL_n(A))$ a été « calculé » par Matsumoto lorsque A est un corps commutatif F. Plus précisément il en a donné la présentation suivante par générateurs et relations. Par définition le groupe $K_2^M(F)$ est le groupe abélien engendré par les symboles $\{x,y\}$, $x \in F^*$, $y \in F^*$, soumis aux relations

$$\begin{aligned} \{xx',y\} &= \{x,y\}\{x',y\}, \\ \{x,yy'\} &= \{x,y\}\{x,y'\}, \\ \{x,1-x\} &= 1 \qquad \text{pour tout} \qquad x \neq 1. \end{aligned}$$

THÉORÈME DE MATSUMOTO [31]. — *Pour tout corps commutatif* F *on a un isomorphisme*

$$H_2(SL(F)) \cong K_2^M(F).$$

Ce théorème a été généralisé aux anneaux locaux par Van der Kallen, Maazen et Stienstra qui en ont donné une présentation légèrement différente en termes de symboles de Dennis et Stein. Pour un anneau local commutatif A le groupe $K_2^M(A)$ est le groupe abélien engendré par les symboles $\langle a,b\rangle$ avec $1 - ab \in A^*$ soumis aux relations

$$\begin{array}{lll}
(\mathrm{D1}) & \langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle & = 0, \\
(\mathrm{D2}) & \langle a,b\rangle + \langle a',b\rangle & = \langle a+a'-aba',b\rangle, \\
(\mathrm{D3}) & \langle ab,c\rangle - \langle a,bc\rangle + \langle ca,b\rangle & = 0.
\end{array}$$

En présence de (D2) et (D3) la relation (D1) est équivalente à

$$(\mathrm{D1'}) \qquad \langle 1,a\rangle = 0.$$

Dans le cas d'un corps commutatif F l'isomorphisme entre les deux présentations est donné par $\langle a,b\rangle \to \{1-ab,b\}$ si b est inversible ($\langle a,0\rangle$ est l'élément neutre). Il est intéressant de noter que l'analogue de la relation de Steinberg $\{u,1-u\} = 1$ est la relation « cyclique » (D1).

THÉORÈME [18]. — *Pour tout anneau local commutatif* A *on a un isomorphisme* $H_2(SL_n(A)) \cong K_2^M(A)$ *pour* $n \geqslant 3$.

Lorsque A est local mais pas forcément commutatif on a $K_1(A) = A^*/[A^*,A^*]$ et on peut décrire $K_2(A) = H_2(SL(A))$ de la manière suivante. Soit $A^* \otimes A^*$ (produit tensoriel non abélien) le groupe engendré par les symboles $a \otimes b$ soumis aux relations

$$\begin{aligned}
aa' \otimes b &= {}^a(a'\otimes b)(a\otimes b) \\
a \otimes bb' &= (a\otimes b)\,{}^b(a\otimes b')
\end{aligned}$$

où l'action de $c \in A^*$ sur $(a\otimes b)$ est donnée par ${}^c(a\otimes b) = cac^{-1} \otimes cbc^{-1}$.

Le quotient de $A^* \otimes A^*$ par la relation $u \otimes (1-u) = 1$ pour tout $u \in A^* - \{1\}$ est noté $U(A)$. L'homomorphisme $\phi(A) : U(A) \to [A^*,A^*]$, $a \otimes b \mapsto [a,b]$ est bien défini.

THÉORÈME [36], [21], [14]. — *Pour* A *local* (*de corps résiduel différent de* F_2) *on a* $K_2(A) = \operatorname{Ker}\phi(A)$ *et* $K_2^M(A) = H_0(A^*,U(A))$.

Il s'en déduit une longue suite exacte

$$H_1(A^*,[A^*,A^*]) \to K_2(A) \to K_2^M(A) \to [A^*,A^*]/[A^*,[A^*,A^*]] \to 0$$

(où le premier terme est un groupe d'homologie non abélienne, cf. [14] pour les détails et les démonstrations).

Question 1. — Soient M_i, N_i, $i = 1,\ldots,k$ des matrices $r \times r$ inversibles à coefficients dans A et telles que

$$[M_1,N_1][M_2,N_2]\ldots[M_k,N_k] = \mathrm{id}.$$

L'élément $(M_1 \otimes N_1)(M_2 \otimes N_2) \ldots (M_k \otimes N_k)$ de $U(M_r(A))$ est dans $\mathrm{Ker}\, \phi(M_r(A)) = \mathrm{Ker}\, \phi(A))$. Existe-t-il une formule explicite pour cet élément dans U(A) en fonction des coefficients des matrices M_i et N_i ?

Le premier cas à envisager est celui d'un corps commutatif pour lequel U(F) est précisément $K_2(F)$. Une réponse partielle est donnée dans [37]. Dans le cas additif cette application est donnée par la trace généralisée de Dennis.

Le noyau de la surjection $GL(A) \to GL(A)_{ab}$ est le sous-groupe E(A) de GL(A) engendré par les matrices élémentaires e_{ij}^a ayant 1 sur la diagonale, a en (i,j), et 0 ailleurs. Ce groupe est parfait, i.e. $E(A)_{ab} = 0$ et on pose $K_2(A) = H_2(E(A))$ (cf. [20], [31]). L'extension centrale universelle au-dessus de E(A) donne naissance au groupe de Steinberg St(A) et à une suite exacte

$$1 \to K_2(A) \to \mathrm{St}(A) \to E(A) \to 1 .$$

On pose $K_3(A) = H_3(\mathrm{St}(A))$. On verra dans le prochain paragraphe que l'on peut définir par générateurs et relations un groupe $K_3^M(F)$ pour tout corps F, dont Suslin a démontré qu'à la 2-torsion près il est en facteur direct dans $K_3(F)$. Notons $K_3(F)_{ind} = \mathrm{Coker}\,(K_3^M(F) \to K_3(F))$. D'après la définition de $K_3(F)$ et les résultats de stabilité pour l'homologie de $GL_n(F)$ dans le cas particulier H_3, il n'est pas difficile de se convaincre que $K_3(F)_{ind}$ est peu différent de $H_3(GL_2(F))$. Or D. Wigner a eu l'idée de construire un complexe explicite pour calculer ce groupe en utilisant l'action de $GL_2(F)$ sur $\mathbf{P}^1(F)$. On y voit intervenir le groupe $P(F)$ suivant :

$P(F)$ est le groupe abélien engendré par les symboles $[x]$, $x \in F^* - \{1\}$ soumis aux relations

$$(\mathrm{EF}_2) \quad [x]-[y]+[y/x]-[(1-y)/(1-x)]+[(1-y^{-1})/(1-x^{-1})]=0,$$

pour $x \neq y$.

On notera que ces cinq termes sont les cinq birapports que l'on peut former à partir de $(0,\infty,1,x,y)$ lorsque l'on ôte l'une des variables.

Exercice. — Montrer que l'application $\mu_F : P(F) \to F^* \wedge F^*$, $[x] \to x \wedge (1-x)$ est bien définie.

On remarque que $\mathrm{Coker}\, \mu_F = K_2^M(F)$. On note $B(F) = \mathrm{Ker}\, \mu_F$, appelé parfois groupe de Bloch. On peut calculer $H_3(GL_2(F))$ en fonction de $B(F)$ (cf. [3], [8]) et finalement $K_3(F)_{ind}$:

THÉORÈME [41]. — *Il existe une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathrm{Tor}(F^*,F^*)^{\sim} \to K_3(F)_{\mathrm{ind}} \to \mathcal{B}(F) \to 0$$

où $\mathrm{Tor}(F^*,F^*)^{\sim}$ *est une extension d'ordre* 2 *de* $\mathrm{Tor}(F^*,F^*)$.

Remarque. — Soit $\mathrm{Li}_2(x) = \Sigma x^n/n^2$ la fonction dilogarithme. Alors (EF_2) est l'équation fonctionnelle de

$$D(x) = \mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(1-x) = \mathrm{Li}_2(x) + (1/2)\,\mathrm{Log}(x)\,\mathrm{Log}(1-x).$$

1.2. Homologie du groupe linéaire.

Pour l'instant on ne connaît pas de présentation simple pour $H_n(GL(F))$ lorsque $n > 3$. Par contre Suslin [39, 40] a démontré des théorèmes de stabilité très forts pour l'homologie de $GL_n(F)$ lorsque F est un corps infini. Ces résultats ont été généralisés par C. H. Sah [38] pour les corps gauches et par D. Guin pour les anneaux locaux non nécessairement commutatifs [14].

THÉORÈME. — *Pour tout anneau local* A *non nécessairement commutatif et à corps résiduel infini on a des isomorphismes*

$$H_n(GL_n(A)) \to H_n(GL_{n+1}(A)) \to \dots H_n(GL(A)).$$

En fait D. Guin [14] a démontré ces résultats pour une large classe d'anneaux de rang stable un.

Pour un anneau de rang stable r (si A est local $r = 1$) on ne sait démontrer la stabilité qu'à partir de $\sup(2n, rs(A)+n)$ [17] [39].

Pour les anneaux locaux ce résultat de stabilité est le meilleur possible car on sait calculer la première obstruction à la stabilité. Pour cela il nous faut introduire les groupes de K-théorie de Milnor supérieurs $K_n^M(A)$.

Par définition $K_n^M(A)$ est le groupe abélien engendré par les symboles $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in A^*$ soumis aux relations

(M1) $\{x_1, \dots, x_i x_i', \dots, x_n\} = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}\{x_1, \dots, x_i', \dots, x_n\}$

(M2) $\{x_1, \dots, x_n\} = 1$ dès qu'il existe $i \neq j$ avec $x_i + x_j = 1$ ou 0.

THÉORÈME [40], [38], [14]. — *Pour tout anneau local* A *non nécessairement commutatif à corps résiduel infini il y a une suite exacte*

$$H_n(GL_{n-1}(A)) \to H_n(GL_n(A)) \to K_n^M(A) \to 0.$$

Ce résultat a été étendu à une large classe d'anneaux de rang stable un dans [14].

Dans le cas des corps commutatifs ces groupes de K-théorie de Milnor admettent une autre présentation en termes de symboles de Dennis et Stein généralisés : les générateurs sont les symboles $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ avec $1 - a_1 \dots a_n \in A^*$, soumis aux relations

(D1) $\langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}\rangle = \mathrm{sgn}(\sigma)\langle a_1, \dots, a_n\rangle$,
où σ est une permutation de $(1, \dots, n)$,

(D2) $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle + \langle a'_1, a_2, \dots, a_n\rangle$
$= \langle a_1 + a'_1 - a_1a_2 \dots a_na'_1, a_2, \dots, a_n\rangle$

(D3) $\langle a_1a_2, a_3, \dots, a_n\rangle - \langle a_1, a_2a_3, \dots, a_n\rangle$
$+ \cdots + (-1)^{n-1}\langle a_na_1, a_2, \dots, a_n\rangle = 0.$

L'isomorphisme entre les deux présentations est donné par $\langle a_1, \dots, a_n\rangle \to \{1 - a_1 \dots a_n, a_2, \dots, a_n\}$ lorsque $a_2, \dots, a_n$ sont non nuls. On remarquera que cette présentation a un sens pour un anneau quelconque A (cf. [25]).

1.3. K-théorie algébrique.

Rappelons tout d'abord quelques rudiments de K-théorie algébrique. Soit BGL(A) le classifiant du groupe discret GL(A), c'est-à-dire l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, 1)$ avec $\pi = GL(A)$. La construction « plus » de Quillen (cf. [35], [24]) consiste à « ajouter » à BGL(A) des 2- et 3-cellules pour obtenir un nouvel espace $BGL(A)^+$ qui se trouve être en fait un espace de lacets (et même un espace de lacets infinis). L'inclusion $BGL(A) \to BGL(A)^+$ induit un isomorphisme en homologie : $H_*(GL(A)) = H_*(BGL(A)) \to H_*(BGL(A)^+)$. En ajoutant ces cellules on a par contre modifié considérablement l'homotopie de BGL(A) et on pose

DÉFINITION. — *Les groupes de* K-*théorie algébrique de* A *sont* $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$ *pour* $n \geqslant 1$.

On a immédiatement

$$K_1(A) = H_1(GL(A)) = GL(A)_{ab},$$
$$K_2(A) = H_2(E(A)) \text{ et } K_3(A) = H_3(St(A))$$

(*cf. par exemple* [24]).

L'homomorphisme d'Hurewicz pour l'espace $BGL(A)^+$ permet de relier la K-théorie algébrique et l'homologie de $GL(A)$:

$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \to H_n(BGL(A)^+) = H_n(BGL(A)) = H_n(GL(A)).$$

En fait la structure d'espace de lacets de $BGL(A)^+$ permet d'identifier ce morphisme rationnellement. L'homologie de $BGL(A)^+$ et donc de $GL(A)$) est une algèbre de Hopf dont la partie primitive est l'homotopie (rationnelle) donc, dans notre cas, la K-théorie de A :

THÉORÈME. — *Pour tout anneau* A *on a un isomorphisme* $K_n(A) \otimes \mathbf{Q} \cong \operatorname{Prim} H_n(GL(A), \mathbf{Q})$.

Remarquons d'autre part que l'homologie rationnelle de $GL(A)$ est l'algèbre extérieure graduée de sa partie primitive.

Un corollaire intéressant des théorèmes de stabilité ci-dessus permet de comparer K-théorie de Quillen et K-théorie de Milnor.

PROPOSITION [40], [14]. — *Pour tout anneau local commutatif* A *il existe des homomorphismes fonctoriels*

$$K_n^M(A) \to K_n(A) \to K_n^M(A)$$

dont le composé est la multiplication par $(n-1)!$.

La première application i est une conséquence de l'existence du produit en K-théorie algébrique [24]

$$\cup : K_n(A) \times K_p(A) \to K_{n+p}(A),$$

lorsque A est commutatif. En effet on envoie simplement $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sur $x_1 \cup \ldots \cup x_n$.

La seconde application $x \mapsto x^M$ est le composé suivant :

$$K_n(A) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_n(GL(A)) \xrightarrow{\text{stabilité}} H_n(GL_n(A)) \to K_n^M(A).$$

Ainsi rationnellement la K-théorie de Milnor est en facteur direct dans la K-théorie de Quillen, c'est-à-dire que tout élément $x \in K_n(A)$ peut s'écrire de manière unique $x = x^M + x'$ avec $x^M \in K_n^M(A)$.

La question suivante est motivée par le fait que son analogue additif est vrai.

QUESTION 2 (*). — Soit A un anneau local commutatif et lisse. A-t-on pour tout $x \in K_n(A)$ et $y \in K_p(A)$ l'égalité $x \cup y = i(x^M \cup y^M)$ modulo la $(n-1)$!-torsion ?

La présentation en termes de symboles de Dennis et Stein ainsi que quelques calculs sur le groupe K_3 [26] m'avaient suggéré (en 1981) le complexe suivant :

Pour tout $n \geqslant 0$ notons $C_n^\times(A)$ le groupe abélien engendré par les symboles $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $1 - a_0 \ldots a_n \in A^*$ et soumis aux relations

$$(\mathrm{D1}_n) \quad (a_n, a_0, \ldots, a_{n-1}) = (-1)^n (a_0, \ldots, a_n),$$

$$(\mathrm{D2}_n) \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n) + (a'_0, a_1, \ldots, a_n) = (a_0 + a'_0 - a_0 a_1 \ldots a_n a'_0, a_1, \ldots, a_n).$$

On vérifie que l'on a un complexe

$$\cdots \to C_n^\times(A) \cdots \to C_{n-1}^\times(A) \cdots \to C_0^\times(A) = A^*$$

où le bord b est le bord de Hochschild :

$$b(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) + (-1)^n (a_n a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Notons $H_n^\times(A)$ les groupes d'homologie de ce complexe. Il est immédiat que lorsque A est local on a $H_0^\times(A) = K_1(A)$ et $H_1^\times(A) = K_2(A)$ par $(a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$. On vérifie que l'on a aussi le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Pour tout anneau local commutatif* A *il existe des homomorphismes fonctoriels*

$$K_n^M(A) \to H_{n-1}^\times(A) \to K_n^M(A)$$

dont le composé est la multiplication par $(n-1)!$.

Question 3. — Y a-t-il un lien entre $K_n(A)$ et $H_{n-1}^\times(A)$ lorsque A est local commutatif et $n \geqslant 3$?

On trouvera dans la thèse de C. Ogle [32] des indications sur cette comparaison.

Remarque. — On verra en 2.2 que la version additive de ce complexe est le complexe de Connes. En fait les groupes $C_n^{\times}(A)$ forment un module simplicial et même un module cyclique [7]. On peut donc leur appliquer toutes les techniques de l'homologie cyclique pour en calculer l'homologie [10]. En particulier on peut construire un (b, B)-complexe à l'aide des groupes $C_n^{\times}(A)$ qui donnent naissance à l'homologie cyclique multiplicative $HC_n^{\times}(A)$ (cf. 2.3) dont il serait intéressant de connaître le lien avec $K_{n+1}(A)$.

2. ALGÈBRES DE LIE DES MATRICES ET K-THÉORIE ADDITIVE

2.1. Basses dimensions.

Soit k un anneau commutatif avec unité (par exemple $\mathbf{Z}$ ou un corps) et soit A une k-algèbre avec élément unité, non nécessairement commutative. On désigne par $\mathfrak{gl}_n(A)$ l'algèbre de Lie des matrices à coefficients dans A. Le crochet de Lie est défini par $[x,y] = xy - yx$. L'inclusion canonique $\mathfrak{gl}_n(A) \to \mathfrak{gl}_{n+1}(A)$ permet de définir $\cup_n \mathfrak{gl}_n(A) = \mathfrak{gl}(A)$. Les groupes d'homologie (d'algèbre de Lie) de $\mathfrak{gl}_n(A)$ à coefficients dont le module trivial k sont notés $H_i(\mathfrak{gl}_n(A))$.

On sait que $H_1(\mathfrak{gl}_n(A))$ est l'abélianisé (au sens additif) de $\mathfrak{gl}_n(A)$. Pour tout A la trace $\mathrm{tr}: \mathfrak{gl}_n(A) \to A$ induit un isomorphisme $H_1(\mathfrak{gl}_n(A)) \cong A/[A,A]$. Ici il n'y a pas besoin de supposer que A est local car le fait de travailler avec l'algèbre de Lie fait que l'on est déjà dans une « situation locale ». Le noyau de la trace est l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(A)$ qui est parfaite, c'est-à-dire $H_1(\mathfrak{sl}_n(A)) = 0$. Le groupe $H_2(\mathfrak{sl}_n(A))$ a été « calculé » par S. Bloch lorsque A est commutatif.

THÉORÈME [3]. — *Pour tout anneau* A *commutatif on a des isomorphismes* $H_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong \Omega^1_{A/k}/dA$ *si* $n \geq 5$ *et* $1/2 \in k$.

Ici $\Omega^1_{A/k}$ désigne le A-module des différentielles de Kähler $a\,db$ sur k. Pour comparer avec le cas multiplicatif on regarde la présentation de

$H_2(SL_n(A))$ à l'aide des symboles de Dennis et Stein. La relation (D2) utilise la loi du groupe formel multiplicatif $\mathbf{G}_m$ soit $(x,y) \mapsto x + y - xy$ pour $x = ab$ et $y = a'b$. Si on remplace cette loi par celle du groupe additif $\mathbf{G}_a$ soit $(x,y) \mapsto x + y$ cette relation devient

$$\langle a,b \rangle + \langle a',b \rangle = \langle a+a',b \rangle .$$

Puisque l'on travaille au-dessus d'un anneau de base k qui n'est pas forcément $\mathbf{Z}$ il est naturel de lui substituer la linéarité $(D2^{add})$. On définit le groupe $HC_1(A)$ comme le k-module engendré par les symboles $\langle a,b \rangle$, a, $b \in A$, soumis aux relations

(D1) $\langle a,b \rangle + \langle b,a \rangle = 0$,

($D2^{add}$) $\lambda \langle a,b \rangle + \mu \langle a',b \rangle = \langle \lambda a + \mu a',b \rangle$, λ, $\mu \in k$,

(D3) $\langle ab,c \rangle - \langle a,bc \rangle + \langle ca,b \rangle = 0$.

On constate que $\Omega^1_{A/k}/dA$ et $HC_1(A)$ sont isomorphes via l'application $adb \mapsto \langle a,b \rangle$.

Dans le cas non commutatif on appelle $HC_1(A)$ le sous-k-module du module précédent qui est le noyau de l'application $\langle a,b \rangle \mapsto [a,b] = ab - ba \in A$. On a alors

Théorème [19]. — *Pour toute k-algèbre* A *on a un isomorphisme* $H_2(\mathfrak{sl}_n(A)) \cong HC_1(A)$ *pour* $n \geqslant 5$ (*ou pour* $n \geqslant 2$ *si* $1/2 \in k$).

Par analogie avec la K-théorie algébrique il est tout naturel de poser $K_1^{add}(A) = H_1(\mathfrak{gl}(A))$, $K_2^{add}(A) = H_2(\mathfrak{sl}(A))$ et $K_3^{add}(A) = H_3(\mathfrak{st}(A))$ où $\mathfrak{st}(A)$ est l'extension centrale universelle de l'algèbre de Lie parfaite $\mathfrak{sl}(A)$. En fait on a la suite exacte

$$0 \to K_2^{add}(A) \to \mathfrak{st}(A) \to \mathfrak{sl}(A) \to 0 .$$

On remarquera que l'on a $H_1(\mathfrak{st}(A)) = H_2(\mathfrak{st}(A)) = 0$ (cf. [19]).

On verra ci-dessous que pour tout anneau A on peut définir simplement des groupes de K-théorie de Milnor additif $K_n^{M\,add}(A)$. Lorsque A est commutatif ils coïncident avec $K_n^{add}(A)$ pour $n=1$ et 2. Ce n'est plus le cas lorsque A est non commutatif. On a alors une suite exacte

$$H_1(A,[A,A]) \to K_2^{add}(A) \to K_2^{M\,add}(A) \to [A,A]/[A,[A,A]] \to 0,$$

où le premier groupe est un groupe d'homologie d'algèbre de Lie.

2.2. Homologie de l'algèbre de Lie des matrices.

Dans le contexte additif on a aussi des théorèmes de stabilité pour l'homologie de $\mathfrak{gl}_n(A)$, mais on n'a pour l'instant de démonstration complète que dans le cas rationnel.

THÉORÈME [28]. — *Soit k un corps de caractéristique zéro et* A *une k-algèbre. On a des isomorphismes*

$$H_n(\mathfrak{gl}_n(A)) \to H_n(\mathfrak{gl}_{n+1}(A)) \to \dots H_n(\mathfrak{gl}(A)).$$

THÉORÈME [28]. — *Avec les mêmes hypothèses et* A *commutatif on a une suite exacte*

$$H_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A)) \to H_n(\mathfrak{gl}_n(A)) \to \Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k} \to 0.$$

En fait les groupes $\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k}$ sont des « groupes de K-théorie de Milnor additifs ». En effet si dans la présentation de $K_n^M(A)$ en termes de symboles de Dennis et Stein on remplace (D2) par son analogue additif, soit

$$(\mathrm{D2^{add}}) \quad \lambda\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle + \mu\langle a_1', a_2, \dots, a_n\rangle = \langle \lambda a_1 + \mu a_1', a_2, \dots, a_n\rangle,$$

on trouve un nouveau groupe qu'on note $K_n^{M\,\mathrm{add}}(A)$ et on peut montrer la

PROPOSITION. — *Lorsque* A *est commutatif l'application*

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \mapsto a_1 da_2 \dots da_n$$

induit un isomorphisme $\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k} \cong K_n^{M\,\mathrm{add}}(A)$.

Le calcul de la première obstruction à la stabilité peut être généralisé au cas non commutatif en ce sens qu'on a une suite exacte

$$H_n(\mathfrak{gl}_{n-1}(A)) \to H_n(\mathfrak{gl}_n(A)) \to K_n^{M\,\mathrm{add}}(A) \to 0.$$

2.3. K-théorie additive et homologie cyclique.

Pour les dimensions supérieures l'analogue de la K-théorie algébrique n'est pas aussi évident à définir car on ne connaît pas d'interprétation topologique de l'homologie d'une algèbre de Lie, c'est-à-dire d'un espace jouant le rôle de l'espace classifiant BGL(A) (voir discussion ci-après pour le cadre simplicial). Par contre en caractéristique zéro, c'est-à-dire lorsque k contient $\mathbf{Q}$, il est tout à fait raisonnable de poser

$$K_n^{\mathrm{add}}(A) = \operatorname{Prim} H_n(\mathfrak{gl}(A),k) .$$

Cette définition est cohérente avec les cas $n = 1$, 2 et 3 dont il a été question ci-dessus. La grande différence avec le cas multiplicatif est que dans le cas additif les « calculs » faits pour $n = 1$ et 2 peuvent s'étendre à tout n. Avant de les énoncer il nous faut introduire le complexe de Connes et l'homologie cyclique.

DÉFINITION. — *Soit k un anneau commutatif avec unité et* A *une k-algèbre (non nécessairement commutative) avec unité. Soit $C_n^\lambda(A)$ le quotient $A^{\otimes n+1}/(1-t)$ où t est la permutation cyclique $t(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (-1)^n(a_n, a_0, \ldots, a_{n-1})$.*

En d'autres termes le groupe cyclique $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ opère sur $A^{\otimes n+1}$ par permutation cyclique et $C_n^\lambda(A)$ est le produit tensoriel de ce module par la signature. Alors

$$\cdots \to C_n^\lambda(A) \to C_{n-1}^\lambda(A) \to \cdots \to C_0^\lambda(A) = A$$

où le bord est le bord de Hochschild

$$b(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (a_0, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n) + (-1)^n (a_n a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

est un complexe de k-modules qu'on appelle le *complexe de Connes.*

Ses groupes d'homologie $H_n^\lambda(A)$ seront appelés groupes d'homologie de Connes. On remarque que ces groupes sont définis sans hypothèse de caractéristique sur k et que $H_0^\lambda(A) = A/[A,A]$ et (lorsque A est commutatif) $H_1^\lambda(A) = \Omega^1_{A/k}/dA$. Les résultats de 2.1 se réécrivent donc $K_1^{\mathrm{add}}(A) = H_0^\lambda(A)$ et $K_2^{\mathrm{add}}(A) = H_1^\lambda(A)$.

En caractéristique zéro (i.e. $k \supset \mathbf{Q}$) les groupes $H^{\lambda}_{*}(A)$ sont isomorphes aux groupes d'homologie cyclique $HC_{*}(A)$ dont la définition donnée ci-dessous, quoique plus compliquée, se prête facilement aux calculs.

On considère le (b,B)-bicomplexe $\mathscr{B}(A)$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] & {} \arrow[d, "b"'] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"'] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"'] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

où b est le bord de Hochschild et B est donné par la formule

$$\begin{aligned} B(a_0, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{in}(1, a_i, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_{i-1}) \\ + (-1)^{(i+1)n}(a_i, \ldots, a_n, a_0, \ldots, a_{i-1}, 1). \end{aligned}$$

Définition. — *Pour toute k-algèbre* A *l'homologie cyclique de* A *est* $HC_n(A) = H_n(\mathrm{Tor}\, \mathscr{B}(A))$.

L'application naturelle $HC_n(A) \to H^{\lambda}_n(A)$ est un isomorphisme pour $i = 0$ et 1 et aussi pour $i = 2$ si 2 est inversible dans k. Dans le cas général ces deux familles de groupes sont reliées par une suite spectrale

$$E^2_{pq} = H_p(\mathbf{Z}/q+1)\mathbf{Z}, A^{\otimes q+1}) \Rightarrow HC_{p+q}(A),$$

avec évidemment $E^2_{0q} = H^{\lambda}_q(A)$. Ceci implique la

Proposition. — *Si k contient* $\mathbf{Q}$ *on a des isomorphismes* $H^{\lambda}_n(A) \cong HC_n(A)$.

Théorème [28], [9]. — *Soit k un corps de caractéristique zéro et* A *une k-algèbre associative (non nécessairement commutative) avec unité. On a alors des isomorphismes*

$$K^{\mathrm{add}}_n(A) \cong HC_{n-1}(A).$$

L'intérêt de ce théorème est que l'on a beaucoup d'outils pour calculer effectivement les groupes $HC_n(A)$ qui sont aussi les groupes d'homologie cyclique. De plus la connaissance des groupes $K_n^{\mathrm{add}}(A)$ permet de déterminer complètement $H_*(\mathfrak{gl}(A))$ car en caractéristique zéro une algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante de sa partie primitive.

Lorsque l'on n'est plus en caractéristique zéro on peut utiliser le cadre simplicial pour définir une construction « plus » à la Quillen. C'est ce qu'a fait Pirashvili [34]. Regardons $\mathfrak{sl}(A)$ comme une algèbre de Lie simpliciale triviale, c'est-à-dire avec $\mathfrak{sl}(A)$ en toutes dimensions, les faces et les dégénérescences étant l'identité. Son π_0 est donc $\mathfrak{sl}(A)$. Pirashvili a montré qu'il existe alors une algèbre de Lie simpliciale $\mathfrak{sl}(A)^+$ dont le π_0 est trivial et un morphisme d'algèbres de Lie simpliciales $\mathfrak{sl}(A) \to \mathfrak{sl}(A)^+$ qui induit un isomorphisme en homologie. Il est donc naturel de poser

$$K_n^{\mathrm{add}}(A) := \pi_n(\mathfrak{sl}(A)^+) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 2.$$

Les groupes d'homotopie sont ceux du k-module simplicial $\mathfrak{sl}(A)^+$, ce sont donc des k-modules. Les propriétés de la construction + font que cette définition est cohérente pour $n = 2$ et 3 avec celles données précédemment : $K_2^{\mathrm{add}}(A) = H_2(\mathfrak{sl}(A))$ et $K_3^{\mathrm{add}}(A) = H_3(\mathfrak{st}(A))$.

Question 4. — Supposons que k contienne $\mathbf{Q}$, a-t-on

$$\pi_n(\mathfrak{sl}(A)^+) \cong \operatorname{Prim} H_n(\mathfrak{gl}(A),k) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 2\,?$$

(en d'autres termes les deux définitions de $K_n^{\mathrm{add}}(A)$ coïncident-elles ?).

En fait la définition de Pirashvili ne peut être considérée comme bonne que si la réponse à cette question est oui. De manière générale il existe une application fonctorielle $H_n(\mathfrak{gl}_r(A)) \to H_n^{\lambda}(A)$ utilisant la trace généralisée de Dennis (cf. [28]). Cette application induit, via l'homomorphisme d'Hurewicz, une application $K_n^{\mathrm{add}}(A) \to H_n^{\lambda}(A)$.

Question 5. — Si k n'est pas de caractéristique zéro sous quelles conditions l'application

$$K_n^{\mathrm{add}}(A) \to H_n^{\lambda}(A)$$

est-elle un isomorphisme ?

Lorsque A est commutatif $HC_{*-1}(A)$ admet une structure multiplicative, c'est-à-dire qu'il existe un produit

$$HC_{n-1}(A) \times HC_{p-1}(A) \to HC_{n+p-1}(A).$$

On a vu que le rôle des groupes de K-théorie de Milnor est joué par les groupes $\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k}$ et ainsi le produit permet de définir une application $\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k} \to HC_{n-1}(A)$. En fait on a même l'analogue de la proposition de la section 1.3.

PROPOSITION. — *Lorsque* A *est commutatif il existe des applications fonctorielles*

$$\Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k} \to HC_{n-1}(A) \to \Omega^{n-1}_{A/k}/d\Omega^{n-2}_{A/k}$$

dont le composé est la multiplication par $(n-1)!$.

Cet énoncé est encore vrai avec $H^{\lambda}_n(A)$ en lieu et place de $HC_n(A)$. Le point remarquable ici est qu'il est valable sans hypothèse de caractéristique sur k.

Lorsque A est commutatif et lisse $HC_*(A)$ peut s'exprimer en fonction du complexe de De Rham de A et le produit est facile à décrire (cf. [28]).

3. COMPARAISON DIRECTE DES DEUX THÉORIES

Lorsqu'il existe une exponentielle et un logarithme on peut comparer directement $GL(A)$ et $\mathfrak{gl}(A)$. Il est alors naturel de penser que l'on doit pouvoir comparer aussi la K-théorie algébrique et l'homologie cyclique.

3.1. Cas d'un idéal nilpotent en rationnel.

Lorsque le corps de base k contient $\mathbf{Q}$ et que l'on travaille avec un idéal nilpotent I d'une k-algèbre A, les fonctions exponentielles et logarithmes sont bien définies pourvu que la variable soit dans I. On peut donc s'attendre à ce qu'il y ait un isomorphisme entre K-théorie relative et homologie cyclique relative. C'est ce qu'a démontré Goodwillie :

THÉORÈME [12]. — *Soit k un corps de caractéristique zéro,* A *une k-algèbre et* I *un idéal nilpotent de* A. *Pour tout n on a un isomorphisme*

$$K_n(A, I) \otimes \mathbf{Q} \cong HC_{n-1}(A, I).$$

Ici $K_*(A, I)$ désigne la K-théorie relative de l'idéal I c'est-à-dire les groupes d'homotopie de la fibre théorique de l'application $BGL(A)^+ \to BGL(A/I)^+$. De même $HC_*(A, I)$ désigne l'homologie cyclique de l'idéal I c'est-à-dire les groupes d'homologie du complexe noyau de l'application $C_*^\lambda(A) \to C_*^\lambda(A/I)$.

Ogle et Weibel ont étendu ce résultat à la K-théorie birelative.

THÉORÈME [33]. — *Soit k un corps de caractéristique zéro,* A *une k-algèbre,* I *et* J *deux idéaux de* A *tels que* $I \cap J$ *soit nilpotent. Pour tout n on a un isomorphisme*

$$K_n(A; I, J) \otimes \mathbf{Q} \cong HC_{n-1}(A, I, J).$$

Il serait très intéressant de pouvoir affaiblir l'hypothèse k de caractéristique zéro en supposant que seuls certains nombres premiers sont inversibles. On a quelques indications dans ce sens, par exemple si $k = \mathbf{Z}$ et $I \cap J = 0$ les groupes $K_n(A; I, J)$ et $HC_{n-1}(A, I, J)$ sont nuls pour $n = 1$ et sont tous deux isomorphes à $I \underset{A}{\otimes} J$ lorsque $n = 2$ (cf. [15]).

3.2. Le cas de A = C.

Notons $BGL(\mathbf{C})$ le classifiant du groupe discret $GL(\mathbf{C})$ et $BGL(\mathbf{C})^{top}$ le classifiant du groupe topologique $GL(\mathbf{C})$. Les propriétés de la construction « plus » impliquent l'existence d'une application naturelle $BGL(\mathbf{C})^+ \to BGL(\mathbf{C})^{top}$ dont on note $\tilde{B}GL(\mathbf{C})$ la fibre homotopique. Les groupes d'homotopie de $BGL(\mathbf{C})^{top} \cong BU$ sont bien connus : 0 en dimensions impaires et $\mathbf{Z}$ en dimensions paires. Les groupes d'homotopie de $BGL(\mathbf{C})^+$ sont les $K_n(\mathbf{C})$.

Il semble que les groupes d'homotopie de $\tilde{B}GL(\mathbf{C})$ soient peu différents de l'homologie cyclique de $\mathbf{C}$ vue comme une $\mathbf{Z}$-algèbre (i.e. $k = \mathbf{Z}$, $A = \mathbf{C}$). En d'autres termes l'homologie de $\tilde{B}GL(\mathbf{C})$ doit être peu différente de celle de la $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathbf{C})$. Par exemple en basse dimension la suite exacte

$$K_2(\mathbf{C}) \to \pi_2(BGL(\mathbf{C})^{top}) \to \pi_1(\tilde{B}GL(\mathbf{C})) \to K_1(\mathbf{C}) \to \pi_1(BGL(\mathbf{C})^{top})$$

donne

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{C} \xrightarrow{\exp} \mathbf{C}^* \to 0$$

car $K_2(\mathbf{C})$ est un groupe divisible (non nul). Or justement on a $HC_0^{\mathbf{Z}}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$. La comparaison de $K_2(\mathbf{C})$ avec $HC_1^{\mathbf{Z}}(\mathbf{C})$est plus délicate.

On notera dans le même esprit le résultat très intéressant suivant dû à Haefliger.

THÉORÈME [16]. — *Soit* N *un groupe de Lie nilpotent, divisible et sans torsion et soit* $\mathfrak{n}$ *son algèbre de Lie. Alors il y a un isomorphisme naturel*

$$H_*(N,\mathbf{Z}) \to H_*^{\mathbf{Z}}(\mathfrak{n}).$$

4. COHOMOLOGIE MOTIVIQUE ET SON ANALOGUE ADDITIF

4.1. Cohomologie motivique.

La cohomologie motivique est une théorie cohomologique conjecturale définie sur les variétés entières (c'est-à-dire sur Spec $\mathbf{Z}$) universelle pour toute théorie de classes caractéristiques (à la Chern). Grothendieck fut le premier à envisager l'existence d'une telle théorie pour laquelle il a imaginé la notion de motifs. On trouvera dans l'article de Manin [29] un compte-rendu de ces travaux.

L'idée principale est que cette théorie motivique doit jouer, en géométrie algébrique, le rôle que joue la cohomologie entière en topologie algébrique. Mais alors que la K-théorie topologique est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graduée la K-théorie algébrique est $\mathbf{Z}$-graduée. Il est donc naturel de rechercher des groupes indexés par deux indices i et r. On notera ces groupes $H^i_M(X,\mathbf{Z}(r))$ et $H^i_M(X,\mathbf{Q}(r))$ pour leur version rationnelle.

Plus précisément Beilinson (dans le cadre Zariskien) et Lichtenbaum (dans le cas étale) ont conjecturé l'existence d'une suite de complexes de faisceaux $\Gamma(r)$ où r est un entier positif ou nul, devant satisfaire un certain nombre d'axiomes précisant l'universalité vis-à-vis des classes de Chern, le lien avec la K-théorie algébrique et le comportement en tant que théorie de cohomologie. Par définition on aurait

$$H^i_M(X,\mathbf{Z}(r)) = \mathbf{H}^i(X,\Gamma(r)).$$

Plusieurs candidats ont été proposés pour ces complexes de faisceaux par Beilinson [1], Lichtenbaum [23], Bloch [4], Beilinson-Mac Pherson-Schechtman [2].

Rappelons certains de ces axiomes dans le cas Zariskien. Soit X un schéma au-dessus de Spec (k) où k est un anneau commutatif unitaire (en général $\mathbf{Z}$ ou un corps). Les complexes $\Gamma(r)$ sont des objets dans la catégorie dérivée des faisceaux de Zariski sur X. On voudrait qu'ils satisfassent à

(a) $\Gamma(0) = \mathbf{Z}$, $\Gamma(1) = \mathbf{G}_m[-1]$ (où $[-1]$ signifie décalé d'un cran),

(b) pour $r \geqslant 1$, $\Gamma(r)$ est acyclique en dehors de l'intervalle $[1,r]$,

(c) $\Gamma(r) \otimes^{\mathrm{L}} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \tau_{\leqslant r} \mathrm{R}\alpha_* \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(r)$,

(d) il y a un produit $\Gamma(r) \otimes^{\mathrm{L}} \Gamma(s) \to \Gamma(r+s)$ induisant un produit en cohomologie

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{X},\Gamma(r)) \otimes \mathrm{H}^j(\mathrm{X},\Gamma(s)) \to \mathrm{H}^{i+j}(\mathrm{X},\Gamma(r+s))$$

(e) $\mathrm{Gr}^r_\gamma(\mathrm{K}_j\mathrm{X}) \cong \mathrm{H}^{2r-j}(\mathrm{X},\Gamma(r))$ à la $(r-1)$!-torsion près.

(f) lorsque X est lisse il y a un isomorphisme de faisceaux $\mathscr{H}^r(\mathrm{X},\Gamma(r)) \cong \mathscr{K}^{\mathrm{M}}_r(\mathrm{X})$.

La notation $\tau_{\leqslant r}\mathrm{C}_*$ signifie $(\tau_{\leqslant r}\mathrm{C}_*)_n = \mathrm{C}_n$ pour $n < r$ (resp. Ker d_n pour $n=r$, resp. 0 pour $n>r$) et α est le foncteur d'oubli des faisceaux étales vers les faisceaux de Zariski.

Le groupe (resp. faisceau) $\mathrm{K}_j(\mathrm{X})$ (resp. $\mathscr{K}^{\mathrm{M}}_r(\mathrm{X})$) est la K-théorie algébrique (resp. le faisceau de K-théorie de Milnor) du schéma X. En particulier si X est affine (X = Spec A), c'est le groupe $\mathrm{K}_j(\mathrm{A})$ (resp. on a $\Gamma(\mathrm{X},\mathscr{K}^{\mathrm{M}}_r(\mathrm{X})) = \mathrm{K}^{\mathrm{M}}_r(\mathrm{A})$).

4.2. Cohomologie motivique additive.

La question naturelle que l'analogie multiplicatif-additif des sections précédentes nous pousse à poser est la suivante : existe-t-il un analogue additif de la cohomologie motivique ? Par là on entend une théorie de cohomologie définie sur les variétés algébriques sur Spec k et satisfaisant un système d'axiomes similaires à ceux énoncés en 4.1 mais où $\mathbf{G}_m$ a été remplacé par $\mathbf{G}_a$, l'homologie de GL par celle de $\mathfrak{gl}$, et donc la K-théorie algébrique par l'homologie cyclique, la K-théorie de Milnor $\mathrm{K}^{\mathrm{M}}_n$ par $\Omega^{n-1}/d\Omega^{n-2}$, etc. En particulier K_n doit être remplacé par $\mathrm{H}^{\lambda}_{n-1}$ ou HC_{n-1}.

En se plaçant dans la philosophie de Beilinson et Lichtenbaum il est naturel de rechercher des complexes de faisceaux $\Gamma^{\mathrm{add}}(r)$ définis pour tout $r \geqslant 0$ et satisfaisant à des axiomes analogues à (a) – (f) ci-dessus. On se propose de montrer que les propriétés connues de l'homologie cyclique et de l'homologie de Hochschild suggèrent la définition ci-dessous.

Tout d'abord on remarque que pour $\mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ le foncteur $\mathscr{H}\mathscr{H}_n : \mathrm{U} \to \mathrm{H}_n(\Gamma(\mathrm{U},\mathcal{O}_{\mathrm{X}}), \Gamma(\mathrm{U},\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$ est un faisceau sur X muni de sa topologie de Zariski (cf. par exemple [5]).

Définition. — *On pose*

$$\Gamma^{\mathrm{add}}(r) := (\mathscr{H}\mathscr{H}_{r-2} \xleftarrow{\mathrm{B}} \mathscr{H}\mathscr{H}_{r-2} \xleftarrow{\mathrm{B}} \cdots \xleftarrow{\mathrm{B}} \mathscr{H}\mathscr{H}_0).$$

Pour $r = 0$ on a $\Gamma^{\mathrm{add}}(0) = \mathscr{H}\mathscr{H}_0 = \mathbf{G}_a$, d'où (a).

L'axiome (b) est évident par construction.

L'analogue de l'axiome (c) est probablement lié à la suite exacte d'Artin-Schreier, mais en fait le bon axiome doit sans doute faire intervenir l'action de l'anneau de Witt lorsque l'on est en caractéristique p.

L'axiome (d) se déduit des propriétés multiplicatives de l'homologie cyclique, en particulier du résultat suivant indiquant comment l'opérateur de Connes B se comporte vis-à-vis du « shuffle »-produit (noté .) : pour tout $x \in \mathrm{H}_n(\mathrm{A},\mathrm{A})$ et tout $y \in \mathrm{H}_p(\mathrm{A},\mathrm{A})$ on a $\mathrm{B}(x.\mathrm{B}(y)) = \mathrm{B}(x).\mathrm{B}(y)$ (cf. [28]).

L'axiome (e) résulte d'un travail non encore publié de l'auteur et Procesi sur les λ-opérations en homologie cyclique [27] ainsi que de la suite spectrale du bicomplexe (b,B) en caractéristique zéro.

L'axiome (f) est une conséquence du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg comparant l'homologie de Hochschild et les formes différentielles, et de la dégénérescence de la suite spectrale du (b,B)-complexe en caractéristique zéro (cf. [28]) et en caractéristique positive (cf. [13]).

4.3. Fonction ζ d'une variété lisse sur un corps fini.

Les invariants déduits des théories multiplicative et additive se rejoignent intimement dans les conjectures (et résultats) concernant les valeurs de la fonction ζ d'une variété lisse sur $\mathbf{F}_q$ aux entiers positifs.

Sans entrer dans les détails pour lesquels le lecteur pourra se reporter à [30] et [22] indiquons ce qui suit.

La cohomologie de X à coefficients dans $\Gamma(r)$ (dans sa version étale) donne naissance à une « caractéristique d'Euler-Poincaré multiplicative » :

$$\chi^{\mathrm{mult}}(\mathrm{X},\Gamma(r)) = \frac{\#\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\Gamma(r))\ldots\#\mathrm{H}^{2r}(\mathrm{X},\Gamma(r))_{\mathrm{tor}}\#\mathrm{H}^{2r+2}(\mathrm{X},\Gamma(t))_{\mathrm{cotor}}\#\mathrm{H}^{2r+4}(\mathrm{X},\Gamma(r))\ldots}{\#\mathrm{H}^1(\mathrm{X},\Gamma(r))\#\mathrm{H}^3(\mathrm{X},\Gamma(r))\ldots\mathrm{R}_r(\mathrm{X})}$$

où $\mathrm{R}_r(\mathrm{X})$ est un régulateur supérieur. D'autre part Milne a défini une caractéristique d'Euler-Poincaré « additive » de la manière suivante :

$$\chi(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}},r) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant r\\ 0\leqslant j\leqslant d}} (-1)^{i+j}(r-i)\dim \mathrm{H}^j(\mathrm{X},\Omega^i),$$

où $d = \dim \mathrm{X}$. La conjecture (démontrée dans un petit nombre de cas (cf. loc. cit)) reliant ces caractéristiques d'Euler-Poincaré à la fonction ζ de X est

$$\lim_{s\to r} (s-r)^{a_r(\mathrm{X})}\zeta(\mathrm{X},s) = \pm\, q^{\chi(\mathrm{X},\mathcal{O}_{\mathrm{X}},r)}.\chi^{\mathrm{mult}}(\mathrm{X},\Gamma(r)),$$

où $a_r(\mathrm{X})$ est l'ordre du pôle de $\zeta(\mathrm{X},s)$ en $s = r$.

La remarque importante est la suivante. Lorsque X est lisse de dimension d, la caractéristique d'Euler-Poincaré définie par Milne est égale à

$$\sum_{t<r} (-1)^t\chi(\mathrm{X},\Gamma_t^{\mathrm{add}})$$

où $\chi(\mathrm{X},\Gamma_t^{\mathrm{add}})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré classique de X pour la théorie de cohomologie $\mathrm{H}^*(-,\Gamma_t^{\mathrm{add}})$.

4.4. Retour à la K-théorie algébrique.

La définition de l'homologie cyclique par le bicomplexe (b,B) et la comparaison entre les complexes $\Gamma(r)$ et $\Gamma^{\mathrm{add}}(r)$ suggèrent que l'on peut espérer une interprétation de la K-théorie d'un anneau local comme l'homologie d'un bicomplexe $\mathrm{C}^{\times}_{**}$ qui serait tel que lorsqu'on en prend l'homologie verticale, soit $\mathrm{E}^1_{*,r}$, on en déduise les complexes (horizontaux) $\Gamma(r)$.

$$\begin{tikzcd}
C^{\times}_{03} \arrow[d, "b"'] & C^{\times}_{13} \arrow[l] \arrow[d] & C^{\times}_{23} \arrow[l] \\
C^{\times}_{02} \arrow[d, "b"'] & C^{\times}_{12} \arrow[l] & \\
C^{\times}_{01} & &
\end{tikzcd}$$

Le fait que la colonne $C^{\times}_{0*}$ donne naissance aux groupes de K-théorie de Milnor suggère la définition suivante :

$C^{\times}_{0,n}$ = groupe abélien engendré par les symboles $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que $1 - a_1 \ldots a_n \in A^*$ soumis aux relations

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) + (a_1, \ldots, a'_i, \ldots, a_n)$$
$$= (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a'_i - a_i a_{i+1} \ldots a_n a_1 \ldots a'_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Comme les groupes de K-théorie de Milnor sont isomorphes à $\mathrm{Coker}\,(H_n(GL_{n-1}(A)) \to H_n(GL_n(A)))$ on peut raisonnablement penser que les groupes de la deuxième colonne $C^{\times}_{1*}$ sont liés à

$$\mathrm{Coker}\ (H_n(GL_{n-2}(A)) \to H_n(GL_{n-1}(A)))\,.$$

L'étude de l'action de GL_n sur $\mathbf{P}^{n-1}$ (généralisant l'idée de Wigner pour $n=2$) mène à la définition suivante :

$C^{\times}_{1,n+1}$ = groupe abélien engendré par les points $[a_1, \ldots, a_n]$ de $\mathbf{P}^n(A)$ notés $(a_1, \ldots, a_{n,1})$ en coordonnées homogènes, soumis aux relations

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} \left(\frac{y_0 - y_i}{x_0 - x_i}, \ldots, \frac{y_n - y_i}{x_n - x_i}, \frac{y_i}{x_i}\right) + (-1)^n \left(\frac{y_0}{x_0}, \ldots, \frac{y_n}{x_n}\right)$$
$$- (-1)^n (y_0, \ldots, y_n) + (-1)^n (x_0, \ldots, x_n) = 0.$$

On notera que pour $n = 1$ cette relation est l'équation fonctionnelle du dilogarithme, et donc $C^{\times}_{1,2}$ (qui est aussi E^1_{12}) est le groupe $P(A)$ de 1.1. Ainsi la ligne $E^1_{*_2}$ s'identifie (presque) à

$$\mu_F : P(F) \to F^* \wedge F^*.$$

De nombreux indices font penser que plus généralement la colonne $C^{\times}_{k-1*}$ est liée à l'équation fonctionnelle (laquelle ?) du polylogarithme $\mathrm{Li}_k(x) = \Sigma\, z^n/n^k$.

Dans le cas où il existe un logarithme, on devrait pouvoir envoyer le bicomplexe multiplicatif $C^{\times}_{**}$ dans le (b, B)-bicomplexe additif (celui qui donne l'homologie cyclique) par des applications déduites de Li_k pour la colonne $C^{\times}_{k-1*}$.

4.5. Remarques finales.

Pour certains problèmes il est plus naturel, comme le fait Connes dans [7], de considérer la cohomologie cyclique au lieu de l'homologie cyclique. On peut raisonnablement supposer qu'il existe une « K-théorie contravariante » $K^*(A)$ qui serait duale, en un sens à préciser, de $K_*(A)$. Dans le cas des C*-algèbres la réponse est donnée par la KK-théorie de Kasparov. Une tentative a été faite dans [24] à l'aide des représentations de dimension finie pour les algèbres de groupes.

Nous nous sommes confinés ici au groupe linéaire mais des résultats tout à fait similaires (bien que souvent plus délicats) existent pour les groupes orthogonaux et symplectiques.

Signalons enfin que l'homologie du groupe linéaire à coefficients dans la représentation adjointe semble donner une situation intermédiaire entre l'additif et le multiplicatif (cf. [6], [11]).

(*) *Note ajoutée aux épreuves.* La réponse à la question 2 est négative comme me l'a fait remarquer S. Lichtenbaum : prendre $A = F(t)$ où F est un corps de nombres imaginaire ($r_2 > 0$). On peut montrer que $K_3(A) \times K_1(A) \to K_4(A)$ ne se réduit pas au produit des éléments Milnoriens.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. A. Beilinson, Height pairing between algebraic cycles, *Contemporary Mathematics*, vol. 67 (1987).
[2] A. A. Beilinson, R. Mac Pherson and V. Schechtmann. Notes on motivic cohomology, *Duke J. Math.*, 54 (1987), 679-710.
[3] S. Bloch, The dilogarithm and extensions of Lie algebras, *Springer Lecture Notes in Math.*, 854 (1981), 1-23.
[4] S. Bloch, Algebraic cycles and higher algebraic K-theory, *Adv. Math.*, 61 (1986), 267-304.
[5] J.-L. Brylinski, Central localization in Hochschild homology, *preprint* (1987).
[6] J.-L. Cathelineau, Sur l'homologie de SL_2 dans la représentation adjointe, *Math Scand.* (à paraître).

[7] A. CONNES, Non commutative differential geometry, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 62 (1986), 257-360.

[8] J. L. DUPONT and C. H. SAH, Scissors congruences, *J. Pure App. Alg.*, 25 (1982), 159-195.

[9] B. L. FEIGIN and B. L. TSYGAN, The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology, *Uspehi Mat. Nauk*, 38 (1983), 217-218.

[10] Z. FIEDOROWICZ and J.-L. LODAY, Crossed simplicial groups and their associated homology, *preprint* 1986, 45p., soumis pour publication.

[11] T. GOODWILLIE, On the general linear group and Hochschild homology, *Ann. Math.*, 121 (1965), 383-407.

[12] T. GOODWILLIE, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, *Ann. of Maths*, 124 (1986), 347-402.

[13] M. GROS, Quelques résultats sur l'homologie cyclique des algèbres en caractéristique positive, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, 304 (1987), 139-142.

[14] D. GUIN, Homologie du groupe linéaire et symboles en K-théorie algébrique, *Thèse d'État, Université L. Pasteur, Strasbourg*, Mai 1987.

[15] D. GUIN-WALÉRY and J.-L. LODAY, Obstruction à l'excision en K-théorie algébrique, Proc. Evanston Conf. 1980, *Springer Lecture Notes in Math.*, 854 (1981), 179-216.

[16] A. HAEFLIGER, The homology of nilpotent Lie groups made discrete, *Astérisque*, 113-114 (1984), 206-211.

[17] W. VAN DER KALLEN, Homology stability of linear groups, *Invent. Math.*, 60 (1980), 269-295.

[18] W. VAN DER KALLEN, H. MAAZEN and J. STIENSTRA, A presentation for some $K_2(n,R)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 (1975), 934-936.

[19] C. KASSEL et J.-L. LODAY, Extensions centrales d'algèbres de Lie, *Ann. Inst. Fourier*, 32-4 (1982), 119-142.

[20] M. KERVAIRE, Multiplicateurs de Schur et K-théorie, *Essays in Topology and related topics* (Mémoires dédiés à G. de Rham), 1970, Springer Verlag, pp. 212-225.

[21] M. KOLSTER, K_2 of non commutative local rings, *J. Algebra*, 95 (1985), 173-200.

[22] S. LICHTENBAUM, Values of zeta function at non negative integers, *Springer Lecture Notes in Math.*, 1068 (1984), 127-138.

[23] S. LICHTENBAUM, The construction of weight-two arithmetic cohomology, *Invent. Math.*, 88 (1987), 183-215.

[24] J.-L. LODAY, K-théorie algébrique et représentations de groups, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris*, 9 (1976), 309-377.

[25] J.-L. LODAY, Symboles en K-théorie algébrique supérieure, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, 292 (1981), 863-866.

[26] J.-L. LODAY, On the boundary map $K_3(\Lambda/I) \to K_2(\Lambda,I)$, in Algebraic K-theory, Evanston 1980, *Springer L.N.*, 854 (1981), 262-268.

[27] J.-L. LODAY and C. PROCESI, Cyclic homology and lambda operations (in preparation).

[28] J.-L. LODAY and D. QUILLEN, Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices, *Comment. Math. Helv.*, 59 (1984), 565-591.

[29] Y. MANIN, Correspondences, motifs and monoidal transformations, *Mat. Sborn.*, 77, 119 (1968), 475-507.

[30] J. S. MILNE, Values of zeta functions of varieties over finite fields, *Amer. J. Math.*, 108 (1986), 297-360.

[31] J. MILNOR, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press (1970).

[32] C. OGLE, *A map from cyclic homology to K-theory*, Ph. D. thesis Ohio State University, 1984.

[33] C. OGLE and C. WEIBEL, Relative algebraic K-theory and cyclic homology, *in preparation.*

[34] T. PIRASHVILI, « Plus » construction for Lie algebras, *Bull. Acad. Sc. Georgian SSR*, 118 n° 2 (1985), 253-256.

[35] D. QUILLEN, Cohomology of groups, *Actes Congrès Intern. Math.*, t. 2, (1970), 47-51.

[36] U. REHMANN, Zentrale Erweiterungen der spezielle lineare Gruppe eines Schiefkörpers, *J. Reine Angewandte Math.*, 301 (1978), 77-104.

[37] S. ROSSET and J. TATE, A reciprocity law for K_2-traces, *Comment. Math. Helv.*, 58 (1983), 38-47.

[38] C. H. SAH, Homology of classical Lie groups made discrete, I. Stability theorems and Schur multipliers, *Comment. Math. Helv.*, 61 (1986), 308-347.

[39] A. A. SUSLIN, Stability in algebraic K-theory, Algebraic K-theory, Proc. Oberwolfach 1980, *Springer L. N.*, 966 (1982), 304-333.

[40] A. A. SUSLIN, Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory, Algebraic K-theory Number theory and Analysis, Proc. Bielefeld 1982, *Springer L.N.*, 1046 (1984), 357-384.

[41] A. A. SUSLIN, K_3 d'un corps et groupe de Bloch, (en russe) *Proc. Steklov Inst.* (à paraître).

Jean-Louis LODAY,
Institut de Recherche Mathématique Avancée (CNRS)
7, rue R. Descartes
67084 Strasbourg (France).