JOURNAL OF ALGEBRA 54, 178–202 (1978)

Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs

JEAN-LOUIS LODAY*

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540 et Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université L. Pasteur, 67084 Strasbourg, France

Communicated by J. Tits

Received June 18, 1977

INTRODUCTION

Pour tout anneau Λ les groupes de K-théorie $K_i(\Lambda)$, $i \geqslant 1$, définis par Quillen [9] sont les groupes d'homotopie de l'espace $BGL(\Lambda)^+$. Pour tout homomorphisme d'anneaux $f: \Lambda \to \Lambda'$ il est naturel de définir les groupes de K-théorie relative $K_i(f)$ comme les groupes d'homotopie de la fibre homotopique de $BGL(\Lambda)^+ \to BGL(\Lambda')^+$. Lorsque $i = 1, 2$ les groupes $K_i(\Lambda)$ admettent l'interprétation algébrique suivante. Soit φ_Λ: $St(\Lambda) \to GL(\Lambda)$ l'homomorphisme naturel du groupe de Steinberg dans le groupe linéaire; on a alors $K_2(\Lambda) = \operatorname{Ker} \varphi_\Lambda$ et $K_1(\Lambda) = \operatorname{Coker} \varphi_\Lambda$. La connaissance d'une présentation par générateurs et relations de $St(\Lambda)$ a permis de calculer explicitement le groupe $K_2(\Lambda)$ dans de nombreux cas [8]. Le but de cet article est de construire, pour tout homomorphisme surjectif d'anneaux f, un groupe de Steinberg relatif $St(f)$ par générateurs et relations, ainsi qu'un homomorphisme $\varphi_f : St(f) \to GL(f)$ tels que $K_2(f) = \operatorname{Ker} \varphi_f$ et $K_1(f) = \operatorname{Coker} \varphi_f$. On obtient ainsi un moyen algébrique pour calculer $K_2(f)$. En utilisant la longue suite exacte de K-théorie on peut en déduire des renseignements sur le groupe K_3 d'un anneau. Par exemple, si A est un anneau noethérien régulier et si on choisit pour f l'application $A[t] \to A \times A$, $P(t) \mapsto (P(0), P(1))$, on a alors $K_3(A) = K_2(f)$.

La méthode utilisée ici est calquée sur celle de Kervaire [4]. La classification des extensions de groupes est remplacée par la classification de certains modules croisés. Un module croisé est la donnée d'un homomorphisme de groupes μ: $M \to N$ et d'une action η de N sur M telle que

(i) $\mu(\eta(n) \cdot m) = n\mu(m)\, n^{-1}$, $n \in N$, $m \in M$,

(ii) $\eta(\mu(m)) \cdot m' = mm'm^{-1}$, $m, m' \in M$.

* Supported in part by NSF Grant MCS72 05055 A04.

0021-8693/78/0541-0178$02.00/0

Notons $L = \operatorname{Ker} \mu$ et $Q = \operatorname{Coker} \mu$. Lorsqu'on fixe le Q-module L et l'épimorphisme $\nu: N \to Q$ on parle d'extension relative de (Q, N) par L au lieu de module croisé. On montre que l'ensemble $\mathscr{E}x\ell(Q, N; L)$ des classes de congruence d'extensions relatives de (Q, N) par L est en bijection avec le groupe de cohomologie relative $H^3(Q, N; L)$. Ce théorème de classification généralise l'isomorphisme classique entre les extensions du groupe Q par le Q-module L et le groupe de cohomologie $H^2(Q; L)$ (cf. [7, thm. 6.2]).

Voici un résumé section par section.

Dans la Section 1 nous définissons la notion d'homomorphisme et de congruence entre extensions relatives. Pour une telle extension MacLane [6] a construit un invariant dans $H^3(Q; L)$. Il est aisé de voir que l'image de cet invariant est nulle dans $H^3(N; L)$; il provient donc du groupe $H^3(Q, N; L)$. Nous construisons explicitement dans $H^3(Q, N; L)$ une classe caractéristique d'extension relative qui ne dépend que de la classe de congruence de l'extension choisie. L'image de cette classe caractéristique dans $H^3(Q; L)$ est l'invariant de MacLane.

La Section 2 contient la preuve du théorème de classification des classes de congruence. L'application qui associe à une extension relative sa classe caractéristique établit la bijection entre $\mathscr{E}x\ell(Q, N; L)$ et $H^3(Q, N; L)$. On donne une interprétation topologique de ce théorème en termes d'obstructions et d'invariants de Postnikov.

Dans la Section 3 on s'intéresse aux extensions relatives centrales (en abrégé extensions r.c.), i.e., aux extensions relatives pour lesquelles Q opère trivialement sur L. On montre qu'il existe une extension r.c. universelle de (Q, N) si et seulement si $H_2(Q, N; \mathbb{Z}) = 0$. On établit une caractérisation de cette extension r.c. universelle (thm. 3). La proposition 6 donne un moyen facile pour la construction d'extensions r.c. universelles. On termine le paragraphe par un critère pour reconnaître les extensions r.c. "universelles à homotopie près."

L'application de ces résultats à la K-théorie algébrique est l'objet de la Section 4. Après avoir donné la présentation par générateurs et relations du groupe de Steinberg relatif $St(f)$ d'un homomorphisme surjectif f, on définit algébriquement les groupes $K_2(f)$ et $K_1(f)$. On montre l'exactitude de la suite

$$K_3(A) \to K_3(A') \to K_2(f) \to K_2(A) \to K_2(A') \to K_1(f) \to K_1(A) \to K_1(A')$$

en utilisant les interprétations algébriques des groupes $K_i(-)$, $i = 1, 2, 3$. Ce résultat a été obtenu indépendamment et par une méthode différente par Keune dans [13]. Dans le cours de la démonstration on compare les groupes $St(f)$ et $K_2(f)$ aux groupes $St(\mathfrak{A})$ et $K_2(\mathfrak{A})$ de l'idéal $\mathfrak{A} = \operatorname{Ker} f$, définis par Stein [10] et Milnor (cf. Lemme 14). Enfin on démontre l'équivalence des définitions algébriques et topologiques des groupes de K-théorie relative.

Je remercie B. Conrad et J. G. Ratcliffe pour leurs observations pertinentes ainsi que l'Institute for Advanced Study pour son hospitalité.

1. Classe caractéristique d'une extension relative

Soit $\nu\colon N \to Q$ un épimorphisme de groupes.

Définition. Une *extension relative* de (Q, N) est la donnée d'une suite exacte de groupes

$$1 \to L \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\nu} Q \to 1$$

et d'une action η de N sur M vérifiant les conditions

(i) $\mu(\eta(n)^{-1}\, m) = n\mu(m)\, n^{-1}$, pour tout $n \in N$, $m \in M$,

(ii) $\eta(\mu(m'))^{-1}\, m = m'mm'^{-1}$, pour tout m, $m' \in M$.

La condition (i) signifie que μ est un homomorphisme N-équivariant. La condition (ii) signifie que le diagramme ci-dessous est commutatif, $\mathrm{Aut}(M)$ (resp. $\mathrm{Int}(M)$) désignant le groupe des automorphismes (resp. automorphismes intérieurs) de M,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & N \arrow[d, "\eta"] \\ \mathrm{Int}(M) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(M). \end{tikzcd}$$

Le groupe $\lambda(L) = \mathrm{Ker}\,\mu$ est dans le centre de M; en effet, d'après la condition (ii), si $m' \in \mathrm{Ker}\,\mu$ on a $m = m'mm'^{-1}$ pour tout $m \in M$. De plus l'action η définit une structure de Q-module sur L par la formule

$$q \cdot l = \lambda^{-1}(\eta(\tilde{q}) \cdot \lambda l), \qquad l \in L, \quad q \in Q, \qquad \tilde{q} = \text{relèvement de } q \text{ dans } N.$$

Cette action est bien définie, en particulier $q \cdot l$ ne dépend pas du choix du relèvement de q. En effet si $n \in \mathrm{Ker}\,\nu = \mathrm{Im}\,\mu$, il existe $m \in M$ tel que $\mu(m) = n$ et, d'après la condition (ii), on a $\eta(n) \cdot \lambda l = m(\lambda l)\, m^{-1} = \lambda l$.

Dans la suite on dira que (M, μ) est une extension relative de (Q, N) par le Q-module L. Dans la notation (Q, N) l'épimorphisme ν est sous-entendu. Une telle donnée est parfois appelée module croisé ("crossed module" [12] ou "abstract kernel" [7, 1]).

Un *morphisme d'extensions relatives* de (Q, N), soit $(\alpha)\colon (M, \mu) \to (M', \mu')$, est la donnée d'un homomorphisme de groupes N-équivariant $\alpha\colon M \to M'$ tel que $\mu'\alpha = \mu$. Remarquons que α définit par restriction un homomorphisme de Q-modules $L \to L'$ entre les noyaux.

Une *congruence d'extensions relatives* de (Q, N) par le Q-module L est un morphisme d'extensions relatives qui induit l'identité sur les noyaux. L'ensemble des classes de congruences d'extensions relatives de (Q, N) par le Q-module L est noté $\mathcal{E}xt(Q, N; L)$.

Voici maintenant quelques rappels de cohomologie des groupes pour fixer les notations. Soient G un groupe et L un G-module. Le groupe des n-cochaînes normalisées $C^n(G; L)$ est le module des applications c de $G^n = G \times G \times \cdots \times G$ dans L vérifiant $c(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 0$ dès que l'un des g_i vaut 1. L'opérateur cobord δ: $C^n(G; L) \to C^{n+1}(G; L)$ est défini par la formule

$$(\delta c)(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}) = g_1 \cdot c(g_2, \ldots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i c(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(g_1, \ldots, g_n).$$

L'homologie du complexe $(C^*(G; L), \delta)$ est, par définition, la cohomologie du groupe G à coefficients dans le module L et est notée $H^n(G; L)$, $n \geqslant 0$. L'épimorphisme ν: $N \to Q$ induit un monomorphisme de complexes ν^*: $C^*(Q; L) \to C^*(N; L)$. On note (K^*, δ) le conoyau de ν^*. On a ainsi la suite exacte de complexes

$$0 \to (C^*(Q; L), \delta) \xrightarrow{\nu^*} (C^*(N; L), \delta) \xrightarrow{\kappa^*} (K^*, \delta) \to 0.$$

L'homologie de (K^*, δ) est, par définition, la cohomologie relative de (Q, N) à coefficients dans le Q-module L. Plus précisément on pose (noter le décalage d'indice)

$$H^{n+1}(Q, N; L) = \mathrm{Ker}(K^n \to K^{n+1})/\mathrm{Im}(K^{n-1} \to K^n).$$

Avec cette notation la longue suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte de complexes ci-dessus prend la forme habituelle:

$$\cdots \to H^n(Q; L) \xrightarrow{\nu^*} H^n(N; L) \xrightarrow{\kappa^*} H^{n+1}(Q, N; L) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(Q; L) \xrightarrow{\nu^*} H^{n+1}(N; L) \to \cdots.$$

On définit de manière analogue les groupes d'homologie $H_n(Q, N; L)$. Lorsque L est le Q-module trivial $\mathbb{Z}$ on notera $H^n(Q)$ (resp. $H^n(Q, N)$, $H_n(Q)$, $H_n(Q, N)$) au lieu de $H^n(Q; \mathbb{Z})$ (resp. $H^n(Q, N; \mathbb{Z})$), $H_n(Q; \mathbb{Z})$, $H_n(Q, N; \mathbb{Z})$).

Voici maintenant quelques préliminaires à la définition de la classe caractéristique d'une extension relative. Soit $\varphi: Q \to N$ une section ensembliste de ν, normalisée par $\varphi(1) = 1$, soit

$$\nu\varphi(x) = x, \qquad x \in Q. \tag{1}$$

Il est clair que pour tous $x, y \in Q$ on a $\nu(\varphi(x)\,\varphi(y)) = \nu\varphi(xy)$. Par conséquent on peut trouver une application $f: Q \times Q \to M$, normalisée par $f(x, 1) = f(1, x) = 1$ et vérifiant

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \mu f(x, y)\,\varphi(xy), \qquad x, y \in Q. \tag{2}$$

Puisque $\nu\varphi\nu(n) = \nu(n)$ pour tout $n \in N$, on peut trouver une application $\psi\colon N \to M$, normalisée par $\psi(1) = 1$ et telle que

$$\mu\psi(n)\,\varphi\nu(n) = n, \qquad n \in N. \tag{3}$$

LEMME 1. *Il existe une unique 2-cochaîne normalisée $g \in C^2(N; L)$ telle que*

$$(\eta(n) \cdot \psi(n'))\,\psi(n)\,f(\nu n, \nu n') = \lambda g(n, n')\,\psi(nn'). \tag{*}$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité

$$\mu[(\eta(n) \cdot \psi(n'))\,\psi(n)\,f(\nu n, \nu n')] = \mu[\psi(nn')].$$

On pose $\bar{n} = (\varphi\nu(n))^{-1}$. La relation (3) s'écrit alors $\mu\psi(n) = n\bar{n}$ et la condition (i) implique $\mu(\eta(n) \cdot \psi(n')) = n\mu\psi(n')\,n^{-1} = nn'\bar{n}'n^{-1}$. On en déduit, en utilisant (2),

$$\mu[(\eta(n) \cdot \psi(n'))\,\psi(n)\,f(\nu n, \nu n')] = nn'\bar{n}'n^{-1}n\bar{n}\bar{n}^{-1}\bar{n}'^{-1}\overline{nn}' = nm'\overline{nn}' = \mu\psi(nn'). \qquad \blacksquare$$

PROPOSITION 1 ET DEFINITION. *L'image $\kappa^*g \in K^2$ de la cochaîne g est un cocycle dont la classe de cohomologie $[\kappa^*g] \in H^3(Q, N; L)$ ne dépend que de la classe de congruence de l'extention relative (M, μ). La classe de cohomologie $[\kappa^*g]$ sera appelée la "classe caractéristique" de l'extention relative (M, μ) et notée $\xi(M, \mu)$.*

Avant de passer à la démonstration de cette proposition nous allons montrer un lemme sur l'invariant de MacLane $\xi^{ML}(M, \mu) \in H^3(Q; L)$ d'une extension relative (M, μ) (cf. [6, section 12]). Cet invariant est la classe de cohomologie du 3-cocycle $k \in C^3(Q; L)$ défini par la formule

$$f(x, y)\,f(xy, z) = \lambda k(x, y, z)\,(\eta(\varphi x) \cdot f(y, z))\,f(x, yz), \qquad x, y, z \in Q.$$

LEMME 2. *On a l'égalité $\delta g = \nu^*k$ dans $C^3(N; L)$.*

Démonstration. L'élément $\lambda\delta g$ est donné par la formule

$$\lambda g(u, v)\,\lambda g(uv, w) = \lambda\delta g(u, v, w)\,\lambda(\eta(u) \cdot g(v, w)\,\lambda g(u, vw), \qquad u, v, w \in N.$$

On réécrit cette relation en utilisant la définition de λg, i.e., la formule (*), et la relation

$$(\eta(n) \cdot \psi(n'))\,\psi(n) = \psi(n)\,(\eta(\varphi\nu n) \cdot \psi(n')), \qquad n, n' \in N,$$

qui est une conséquence de la condition (ii). De plus, pour simplifier l'écriture, on pose ${}^{n}m = \eta(n) \cdot m$, $n \in N$, $m \in M$. On a alors

$$\begin{aligned}&{}^{u}\psi(v)\,\psi(u)\,f(\nu u, \nu v)\,\psi(uv)^{-1}\,\psi(uv)\,{}^{\varphi\nu(uv)}\psi(w)\,f(\nu(uv), \nu w)\,\psi(uvw)^{-1}\\ &= \lambda\delta g(u, v, w)\,{}^{u}[\psi(v)\,{}^{\varphi\nu(v)}\psi(w)\,f(\nu v, \nu w)\,\psi(vw)^{-1}]\,{}^{u}\psi(vw)\,\psi(u)\,f(\nu u, \nu w)\,\psi(uvw)^{-1}.\end{aligned}$$

Après simplification, on remplace ${}^{u}m$ par $\psi(u)\,{}^{\varphi\nu(u)}m\psi(u)^{-1}$, ce qui est possible vues la relation (3) et la condition (ii); soit

$$\begin{aligned}&\psi(u)\,f(\nu u, \nu v)\,{}^{\varphi\nu(uv)}\psi(w)\,f(\nu(uv), \nu w)\\&\quad = \lambda\delta g(u, v, w)\,\psi(u)\,[{}^{\varphi\nu(u)\varphi\nu(v)}\psi(w)\,{}^{\varphi\nu(u)}f(\nu v, \nu w)]\,\psi(u)^{-1}\,\psi(u)\,f(\nu u, \nu(vw)).\end{aligned}$$

Après simplification, on utilise la relation (2) et la condition (ii) pour remplacer ${}^{\varphi\nu(u)\varphi\nu(v)}\psi(w)$ par $f(\nu u, \nu v)\,{}^{\varphi\nu(uv)}\psi(w)\,f(\nu u, \nu v)^{-1}$, soit

$$\begin{aligned}&f(\nu u, \nu v)\,{}^{\varphi\nu(uv)}\psi(w)\,f(\nu(uv), \nu w)\\&\quad = \lambda\delta g(u, v, w)\,f(\nu u, \nu v)\,{}^{\varphi\nu(uv)}\psi(w)\,f(\nu u, \nu v)^{-1}\,{}^{\varphi\nu(u)}f(\nu v, \nu w)\,f(\nu u, \nu(vw)).\end{aligned}$$

D'où, après simplification, on trouve

$$f(\nu u, \nu v)\,f(\nu(uv), \nu w) = \lambda\delta g(u, v, w)\,{}^{\varphi\nu(u)}f(\nu v, \nu w)\,f(\nu u, \nu(vw)),$$

c'est-à-dire $\nu^*k = \delta g$. ∎

Démonstration de la proposition 1. D'après le lemme 2 la cochaîne κ^*g est un cocycle car $\delta\kappa^*g = \kappa^*\delta g = \kappa^*\nu^*k = 0$. Les lemmes 3, 4 et 5 ci-dessous montrent que $[\kappa^*g]$ est indépendant du choix de f, ψ, et φ intervenu dans la définition de g.

LEMME 3. *Étant donnés φ et ψ, une modification du choix de f n'affecte pas κ^*g.*

Démonstration. Soit f' une application normalisée vérifiant (2). Il existe une application $h: Q \times Q \to L$ telle que $f'(-, -) = f(-, -)\,\lambda h(-, -)$. Si g' désigne la 2-cochaîne associée à f', on a la relation $g' = g + \nu^*h$, d'où

$$\kappa^*g' = \kappa^*g + \kappa^*\nu^*h = \kappa^*g. \qquad ∎$$

LEMME 4. *Étant donnés φ et f, une modification du choix de ψ modifie κ^*g par l'addition d'un cobord.*

Démonstration. Soit $\psi': N \to M$ une application normalisée vérifiant (3). Il existe alors une application $\theta: N \to L$ telle que $\psi'(-) = \psi(-)\,\lambda\theta(-)$. Si g' désigne la 2-cochaîne associée à ψ' on vérifie aisément que $g' = g + \delta\theta$ et par suite

$$\kappa^*g' = \kappa^*g + \delta(\kappa^*\theta). \qquad ∎$$

LEMME 5. *Toute modification du choix de φ peut être suivie d'une modification du choix de f et de ψ de telle manière que la 2-cochaîne g reste inchangée.*

Démonstration. Soit $\varphi': Q \to N$ une application normalisée vérifiant (1).

Il existe alors une application $q: Q \to M$ telle que $\varphi'(-) = \mu q(-)\,\varphi(-)$. On pose

$$f'(x, y) = q(x)\,(\eta(\varphi x) \cdot q(y))\, f(x, y)\, q(xy)^{-1}, \qquad x, y \in Q,$$

et

$$\psi'(n) = \psi(n)\, q\nu(n)^{-1}, \qquad n \in N.$$

Notons g' la 2-cochaîne associée à (φ', f', ψ') et calculons $g'(n, n')$ en utilisant les notations ${}^{n}m = \eta(n) \cdot m$, $n \in N$, $m \in M$ et $\hat{n} = q\nu(n)$, $n \in N$. Par définition on a $\psi'(n)\, {}^{\varphi'\nu(n)}\psi'(n')\, f'(\nu n, \nu n') = \lambda g'(n, n')\, \psi'(nn')$, soit $\psi(n)\, \hat{n}^{-1}\, {}^{\mu(\hat{n})\varphi\nu(n)}[\psi(n')\, \hat{n}'^{-1}] \times \hat{n}\, {}^{\varphi\nu(n)}\hat{n}' f(\nu n, \nu n')\, \widehat{nn}'^{-1} = \lambda g'(n, n')\, \psi(nn')\, \widehat{nn}'^{-1}$. Après simplification on utilise la condition (ii):

$$\psi(n)\, \hat{n}^{-1}\hat{n}[{}^{\varphi\nu(n)}\psi(n')\, {}^{\varphi\nu(n)}\hat{n}'^{-1}]\, \hat{n}^{-1}\hat{n}\, {}^{\varphi\nu(n)}\hat{n}' f(\nu n, \nu n') = \lambda g'(n, n')\, \psi(nn').$$

Soit finalement

$$\psi(n)\, {}^{\varphi\nu(n)}\psi(n')\, f(\nu n, \nu n') = \lambda g'(n, n')\, \psi(nn'),$$

d'où $\lambda g' = \lambda g$. ▮

Pour terminer la démonstration de la proposition 1, il nous reste à voir que deux extensions relatives congruentes ont même classe caractéristique. Soit $\alpha: M \to M'$ l'isomorphisme définissant la congruence entre (M, μ) et (M', μ'). Si φ, f, et ψ sont les choix faits pour définir la 2-cochaîne g, on peut prendre $\varphi' = \varphi$, $f' = \alpha f$, $\psi' = \alpha\psi$ pour définir g'. Il est alors clair que $g' = g$. ▮

En conclusion la classe caractéristique définit une application $\xi: \mathscr{E}xt(Q, N; L) \to H^3(Q, N; L)$.

PROPOSITION 2. *L'image de* $\xi(M, \mu)$ *par* $\delta^*: H^3(Q, N; L) \to H^3(Q; L)$ *est l'invariant de Maclane* $\xi^{ML}(M, \mu)$.

Démonstration. Le lemme 2 implique que k est un cocycle. En effet on a $\nu^*\delta k = \delta\nu^* k = \delta\delta g = 0$. Un cocycle représentant $\delta^*[\kappa^* g]$ est obtenu en relevant $\kappa^* g$ dans $C^3(N; L)$ puis en appliquant $(\nu^*)^{-1}\,\delta$. Or en choisissant g comme relevé on trouve précisément k d'après le lemme 2; d'où la proposition 2. ▮

2. Classification des extensions relatives

Après avoir étudié la fonctorialité de $\mathscr{E}xt(Q, N; L)$ on le munit d'une structure de groupe, puis on montre que ξ est un isomorphisme. On termine par une interprétation topologique.

Soient (M, μ) une extension relative de (Q, N) et $\varphi_L: L \to L'$ un homomorphisme de Q-modules. On construit une extension relative (M', μ') de (Q, N) par

L' telle que $\varphi_{L*}(\xi(M, \mu)) = \xi(M', \mu')$ de la manière suivante. On pose $M' = L' \times M/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $(\varphi_L(l), 1) \sim (0, \lambda l)$, $l \in L$. L'action de N sur M' est donnée par $\eta'(n) \cdot (l', m) = ((\nu n) \cdot l', \eta(n) \cdot m)$ et on pose $\mu'(l', m) = \mu(m)$. Cette construction définit une application $\varphi_{L\#}: \mathscr{E}xt(Q, N; L) \to \mathscr{E}xt(Q, N; L')$ sur les classes de congruences. Remarquons que l'application $M \to M'$, $m \mapsto (0, m)$ définit un morphisme d'extensions relatives de (M, μ) dans (M', μ').

Soient (M, μ) une extension relative de (Q, N) et φ_N, φ_Q deux homomorphismes rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\varphi_N"'] & Q' \arrow[d, "\varphi_Q"] \\ N \arrow[r, "\nu"] & Q. \end{tikzcd}$$

On construit une extension relative (M', μ') de (Q', N') par L telle que $(\varphi_Q, \varphi_N)^* (\xi(M, \mu)) = \xi(M', \mu')$ de la manière suivante. Le groupe M' est le produit fibré de M et $\operatorname{Ker} \nu'$ au-dessus de $\operatorname{Ker} \nu$, l'application μ' est évidente. Le groupe N' opère sur lui-même ainsi que sur N et M via φ_N, donc il opère sur M'. L'extension relative (M', μ') a pour noyau L muni de la structure de Q'-module déduite de sa structure de Q-module via φ_Q. Cette construction définit une application $(\varphi_Q, \varphi_N)^\#: \mathscr{E}xt(Q, N; L) \to \mathscr{E}xt(Q', N'; L)$.

Soit (M, μ) (resp. (M', μ')) une extension relative de (Q, N) (resp. (Q', N')). Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_L"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_M"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_N"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_Q"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

les homomorphismes φ_M et φ_N sont compatibles avec les actions de N et N', i.e.,

$$\varphi_M(\eta(n) \cdot m) = \eta'(\varphi_N(n)) \cdot \varphi_M(m), \qquad n \in N, \quad m \in M.$$

PROPOSITION 3. *On a* $\varphi_{L*}(\xi(M, \mu)) = (\varphi_N, \varphi_Q)^* (\xi(M', \mu')) \in H^3(Q, N; L)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $\varphi_{L\#} = (\varphi_Q, \varphi_N)^\#$. ∎

Soient (M_0, μ_0) et (M_1, μ_1) deux extensions relatives de (Q, N). On définit leur somme de Baer (M, μ) par $(M, \mu) = s_\#(\Delta_Q, \Delta_N)^\# (M_0 \times M_1, \mu_0 \times \mu_1)$ où Δ_Q et Δ_N sont les applications diagonales et $s: L \times L \to L$ l'addition. Il est immédiat de vérifier que la somme de Baer munit $\mathscr{E}xt(Q, N; L)$ d'une structure de groupe abélien et que $\xi: \mathscr{E}xt(Q, N; L) \to H^3(Q, N; L)$ est un homomorphisme de groupes.

Remarque. L'extension relative (M, μ) est triviale, i.e., représente l'élément neutre de $\mathscr{E}x\ell(Q, N; L)$, si et seulement si l'application $M \to \operatorname{Ker} \nu$ admet une section N-équivariante.

Dans la suite de la section on notera $V = \operatorname{Ker} \nu$.

THÉORÈME 1. *Le groupe $\mathscr{E}x\ell(Q, N; L)$ des classes de congruences d'extensions relatives de (Q, N) par le Q-module L est isomorphe au groupe de cohomologie relative $H^3(Q, N; L)$.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'homomorphisme

$$\xi\colon \mathscr{E}x\ell(Q, N; L) \to H^3(Q, N; L) \qquad \text{est injectif et surjectif.}$$

Montrons tout d'abord l'injectivité. Soit (M, μ) une extension relative et g la 2-cochaîne de N construite dans la section précédente, dont on adopte les notations. On suppose $\xi(M, \mu) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in C^1(N; L)$ et $a \in C^2(Q; L)$ tels que $g = \delta b + \nu^* a$. Posons $s(n) = \psi(n)\, \lambda b(n)^{-1} \in M$ pour tout $n \in N$. On va montrer que s restreint à V est une section N-équivariante, d'où $(M, \mu) = 0$ dans $\mathscr{E}x\ell(Q, N; L)$. Appliquons la formule (*) au couple $(v, v') \in V^2$. On trouve

$$\psi(v)\, \psi(v') = \lambda(b(v') - b(vv') + b(v))\, \psi(vv'), \qquad \text{soit} \qquad s(vv') = s(v)\, s(v').$$

Ainsi, la restriction de s à V est un homomorphisme. Appliquons la formule (*) au couple (n, v), puis au couple $({}^n v, n)$ où $n \in N$ et $v \in V$. On trouve $(\eta(n) \cdot s(v))\, s(n) = s(nv)$, puis $s({}^n v)\, s(n) = s(nv)$. Soit finalement $\eta(n) \cdot s(v) = s({}^n v)$. Ainsi la restriction de s à V est N-équivariante. Enfin on a $\mu s\,|_V = id_V$ car $\mu s(v) = \mu\psi(v)\, \mu\lambda b(v)^{-1} = v$. En définitive on a démontré que la restriction de s à V est une section N-équivariante.

Montrons la surjectivité de ξ. Soit $g \in C^2(N; L)$ tel que $\kappa^* g$ soit un cocycle. Nous allons construire une extension relative (M, μ) de (Q, N) par L telle que $\xi(M, \mu) = [\kappa^* g]$. L'hypothèse $\kappa^* g$ est un cocycle est équivalente à l'existence de $k \in C^3(Q; L)$ tel que $\delta g = \nu^* k$. On utilisera cette propriété sous la forme suivante: si l'un des éléments n, n', n'' de N appartient à V alors $(\delta g)(n, n', n'') = 0$. L'image de g dans $C^2(V, L)$ est un 2-cocycle qui définit une extension M de V par L. On note (l, v) un élément de M avec $l \in L$, $v \in V$, on a donc $(l, v)\,(l', v') = (l + l' + g(v, v'), vv')$ et $\mu(l, v) = v$. On définit l'action η de N sur M en posant $\eta(n) \cdot (l, v) = ((\nu n) \cdot l + g(n, v) - g({}^n v, n), {}^n v)$.

LEMME 6. *Le couple (M, μ) est une extension relative de (Q, N) par L.*

Démonstration. Montrons que $\eta(n)$ est un homomorphisme de groupes. Il suffit de vérifier que $\eta(n) \cdot (0, v)\, \eta(n)\, (0, v') = \eta(n) \cdot (g(v, v'), vv')$ ou encore que

$g(n, v) - g({}^nv, n) + g(n, v') - g({}^nv', n) + g({}^nv, {}^nv') = (\nu n) \cdot g(v, v') + g(n, vv') - g({}^n(vv'), n)$. Or ceci résulte de l'égalité

$$-(\delta g)(n, v, v') + (\delta g)({}^nv, n, v') - (\delta g)({}^nv, {}^nv', n) = 0.$$

Montrons que l'application $n \mapsto \eta(n)$ est un homomorphisme de groupes. Il suffit de vérifier que $\eta(nn') \cdot (0, v) = \eta(n) \cdot (\eta(n') \cdot (0, v))$ ou encore que $g(nn', v) - g({}^{nn'}v, nn') = (\nu n) \cdot g(n', v) - (\nu n) \cdot g({}^{n'}v, n') + g(n, {}^{n'}v) - g({}^{nn'}v, nn')$. Or ceci résulte de l'égalité $(\delta g)(n, n', v) - (\delta g)(n, {}^{n'}v, n') + (\delta g)({}^{nn'}v, n, n') = 0$. Il est trivial que la condition (i) des extensions relatives est satisfaite. Pour la condition (ii) il suffit de montrer que $(l, v)(l', v') = (\eta(v) \cdot (l', v'))(l, v)$, ou encore que $l + l' + g(v, v') = l' + g(v, v') - g({}^vv', v) + l + g({}^vv', v)$, ce qui est évident. ∎

Fin de la démonstration du théorème 1. Nous allons maintenant montrer que l'invariant relatif de (M, μ) est la classe de cohomologie $[\kappa^*g]$ dont on est parti. Ceci montrera la surjectivité de ξ.

Soit φ une section ensembliste (normalisée) de ν. Posons $\psi(n) = (g(n, \bar{n}), n\bar{n}) \in M$, avec $n \in N$ et $\bar{n} = \varphi\nu(n)^{-1}$ et

$$f(\nu n, \nu n') = (\nu(nn') \cdot g(\bar{n}^{-1}, \bar{n}^{-1}) + \nu(nn') \cdot g(\bar{n}^{-1}\bar{n}'^{-1}, \bar{n}\bar{n}'\overline{nn'}^{-1}), \bar{n}^{-1}\bar{n}'^{-1}\overline{nn'}).$$

Appelons g' la 2 cochaîne de N définie par φ, ψ et f grâce à la formule (*). On constate alors que

$$(g' - g)(n, n') = -(\delta g)(n, n'\bar{n}') + (\delta g)(nn', \bar{n}', \bar{n}) + (\delta g)(nn', \bar{n}'\bar{n}, \bar{n}^{-1}\bar{n}'^{-1}\overline{nn}') - (\delta g)({}^n(n'\bar{n}'), n, \bar{n}).$$

Puisque $\delta g = \nu^*k$ on a $\kappa^*\delta g = \kappa^*\nu^*k = 0$ d'où $\kappa^*g = \kappa^*g'$. ∎

Voici une interprétation topologique de la classification des extensions relatives. Soit $p: E \to B$ une application continue entre espaces topologiques telle que $\pi_iE = 0$ si $i \neq 1$ et $\pi_i(B, E) = 0$ si $i \neq 2$. La longue suite exacte d'homotopie associée à p se réduit alors à

$$\mathscr{E}(p): 1 \to \pi_2B \to \pi_2(B, E) \to \pi_1(E) \to \pi_1B \to 1.$$

Il est bien connu [12] que π_1E opère sur le groupe d'homotopie relatif $\pi_2(B, E)$ et que les conditions (i) et (ii) des extensions relatives sont remplies. La classe caractéristique de cette extension relative est alors un élément $\xi(\mathscr{E}(p))$ de $H^3(\pi_1B, \pi_1E; \pi_2B)$.

L'espace B est l'espace total d'un fibré de base $K(\pi_1B, 1)$ et de fibre $K(\pi_2B, 2)$, où $K(G, n)$ désigne un espace d'Eilenberg–MacLane de type (G, n). Ce fibré est en fait la décomposition de Postnikov de B puisque B n'a que deux groupes d'homotopie non nuls. L'image inverse Z de ce fibré au-dessus de E est trivialisée grâce à l'application p.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr] \arrow[d] & & B \arrow[d] \\ E \approx K(\pi_1 E, 1) \arrow[rr] \arrow[urr, dashed, "p"] & & K(\pi_1 B, 1). \end{tikzcd}$$

En résumé, on a un fibré au-dessus de $K(\pi_1 B, 1)$ trivialisé au-dessus de $K(\pi_1 E, 1)$, la théorie classique des obstructions classifie une telle situation par un invariant $\xi(p) \in H^3(K(\pi_1 B, 1), K(\pi_1 E, 1); \pi_2 B)$. On a alors la

PROPOSITION 4. *L'isomorphisme canonique*

$$H^3(K(\pi_1 B, 1), K(\pi_1 E, 1); \pi_2 B) \xrightarrow{\simeq} H^3(\pi_1 B, \pi_1 E; \pi_2 B)$$

identifie l'invariant $\xi(p)$ *à la classe caractéristique* $\xi(\mathscr{E}(p))$.

COROLLAIRE. *L'invariant de Postnikov* (k^3*-invariant*) *de l'espace B s'identifie à l'invariant de MacLane de l'extension relative* $\mathscr{E}(p)$.

Le corollaire a déjà été démontré par Hill [3] dans le cas où $\pi_2(B)$ est exactement le centre de $\pi_2(B, E)$. La démonstration de la proposition est similaire et laissée au lecteur. ∎

3. SUR LES EXTENSIONS RELATIVES CENTRALES UNIVERSELLES

DÉFINITIONS. Une extension relative de (Q, N) par L est dite *centrale* (on dira extension r.c.) si Q opère trivialement sur L. Une extension r.c. de (Q, N) est dite *universelle* s'il existe un et un seul morphisme de celle-ci dans chaque extension r.c. de (Q, N).

Soit G un N-groupe. Notons ${}^n g$ l'action de $n \in N$ sur $g \in G$. Le sous-groupe G'_N des N-commutateurs de G est engendré par les éléments ${}^n g g' g^{-1} g'^{-1}$, $n \in N$, $g, g' \in G$.

DÉFINITION. Le N-groupe G est dit N-parfait si $G = G'_N$.

LEMME 7. *Pour tout épimorphisme* $\nu: N \to Q$ *de noyau* V *on a*

$$H_2(Q, N) = H_0(N; H_1(V)) = V/V'_N.$$

Démonstration. Il est clair que

$$H_0(N; H_1(V)) = \mathbb{Z} \underset{N}{\otimes} H_1(V) = V/V'_N.$$

De la suite spectrale homologique de l'extension $1 \to V \to N \to Q \to 1$ on extrait la suite exacte

$$H_2(N) \to H_2(Q) \to H_0(N; H_1(V)) \to H_1(N) \to H_1(Q)$$

qui s'identifie à la suite exacte d'homologie de (Q, N) en basses dimensions, d'où

$$H_0(N; H_1(V)) = H_2(Q, N). \qquad \blacksquare$$

THÉORÈME 2. *Il existe une extension* r.c. *universelle de* (Q, N) *si et seulement si* $H_2(Q, N) = 0$, *i.e., ssi* V *est* N*-parfait. Le noyau de cette extension* r.c. *universelle est* $H_3(Q, N)$.

Le principe de la démonstration est le même que dans le cas absolu (cf. [4, lemme 2] ou [8, théorème 5.7]).

Soit G un N-groupe. Soient (X, φ) et (Y, ψ) deux extensions centrales N-équivariantes de G. On suppose que N opère trivialement sur Ker φ et Ker ψ.

LEMME 8. *Si* Y *est* N*-parfait il existe au plus un homomorphisme* N*-équivariant de* Y *dans* X *au-dessus de* G.

Démonstration. Soient f_1 et f_2 deux homomorphismes N-équivariants de Y dans X au-dessus de G. Alors pour tous y et z dans Y et tout n dans N on peut écrire

$$f_1(y) = f_2(y)\, c, \qquad f_1({}^n y) = f_2({}^n y)\, c, \qquad f_1(z) = f_2(z)\, c',$$

où les éléments c et c' appartiennent au noyau de φ et donc au centre de X. On en déduit

$$f_1({}^n y z y^{-1} z^{-1}) = f_2({}^n y z y^{-1} z^{-1}).$$

Puisque Y est engendré par des N-commutateurs ceci montre que $f_1 = f_2$. $\blacksquare$

Soit (M, μ) une extension r.c. de (Q, N).

LEMME 9. *Si le groupe* M *n'est pas* N*-parfait, alors pour un choix adéquate d'une extension* r.c. (M', μ') *de* (Q, N) *il existe au moins deux morphismes d'extensions* r.c. *de* (M, μ) *dans* (M', μ').

Démonstration. Soit h la projection de M sur $A = M/M'_N$. Le groupe N opère trivialement sur A et $(M', \mu') = (A \times V, (a, v) \mapsto v)$ est une extension r.c. triviale de (Q, N). On pose

$$f_1(m) = (h(m), \mu(m)), \qquad f_2(m) = (1, \mu(m)), \qquad m \in M.$$

Ce sont deux homomorphismes de (M, μ) dans (M', μ'). Si M n'est pas N-parfait, c'est-à-dire $A \neq 0$, ils sont distincts. ▮

Démonstration du théorème 2. Soit $(U, \bar{\mu})$ une extension r.c. universelle de (Q, N). D'après le lemme 9 le groupe U est N-parfait. Puisque $\bar{\mu}: U \to V$ est surjectif et N-équivariant, V est N-parfait.

Posons $C = H_3(Q, N)$. Puisque $H_2(Q, N) = 0$ on a, par la formule de Künneth,

$$H^3(Q, N; C) = \mathrm{Hom}(H_3(Q, N), C) = \mathrm{Hom}(C, C).$$

D'après le théorème 1 il existe une extension r.c. de (Q, N) par C dont la classe caractéristique est id_C. Nous allons montrer que cette extension r.c., que nous noterons $(U, \bar{\mu})$, est universelle.

Soit (M, μ) une extension r.c. de (Q, N) par L. L'isomorphisme $H^3(Q, N; L) \simeq \mathrm{Hom}(C, L)$ associe à $\xi(M, \mu)$ un homomorphisme $\alpha: C \to L$. L'image de $(U, \bar{\mu})$ par $\alpha_{\#}: \mathscr{E}xt(Q, N; C) \to \mathscr{E}xt(Q, N; L)$ est une extension r.c. qui a pour classe caractéristique $\alpha_* id_C = \alpha$. Donc $\alpha_{\#}(U, \bar{\mu})$ est congruente à (M, μ). D'autre part on a vu au début de la Section 2 qu'il y a un morphisme naturel de $(U, \bar{\mu})$ dans $\alpha_{\#}(U, \bar{\mu})$. Ainsi on a défini un morphisme de $(U, \bar{\mu})$ dans (M, μ). Ce morphisme est unique d'après le lemme 8. ▮

Comme dans [8] on peut construire l'extension r.c. universelle à partir d'une présentation (N-équivariante) de V. Voici tout d'abord l'analogue du lemme 5.6 de [8].

LEMME 10. *Si (X, φ) est une extension centrale N-équivariante d'un groupe N-parfait P, telle que N opère trivialement sur* Ker φ, *alors le sousgroupe X'_N est N-parfait et s'envoie surjectivement sur P.*

Démonstration. Puisque P est engendré par les N-commutateurs, il est clair que X'_N s'envoie surjectivement sur P. Ainsi tout élément x de X peut s'écrire $x'c$ avec $x' \in X'_N$ et c central. Par conséquent tout générateur ${}^n x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$ de X'_N est égal à ${}^n x'_1 c_1 x'_2 c_2 x'^{-1}_1 c_1^{-1} x'^{-1}_2 c_2^{-1} = {}^n x'_1 x'_2 x'^{-1}_1 x'^{-1}_2$, car N opère trivialement sur Ker φ. Ainsi nous avons $X'_N = (X'_N)'_N$. ▮

Soit S un sous-ensemble de $V = \mathrm{Ker}\, \nu$ qui engendre V en tant que N-groupe. On note F le groupe libre ayant un générateur $\langle n, s\rangle$ pour toute paire $(n, s) \in N \times S$. Le groupe N opère sur F par ${}^{n'}\langle n, s\rangle = \langle n'n, s\rangle$. L'épimorphisme

$p\colon F \to V$, $p\langle n, s\rangle = nsn^{-1}$ est N-équivariant. On note $R = \operatorname{Ker} p$. Soit $[R, F]_{N,p}$ le sous-groupe de F engendré par les éléments de la forme

$$^{n}rr^{-1} \quad \text{et} \quad {}^{p(f)}f'ff'^{-1}f^{-1}, \qquad n \in N, \quad r \in R, \quad f, f' \in F.$$

C'est un sous-groupe distingué de F, stable par N, dont l'image par p est triviale. On note p' l'homomorphisme composé

$$F/[R, F]_{N,p} \to V \to N.$$

Montrons que $(F/[R, F]_{N,p}, p')$ est une extension r.c. de (Q, N). Puisque p est N-équivariante et $[R, F]_{N,p}$ N-stable, l'application p' est N-équivariante. La condition (i) des extensions relatives est donc remplie. Il en est de même de la condition (ii) puisque l'on a ${}^{p(f)}f' = ff'f^{-1}$ modulo $[R, F]_{N,p}$. Enfin le groupe N opère trivialement sur $\operatorname{Ker} p'$, qui est un quotient de R, puisque ${}^{n}r = r$ modulo $[R, F]_{N,p}$.

Supposons maintenant que V soit N-parfait et posons $U = (F/[R, F]_{N,p})'_N$ et $\bar{\mu}$ = restriction de p' à U. D'après le lemme 10 l'image de $\bar{\mu}$ est V et le groupe U est N-parfait.

Soit (M, μ) une extension r.c. quelconque de (Q, N). Pour tout $s \in S \subset V$ on choisit $m_s \in M$ tel que $\mu(m_s) = s$. On pose $\alpha\colon F \to M$, $\alpha\langle n, s\rangle = \eta(n) \cdot m_s$. Puisque (M, μ) est une extension r.c. on a $\alpha([R, F]_{N,p}) = 1$. Ainsi α induit un homomorphisme N-équivariant de $F/[R, F]_{N,p}$ dans M au-dessus de V. Sa restriction à U fournit un morphisme d'extensions r.c. de $(U, \bar{\mu})$ dans (M, μ). L'unicité de ce morphisme résulte du lemme 8. On a donc montré la

PROPOSITION 5. *L'extension* r.c. $((F/[R, F]_{N,p})'_N, \bar{\mu})$ *de* (Q, N) *est universelle.* ▮

Voici maintenant une caractérisation de l'extension r.c. universelle.

THÉORÈME 3. *L'extension* r.c. $(U, \bar{\mu})$ *de* (Q, N) *est universelle si et seulement si* U *est* N*-parfait et toute extension* N*-équivariante* (K, φ) *de* U*, telle que* $(K, \bar{\mu}\varphi)$ *soit une extension* r.c. *de* (Q, N)*, admet une section* N*-équivariante.*

Démonstration. Supposons que $(U, \bar{\mu})$ soit universelle. Alors d'après le lemme 9 le groupe U est N-parfait. L'universalité de U implique l'existence d'un homomorphisme N-équivariant $\theta\colon U \to K$ au-dessus de N. Le composé $\varphi\theta\colon U \to U$ définit un morphisme de $(U, \bar{\mu})$ dans elle-même qui ne peut être que l'identité. Donc θ définit une section N-équivariante de φ.

Démontrons la réciproque. Soit (M, μ) une extension r.c. de (Q, N). L'extension (K, φ) de U est définie par le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & M \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ U & \xrightarrow{\bar{\mu}} & N. \end{array}$$

Faisons opérer N sur $K = U \times_N M$ par ${}^n(u, m) = ({}^nu, {}^nm)$. Ainsi $\bar{\mu}\varphi$ est N-équivariant. Montrons que la condition (ii) des extensions relatives est aussi remplie. On a

$$
\begin{aligned}
{}^{\bar{\mu}\varphi(u,m)}(u', m') &= ({}^{\bar{\mu}\varphi(u,m)}u', {}^{\bar{\mu}\varphi(u,m)}m') = ({}^{\bar{\mu}(u)}u', {}^{\mu(m)}m') \\
&= (uu'u^{-1}, mm'm^{-1}) = (u, m)\,(u', m')\,(u, m)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Il reste à voir que N opère trivialement sur $\operatorname{Ker} \bar{\mu}\varphi = \{(u, m) \mid \bar{\mu}(u) = 1, \mu(m) = 1\}$. Ceci résulte du fait que N opère trivialement sur $\operatorname{Ker} \mu$ et sur $\operatorname{Ker} \bar{\mu}$. Ainsi $(K, \bar{\mu}\varphi)$ est une extension r.c. et il existe une section N-équivariante $\theta\colon U \to K$ de φ. L'application composée $\bar{\varphi}\theta$ définit alors un morphisme d'extensions r.c. de $(U, \bar{\mu})$ dans (M, μ). L'unicité de ce morphisme résulte de l'hypothèse "U est N-parfait" et du lemme 8. ▮

Nous allons maintenant décrire une situation algébrique qu'on rencontre assez souvent en pratique et qui donne naissance à une extension r.c. universelle.

On considère la donnée de trois homomorphismes

$$
\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left=2, "d_0"] \arrow[r, shift right=2, "d_1"'] & N \arrow[l, "s"'] \end{tikzcd}
$$

tels que $d_0 s = d_1 s = id_N$.

On note $\nu\colon N \to Q$ le conoyau de (d_0, d_1), c'est-à-dire l'homomorphisme universel parmi les homomorphismes égalisant d_0 et d_1.

Le groupe N opère sur G par

$$
{}^ng = s(n)\,gs(n)^{-1}, \qquad n \in N, \quad g \in G.
$$

Notons $G_i = \operatorname{Ker} d_i$, $i = 0, 1$. Les groupes G_i sont globalement N-équivariants. A fortiori il en est de même pour $[G_0, G_1]$. On note encore d_1 la restriction de d_1 à G_0. Puisque $d_1([G_0, G_1]) = 1$, la restriction de d_1 à G_0 passe au quotient pour donner

$$
\mu\colon G_0/[G_0, G_1] \to N.
$$

Proposition 6. *La paire $(G_0/[G_0, G_1], \mu)$ est une extension relative de (Q, N). Elle est centrale lorsque $[s(N), G_0 \cap G_1] = 1$. Si, de plus, le groupe G est "super-parfait", i.e., $H_1(G) = H_2(G) = 0$, alors cette extension* r.c. *est universelle.*

Démonstration. Puisque ν est le conoyau de (d_0, d_1), on a $\operatorname{Coker}(G_0 \to N) = Q$. L'image de $[G_0, G_1]$ par d_1 étant triviale, la suite

$$
G_0/[G_0, G_1] \to N \to Q \to 1
$$

est exacte. L'application d_1, et donc aussi μ, est N-équivariante car

$$
d_1({}^ng) = d_1(s(n)\,gs(n)^{-1}) = nd_1(g)\,n^{-1}.
$$

La condition (i) des extensions relatives est ainsi remplie.

Notons $\sim$ la relation d'équivalence sur G_0 engendrée par la condition (ii) des extensions relatives, c'est-à-dire

$$^{d_1 g}h \sim ghg^{-1} \qquad \text{pour tout } g, h \in G_0 .$$

Nous allons montrer le

LEMME 11. *Le noyau C de $G_0 \to G_0/\sim$ est égal à $[G_0, G_1]$.*

Démonstration. L'application $g \mapsto \theta(g) = g^{-1}\, sd_1(g)$ définit une bijection de G_0 sur G_1. En effet on a

$$d_1\theta(g) = d_1(g)^{-1}\, d_1\, sd_1(g) = d_1(g)^{-1}\, d_1(g) = 1.$$

D'autre part on vérifie aisément que $k \mapsto sd_0(k)\, k^{-1}$, $k \in G_1$, est la bijection inverse de θ.

Le groupe C est engendré par les éléments de la forme

$$hg^{-1}(^{d_1 g}h)^{-1}\, g \qquad \text{où} \qquad h, g \in G_0 .$$

Or on a les identités

$$[h, \theta(g)] = hg^{-1}s\, d_1(g)\, h^{-1}s\, d_1(g)^{-1}\, g = hg^{-1}(^{d_1 g}h)^{-1}\, g,$$

et on remarque que $[h, \theta(g)] \in [G_0, G_1]$. Puisque θ est une bijection de G_0 sur G_1, on a bien $C = [G_0, G_1]$. ∎

Suite de la démonstration de la proposition 6. Ainsi, d'après le lemme précédent, μ satisfait à la condition (ii) des extensions relatives; ce qui prouve la première partie de la proposition.

La condition $[s(N), G_0 \cap G_1] = 1$ exprime que le groupe N opère trivialement sur $G_0 \cap G_1$. Donc N opère trivialement sur $\operatorname{Ker} \mu = (G_0 \cap G_1/[G_0, G_1]$, et l'extension relative est centrale.

Pour prouver l'universalité lorsque G est superparfait nous allons utiliser le théorème 3 qui donne une caractérisation des extensions r.c. universelles.

LEMME 12. *Si G est parfait les groupes G_0 et G_0/C sont N-parfaits.*

Démonstration. Le groupe G est isomorphe (canoniquement) au produit semi-direct $G_0 \times N$. Donc tout élément de G peut s'écrire $g = g_0 s(n)$ où $g_0 \in G_0$ et $n \in N$. Puisque G est parfait g est un produit de commutateurs; on en déduit que g peut s'écrire $g_0' s(n')$ où $g_0' \in (G_0)_N'$ et $n' \in [N, N]$. Supposons que $g \in G_0$, on a alors $d_0(g) = 1$ soit

$$d_0(g_0')\, d_0 s(n') = n' = 1.$$

Par conséquent $g_0 = g_0' \in (G_0)_N$ et on a ainsi prouvé que $G_0 = (G_0)_N'$. ∎

LEMME 13. *Supposons G superparfait. Soit (K, φ) une extension N-équivariante de G_0/C telle que $(K, \mu\varphi)$ soit une extension* r.c. *de (Q, N). Alors (K, φ) est N-scindée.*

Démonstration. Puisque $(K, \mu\varphi)$ est centrale, N opère trivialement sur Ker $\mu\varphi$ et donc sur Ker φ. D'autre part Ker $\mu\varphi$ appartient au centre de K donc Ker φ aussi.

Notons (J, ψ) l'extension de G_0 obtenue par relèvement de (K, φ) au-dessus de G_0

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & K \arrow[d, "\varphi"] \\ G_0 \arrow[r] & G_0/C. \end{tikzcd}$$

L'extension (J, ψ) est centrale et N opère trivialement sur Ker ψ. Il s'en suit que l'extension

$$\Psi\colon J \rtimes N \xrightarrow{(\psi, id)} G_0 \rtimes N \xrightarrow{\approx} G$$

est centrale. Onsait que toute extension centrale d'un groupe superparfait est scindée (cf. [4, 8]). Soit σ une section de Ψ:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\psi"] & J \rtimes N \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & G_0 \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift left, "\bar\sigma"] & G \arrow[r, shift left, "d_0"] \arrow[u, dashed, shift left, "\sigma"] & N \arrow[r] \arrow[l, dashed, shift left, "s"] & 1. \end{tikzcd}$$

Cette section commute aux projections sur N car $p\sigma = d_0\Psi\sigma = d_0$. Donc par restriction σ définit une section $\bar\sigma$ de ψ. Montrons que $\bar\sigma$ est N-équivariante. Pour tout $n \in N$ et $g \in G_0$ on a

$$\bar\sigma({}^n g) = \sigma(s(n)\, g s(n)^{-1}) = \sigma s(n)\, \sigma(g)\, \sigma s(n)^{-1}.$$

Les éléments $\sigma s(n)$ et $(1, n)$ de $J \rtimes N$ ont même image par Ψ car

$$\Psi\sigma s(n) = s(n) = \Psi(1, n).$$

Or l'extension $(J \rtimes N, \Psi)$ est centrale, donc $\sigma s(n)$ et $(1, n)$ ont même action par conjugaison sur $J \rtimes N$; d'où

$$\bar\sigma({}^n g) = (1, n)\, \sigma(g)\, (1, n)^{-1} = {}^n\bar\sigma(g).$$

Il nous reste, pour compléter la démonstration du lemme 13, à montrer que $\bar\sigma$

induit une section $\sigma'\colon G_0/C \to K$ de φ. Dans la figure ci-dessous les flèches pleines forment un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d, "\omega"'] & G_0 \arrow[l, dashed, bend right, "\bar{\sigma}"'] \arrow[d] \arrow[dr, "d_1"] & \\ K \arrow[r, "\varphi"] & G_0/C \arrow[r, "\mu"] & N. \end{tikzcd}$$

On va montrer que l'application composée $\omega\bar{\sigma}$ est triviale sur C. Pour celà il suffit de montrer que, pour tout $g,\, h \in G_0$ on a

$$\omega\bar{\sigma}({}^{d_1 g}h) = \omega\bar{\sigma}(ghg^{-1}).$$

Posons $k = \omega\bar{\sigma}(g)$ et $k' = \omega\bar{\sigma}(h)$. On remarque que

$$\mu\varphi(k) = \mu\varphi\omega\bar{\sigma}(g) = d_1\psi\bar{\sigma}(g) = d_1(g).$$

Par hypothèse $(K, \mu\varphi)$ est une extension relative de (Q, N), donc on a

$${}^{\mu\varphi(k)}k' = kk'k^{-1}.$$

Ce qui s'écrit encore

$${}^{d_1(g)}\omega\bar{\sigma}(h) = \omega\bar{\sigma}(g)\, \omega\bar{\sigma}(h)\, \omega\bar{\sigma}(g)^{-1}.$$

Puisque $\omega\bar{\sigma}$ est un homomorphisme de groupes N-équivariant, on a bien

$$\omega\bar{\sigma}({}^{d_1 g}h) = \omega\bar{\sigma}(ghg^{-1}). \qquad \blacksquare$$

Suite et fin de la démonstration de la proposition 6. Les conditions du théorème 3 sont alors remplies et l'extension r.c. $(G_0/[G_0\,,\, G_1], \mu)$ est universelle. $\blacksquare$

Remarques. (1) Pour tout groupe simplicial Π on peut poser $N = \Pi_0$, $G = \Pi_1$. Les opérateurs faces et dégénérescence en basse dimension fournissent d_0, d_1 et s.

(2) A partir d'une extension relative (M, μ) de (Q, N) on peut poser $G = M \rtimes N$, $d_0(m, n) = n$, $d_1(m, n) = \mu(m)\, n$ et $s(n) = (1, n)$. On a alors $C = 1$ et $(G/C, \mu) = (M, \mu)$. La proposition 6 nous dit alors qu'une condition suffisante pour que l'extension r.c. (M, μ) soit universelle est que $M \times N$ soit superparfait.

Exemples. Soit $N \to Q$ un épimorphisme entre groupes superparfaits. Le produit fibré $N \times_Q N$ est parfait, mais pas forcément superparfait. Par contre son extension centrale $G = \widetilde{N \times_Q N}$ est un groupe superparfait. Les compositions de $G \twoheadrightarrow N \times_Q N$ avec les deux projections sur N fournissent d_0 et d_1. L'application diagonale $\Delta: N \twoheadrightarrow N \times_Q N$ se relève de manière unique en $s: N \twoheadrightarrow G$. On est alors dans les conditions de la Proposition 6, ce qui permet de construire explicitement l'extension r.c. universelle de (Q, N).

Dans le case où Q est superparfait (i.e., $H_1(Q) = H_2(Q) = 0$) et N libre, on n'a plus $H_2(Q, N) = 0$. Néanmoins Conrad [1] a montré qu'il existait alors une extension relative "universelle à homotopie près." Deux morphismes d'extensions r.c. (f), (g): $(M, \mu) \twoheadrightarrow (M', \mu')$ sont dits homotopes s'il existe un homomorphisme $h: N \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} \mu'$ tel que $f(m) = g(m)\, h(\mu(m))$ pour tout $m \in M$. Cette extension r.c. universelle à homotopie près a pour classe caractéristique l'image de $id_{H_3(Q)}$ par les isomorphismes $\operatorname{Hom}(H_3(Q), H_3(Q)) \xrightarrow{\approx} H^3(Q, H_3(Q)) \xrightarrow{\approx} H^3(Q, N; H_3(Q))$. La proposition suivante donne un critère pour reconnaître cette extension r.c. universelle à homotopie près.

PROPOSITION 7. *Soit $\nu: N \twoheadrightarrow Q$ un épimorphisme avec N libre et Q superparfait. L'extension* r.c (M, μ) *de* (Q, N) *est universelle à homotopie près si* $\operatorname{Ker} \mu \subset M'_N$ *et toute extension N-équivariante (K, φ) de M, telle que $(K, \mu\varphi)$ soit une extension* r.c. *de (Q, N), admet une section N-équivariante.*

Démonstration. Soit $(U, \bar{\mu})$ l'extension r.c. de classe caractéristique $id_{H_3(Q)}$. La classe caractéristique $\xi(M, \mu) \in \operatorname{Hom}(H_3(Q), \operatorname{Ker} \mu)$ permet de construire un morphisme f de $(U, \bar{\mu})$ dans (M, μ). D'autre part l'hypothèse permet d'affirmer l'existence d'un morphisme g de (M, μ) dans $(U, \bar{\mu})$, voir démonstration du théorème 3. L'homomorphisme composé gf est homotope à l'identité de $(U, \bar{\mu})$ et est donc un isomorphisme. Alors f est un monomorphisme, ainsi que sa restriction f': $\operatorname{Ker} \bar{\mu} \to \operatorname{Ker} \mu$. Or, d'après [1, théorème 5], l'hypothèse $\operatorname{Ker} \mu \subset M'_N$ implique que f' est un épimorphisme. Ainsi f', et donc f, est un isomorphisme. On conclut en remarquant que toute extension r.c. isomorphe à une extension r.c. universelle à homotopie près est elle même universelle à homotopie près. ▮

4. Application à la K-théorie algébrique

Soit A un anneau. On note $GL(A)$ son groupe général linéaire et $St(A)$ son groupe de Steinberg. Ce dernier est engendré par les éléments x_{ij}^{λ}, i et j entiers >0 distincts, $\lambda \in A$, soumis aux relations

$$x_{ij}^{\lambda} x_{ij}^{\lambda'} = x_{ij}^{\lambda+\lambda'}, \tag{1}$$

$$x_{ij}^{\lambda} x_{kl}^{\lambda'} x_{ij}^{-\lambda} = x_{kl}^{\lambda'}, \qquad j \neq k, \quad i \neq l, \tag{2}$$

$$x_{ij}^{\lambda} x_{jk}^{\lambda'} x_{ij}^{-\lambda} = x_{ik}^{\lambda\lambda'} x_{jk}^{\lambda'}, \qquad i \neq k. \tag{3}$$

Notons que la relation (3) est équivalente à la relation

$$x_{ij}^{\lambda}x_{ki}^{\lambda'}x_{ij}^{-\lambda} = x_{kj}^{-\lambda'\lambda}x_{ki}^{\lambda'}, \qquad j \neq k. \tag{3'}$$

L'application φ_A: $St(A) \to GL(A)$ envoie le générateur x_{ij}^{λ} sur la matrice élémentaire e_{ij}^{λ}. L'image de φ_A est noté $E(A)$. Les groupes de K-théorie de A sont

$$K_1(A) = H_1(GL(A)), \qquad K_2(A) = H_2(E(A)), \qquad K_3(A) = H_3(St(A)).$$

D'après [4] (cf. aussi [8]) on a $K_1(A) = \operatorname{Coker} \varphi_A$ et $K_2(A) = \operatorname{Ker} \varphi_A$.

Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme surjectif d'anneaux, dont on note $\mathfrak{A}$ le noyau. Soit Y l'ensemble $\{y_{ij}^u \mid i$ et j entiers >0 distincts, $u \in \mathfrak{A}\}$. Le groupe libre $\langle St(A) \times Y\rangle$ construit sur l'ensemble $St(A) \times Y$ est un $St(A)$-groupe par $z' \cdot (z, y) = (z'z, y)$, $z' \in St(A)$, $(z, y) \in \langle St(A) \times Y\rangle$. On notera simplement y_{ij}^u le générateur correspondant à l'élément $(1, y_{ij}^u)$ et donc $(z, y_{ij}^u) = z \cdot y_{ij}^u$.

Définition. Le *groupe de Steinberg relatif* de f, noté $St(f)$, est le quotient du groupe libre $\langle St(A) \times Y\rangle$ par le plus petit sous-groupe distingué $St(A)$-équivariant contenant les relations

$$y_{ij}^u y_{ij}^v = y_{ij}^{u+v}, \tag{A1}$$

$$x_{ij}^{\lambda} \cdot y_{ij}^v = y_{ij}^v, \tag{B1}$$

$$x_{ij}^{\lambda} \cdot y_{kl}^v = y_{kl}^v, \qquad j \neq k, \quad i \neq l, \tag{B2}$$

$$x_{ij}^{\lambda} \cdot y_{jk}^v = y_{ik}^{\lambda v} y_{jk}^v, \qquad i \neq k, \tag{B3}$$

$$x_{ij}^{\lambda} \cdot y_{ki}^v = y_{kj}^{-v\lambda} y_{ki}^v, \qquad j \neq k, \tag{B3'}$$

$$x_{ij}^u \cdot t = y_{ij}^u t y_{ij}^{-u}, \qquad t \in \langle St(A) \times Y\rangle, \tag{C}$$

où $\lambda \in A$ et $u, v \in \mathfrak{A}$.

Remarquons qu'il suffit que la relation (C) soit vérifiée pour $t = z \cdot y_{kl}^v$, $z \in St(A)$, $v \in \mathfrak{A}$. Posons $GL(f) = \operatorname{Ker}(GL(A) \to GL(A'))$ et définissons alors φ_f: $St(f) \to GL(f)$ par $\varphi_f(z \cdot y_{ij}^u) = \varphi_A(z)\, e_{ij}^u \varphi_A(z)^{-1}$. Il est clair que φ_f est un homomorphisme de groupes.

Définition. On pose $K_2(f) = \operatorname{Ker} \varphi_f$ et $K_1(f) = \operatorname{Coker} \varphi_f$.

Théorème 4. *On a une suite exacte de groupes abéliens*

$$K_3(A) \to K_3(A') \to K_2(f) \to K_2(A) \to K_2(A') \to K_1(f) \to K_1(A) \to K_1(A').$$

Avant de passer à la démonstration du théorème 4 nous allons rappeler quelques résultats et notations de [8, section 6]. Le produit fibré $A \times_{A'} A$

est noté D. Les projections p_1 et p_2 de D sur Λ sont scindées par la diagonale $\Delta: \Lambda \to D$. Les applications induites sur les groupes de Steinberg sont notées $p_{i*}: St(D) \to St(\Lambda)$ et $\Delta_*: St(\Lambda) \to St(D)$. On pose $St(\mathfrak{A}) = \operatorname{Ker} p_{1*}$ et $C\mathfrak{A} = [\operatorname{Ker} p_{1*}, \operatorname{Ker} p_{2*}]$. L'application $\mu: St(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A} \to St(\Lambda)$ est induite par la restriction de p_{2*} à $St(\mathfrak{A})$.

Le lemme 6.1 de [8] affirme que la suite

$$St(\mathfrak{A}) \to St(\Lambda) \to St(\Lambda') \to 1$$

est exacte, donc le conoyau de (p_{1*}, p_{2*}) est $St(\Lambda')$. On applique alors la proposition 6 à la situation suivante: $G = St(D)$, $N = St(\Lambda)$, $Q = St(\Lambda')$, $d_0 = p_{1*}$, $d_1 = p_{2*}$ et $s = \Delta_*$. On a alors $G_0 = St(\mathfrak{A})$ et $[G_0, G_1] = C\mathfrak{A}$.

PROPOSITION 8. *La paire $(St(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}, \mu)$ est l'extension* r.c. *universelle de $(St(\Lambda'), St(\Lambda))$.*

Démonstration. Puisque le groupe $G = St(D)$ est superparfait (cf. [4, 8]) il suffit de vérifier que $St(\Lambda)$ opère trivialement sur $\operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}$. En fait on va montrer que $\operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}$ appartient au centre de $St(D)$. Puisque le groupe $GL(D)$ est isomorphe au produit fibré $GL(\Lambda) \times_{GL(\Lambda')} GL(\Lambda)$, tout élément de $GL(D)$, dont les deux projections sur $GL(\Lambda)$ sont nulles, est nul. Par suite $\operatorname{Ker} p_{1*} \cap \operatorname{Ker} p_{2*}$ appartient au noyau de φ_D. Or ce noyau est précisément le centre de $St(D)$ (cf. [8, 5.1]). Ainsi $St(\Lambda)$ opère trivialement sur $\operatorname{Ker} \mu$. La proposition 8 est alors un cas particulier de la proposition 6. ∎

Le noyau de la première projection $GL(D) = GL(\Lambda) \times_{GL(\Lambda')} GL(\Lambda) \to GL(\Lambda)$ est noté $GL(\mathfrak{A})$. L'homomorphisme φ_D induit alors $\varphi_{\mathfrak{A}}: St(\mathfrak{A}) \to GL(\mathfrak{A})$. On pose $K_2(\mathfrak{A}) = \operatorname{Ker} \varphi_{\mathfrak{A}}$ et $K_1(\mathfrak{A}) = \operatorname{Coker} \varphi_{\mathfrak{A}}$. On remarque que $C\mathfrak{A} \subset K_2(\mathfrak{A})$.

LEMME 14. *On a les isomorphismes $St(f) = St(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}$, $K_2(f) = K_2(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}$ et $K_1(f) = K_1(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. Les relations suivantes du groupe $St(f)$

$$[y_{ij}^u, y_{kl}^v] = 1, \qquad j \neq k, \quad i \neq l, \tag{A2}$$

$$[y_{ij}^u, y_{jk}^v] = y_{ik}^{uv}, \qquad i \neq k, \tag{A3}$$

sont conséquences des relations (B2) et (C) d'une part, (B3) et (C) d'autre part. Dans [11, Lemme 7.8],[1] Swan a montré que le groupe $St(\mathfrak{A})$, qu'il noterait $St'(D, \operatorname{Ker} p_1)$, admet la présentation suivante en tant que $St(\Lambda)$-groupe

— générateurs: les y_{ij}^u,

— relations: A1, A2, A3, B1, B2, B3, B3'.

[1] La formule (6) de ce lemme contient une coquille et doit être lue $x_{ij}(r) \cdot x_{jk}(x) = x_{ik}(rx)\, x_{jk}(x)$.

Le générateur $z \cdot y_{ij}^u \in St(\mathfrak{A})$ correspond à $\Delta_*(z)\, x_{ij}^u\, \Delta_*(z)^{-1} \in St(D)$.

On constate ainsi que le groupe $St(f)$ est le quotient du groupe $St(\mathfrak{A})$ par la relation (C). Or cette relation est précisément la condition (ii) des extensions relatives, donc d'après le lemme 11 on a $St(f) = St(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}$.

Le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & K_2(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & St(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & GL(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & K_1(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(f) \arrow[r] & St(f) \arrow[r] & GL(f) \arrow[r] & K_1(f) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

et l'image de $C\mathfrak{A}$ dans $GL(\mathfrak{A})$ est triviale. Il en résulte que $K_2(f) = K_2(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}$ et $K_1(f) = K_1(\mathfrak{A})$. ∎

Démonstration du théorème 4. Dans le diagramme commutatif ci-dessous toutes les lignes et toutes le colonnes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & K_2(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & St(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & GL(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\mathfrak{A}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 \arrow[r] & K_2(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & St(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & GL(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\Lambda) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(\Lambda') \arrow[r] & St(\Lambda') \arrow[r] \arrow[d] & GL(\Lambda') \arrow[r] & K_1(\Lambda') \arrow[r] & 1. \\
 & & 1 & & &
\end{tikzcd}$$

Puisque l'image de $C\mathfrak{A} \subset K_2(\mathfrak{A})$ est nulle dans $K_2(\Lambda)$ on peut, en utilisant le lemme 14, remplacer dans le diagramme ci-dessus $\mathfrak{A}$ par f. Le lemme du serpent nous fournit alors la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Ker} \mu \to K_2(f) \to K_2(\Lambda) \to K_2(\Lambda') \to K_1(f) \to K_1(\Lambda) \to K_1(\Lambda') \qquad (*)$$

car

$$\operatorname{Ker}(\mu\colon St(f) \to St(\Lambda)) = \operatorname{Ker}(K_2(f) \to K_2(\Lambda)).$$

En basses dimensions la suite exacte de cohomologie de la paire $(St(\Lambda'), St(\Lambda))$ s'écrit

$$H_3(St(\Lambda)) \to H_3(St(\Lambda')) \to H_3(St(\Lambda'), St(\Lambda)) \to 0.$$

D'après la proposition 8 l'extension r.c. $(St(\mathfrak{A})/C\mathfrak{A}, \mu)$ est universelle, donc son noyau Ker μ est isomorphe à $H_3(St(\Lambda'), St(\Lambda))$ par le théorème 2. Ainsi la suite exacte précédente s'écrit

$$K_3(\Lambda) \to K_3(\Lambda') \to \operatorname{Ker} \mu \to 0. \tag{**}$$

Le recollement des suites exactes (*) et (**) nous donne le théorème 4. ∎

Remarque. Swan [11] a montré que le groupe $K_2(\mathfrak{A})$ ne peut pas être le groupe de K-théorie relative en produisant un contre-exemple pour $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 0$. En effet, l'élément $[x_{12}^{0,x}, x_{21}^{0,x}] \in K_2(\mathfrak{A}) \subset St(D)$ n'est pas nul alors qu'il doit l'être dans le groupe de K-théorie relative. On vérifie immédiatement que cet élément est dans $C\mathfrak{A} = [\operatorname{Ker} p_{1*}, \operatorname{Ker} p_{2*}]$.[2] Ceci montre que le groupe $C\mathfrak{A}$ peut être non trivial.

Quillen [9] a défini les groupes $K_n(\Lambda)$ pour $n \geqslant 1$ en posant $K_n(\Lambda) = \pi_n(BGL(\Lambda)^+)$. L'espace $BGL(\Lambda)^+$ est construit à partir de l'espace classifiant $BGL(\Lambda)$ en lui attachant des 2 et 3-cellules de manière à en faire un H-espace. (Voir [5, section 1] pour plus de détails.) Cette définition coincide avec la définition algébrique donnée ici pour $n = 1, 2, 3$ (cf. [2, 4, 9] ou [5, ch. I]).

Pour tout homomorphisme $f: \Lambda \to \Lambda'$ il est alors possible de définir les groupes de K-théorie de f comme les groupes d'homotopie de la fibre homotopique $\mathscr{F}$ de l'application continue $BGL(\Lambda)^+ \to BGL(\Lambda')^+$. Nous allons montrer le

THÉORÈME 5. *La suite exacte du théorème* 4 *s'identifie canoniquement à la suite exacte d'homotopie* (*en basses dimensions*) *de la fibration homotopique* $\mathscr{F} \to BGL(\Lambda)^+ \to BGL(\Lambda')^+$. *En particulier* $\pi_2\mathscr{F} = \operatorname{Ker} \varphi_f$ *et* $\pi_1\mathscr{F} = \operatorname{Coker} \varphi_f$.

Démonstration. Abrégeons les notations en posant $S = St(\Lambda)$, $S' = St(\Lambda')$, $G = GL(\Lambda)$, $G' = GL(\Lambda')$, $M = St(f)$, $L = H_3(St(\Lambda'), St(\Lambda))$. Ainsi $1 \to L \to M \to S \to S' \to 1$ est une extension r.c. universelle.

Soit ι l'image de id_L par l'homomorphisme composé $\operatorname{Hom}(L, L) \cong H^3(BS', BS; L) \cong H^3(BS'^+, BS^+; L) \to H^3(BS'^+; L)$. L'élément ι permet de construire un fibré $\mathscr{Y} \to BS'^+$ de fibre l'espace d'Eilenberg–MacLane $K(L, 2)$. Dans le diagramme ci-dessous les espaces Y et Z sont définis par produit fibré

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{Y} \arrow[d] \\ BS \arrow[r] \arrow[ur] & BS' \arrow[r] & BS'^+. \end{tikzcd}$$

L'élément id_L définit une trivilisation de $Z \to BS$, d'où par composition un relèvement $BS \to Y$ de $BS \to BS'$. D'après la proposition 4 la suite exacte

[2] Ceci explique le titre initial de cet article "Du côté de chez Swan."

d'homotopie de la fibration $BS \to Y$ s'identifie à l'extension r.c. universelle de (S', S). En particulier la fibre est BM.

Les applications composées $Y \to BS' \to BG'$ et $\mathscr{Y} \to BS'^+ \to BG'^+$ servent à construire les diagrammes ci-dessous, dans lesquels toutes les lignes et toutes les colonnes sont des fibrations homotopiques:

$$\begin{array}{ccccc} X'' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BM & \longrightarrow & BS & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & BG & \longrightarrow & BG', \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathscr{X}'' & \longrightarrow & \mathscr{X} & \longrightarrow & \mathscr{X}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{E} & \longrightarrow & BS^+ & \longrightarrow & \mathscr{Y} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F} & \longrightarrow & BG^+ & \longrightarrow & BG'^+. \end{array}$$

La construction "+" induit des flèches du premier diagramme dans le second (noter que $\mathscr{Y} = Y^+$). La fibration du haut du premier diagramme s'envoie dans son homologue du second diagramme. Au niveau des groupes d'homotopie, on en déduit un morphisme de suites exactes (en commencant à $\pi_2(X) = 0$)

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\varphi_f & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\varphi_A & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\varphi_{A'} & \longrightarrow \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Coker} Bf_*^+ & \longrightarrow & \pi_2\mathscr{F} & \longrightarrow & \pi_2 BG^+ & \longrightarrow & \pi_2 BG'^+ & \longrightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Coker}\varphi_f & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\varphi_A & \longrightarrow & \operatorname{Coker}\varphi_{A'} \\ \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ \pi_1\mathscr{F} & \longrightarrow & \pi_1 BG^+ & \longrightarrow & \pi_1 BG'^+ \end{array}$$

où $Bf_*^+ \ \pi_3 BG^+ \to \pi_3 BG'^+$.

La première ligne est la suite exacte (*) utilisée lors de la démonstration du théorème 4. La seconde ligne provient de la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathscr{F} \to BG^+ \to BG'^+$. Ce diagramme se calcule en utilisant les fibrations construites précédemment. A titre d'exemple nous allons calculer $\pi_2\mathscr{X}'$. L'espace BS'^+ est 2-connexe, donc $\pi_3 BS'^+ \simeq H_3(BS'^+) \simeq H_3(S')$. Puisque l'on a des isomorphismes analogues pour S on en déduit

$$\operatorname{Coker}(\pi_3 BS^+ \to \pi_3 BS'^+) = \pi_3(BS'^+, BS^+) \simeq H_3(S', S) = L.$$

La fibration $K(L, 2) \to \mathscr{Y} \to BS'^+$ donne alors naissance à la suite exacte

$$0 \to \pi_3\mathscr{Y} \to \pi_3 BS'^+ \xrightarrow{\delta_*} \pi_3(BS'^+, BS^+) \to \pi_2\mathscr{Y} \to 0.$$

Ainsi $\pi_2\mathscr{Y} = 0$ et $\pi_3\mathscr{Y} = \operatorname{Ker}\delta_* = \operatorname{Im}(\pi_3 BS^+ \to \pi_3 BS'^+)$. Or d'après [2] on a $\pi_3 BS^+ \simeq \pi_3 BG^+$ et $\pi_3 BS'^+ \simeq \pi_3 BG'^+$, donc $\pi_3\mathscr{Y} = \operatorname{Im}(Bf_*^+ : \pi_3 BG^+ \to \pi_3 BG'^+)$.

La fibration $\mathscr{X}' \to \mathscr{Y} \to BG'^{+}$ nous donne alors la suite exacte $\mathrm{Im}\, Bf_*^+ \to \pi_3 BG'^{+} \to \pi_2\mathscr{X}' \to 0$. On en déduit $\pi_2\mathscr{X}' = \mathrm{Coker}\, Bf_*^+$. De plus on remarque que $L = \pi_3(BS'^{+}, BS^{+}) = \mathrm{Coker}(\pi_3 BS^{+} \to \pi_3 BS'^{+}) \supsetneq \mathrm{Coker}\, Bf_*^+$.

On termine la démonstration en utilisant le lemme des cinq. ∎

References

1. B. Conrad, Central kernels and the homology of groups, *J. Pure Appl. Algebra* to appear.
2. S. M. Gersten, K_3 of a ring is H_3 of the Steinberg group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **37** (1973), 366–368.
3. R. O. Hill, Jr., A geometric interpretation of a classical group cohomology obstruction, *Proc. Amer. Math. Soc.* **54** (1976), 405–412.
4. M. Kervaire, Multiplicateurs de Schur et K-théorie, *in* "Essays on Topology and Related Topics" (Mémoires dédiés à G. de Rham), pp. 212–225, Springer–Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1970.
5. J.-L. Loday, K-théorie algébrique et représentations de groupes, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. Paris* **9** (1976), 309–377.
6. S. MacLane, Cohomology theory of abstract groups III, *Ann. of Math.* **50** (1949), 736–761.
7. S. MacLane, "Homology," Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 114, Springer–Verlag, Berlin, 1963.
8. J. Milnor, "Introduction to Algebraic K-Theory," Annals of Mathematical Studies, No. 72, Princeton, Univ. Press, Princeton, N. J., 1971.
9. D. Quillen, Cohomology of groups, *in* "Actes du Congrès Intern. Math.," t. II, pp. 47–51, 1970.
10. M. R. Stein, Relativizing functors on rings and algebraic K-theory, *J. Algebra* **19** (1971), 140–152.
11. R. G. Swan, Excision in algebraic K-theory, *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), 221–252.
12. J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 453–496.
13. F. Keune, The relativization of K_2, *J. Algebra* **54** (1978), 159-177.