НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ГРУППАХ КОС АРТИНА

Кристиан Кассель

Institut de Recherche
Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur - CNRS
Страсбург, Франция

Определение. *Группа кос* B_n *— это группа, порожденная образующими* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ *и соотношениями*

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad \text{\textit{если}}\ |i-j| > 1,$$

$$\sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \quad \text{\textit{если}}\ |i-j| = 1.$$

Группа кос была введена Артином в 1920-ых годах. В настоящее время она является важным объектом в алгебре, топо-логии, теории групп, алгебраической геометрии, и даже в криптографии.

Другие определения:

- группа геометрических кос
- группа классов отображений (mapping class group) проколотого диска
- фундаментальная группа конфигурационного пространства n точек в плоскости

Новые результаты:

• П. Дехорнуа (P. Dehornoy) из Кана (Caen, France) в 1991–92 г. доказал, что

B_n имеет инвариантный линейный порядок (linear ordering).

Этот неожиданный результат является побочным продуктом современных исследований в теории больших кардиналов (теория множеств).

• Д. Краммер (D. Krammer) из Базеля (Basel, Switzerland) и С. Бигелоу (S. Bigelow) из Беркли (Berkeley, USA) в 2000 г. доказали, что

B_n имеет точное конечномерное линейное представление.

(см. В. Г. Тураев, *Faithful linear representations of the braid groups*, Труды Семинара Бурбаки 878 за 2000 г.)

Dehornoy's linear ordering:

DEFINITION. *a) A braid is called σ-positive if it can be represented by a braid word in which the generator with lowest index appears only with positive powers.*

b) β is σ-negative if and only if β^{-1} is σ-positive.

EXAMPLE. $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$ is σ-positive

THEOREM (Dehornoy, 1991–92). *A braid is either 1, or σ-positive, or σ-negative.*

It is not obvious at all that a σ-positive braid is not trivial or σ-negative, nor that a braid $\neq 1$ is either σ-positive or σ-negative.

Consequences:

• Define $\beta < \beta'$ if $\beta^{-1}\beta'$ is σ-positive. Then $<$ is a linear ordering on B_n, invariant under left multiplication

• B_n is a torsion-free group

• If R is a ring without zero divisors, then the group ring $R[B_n]$ has no zero divisors (Kaplansky conjecture), and any invertible element of $R[B_n]$ is of the form $r\beta$, where $r \in R^*$ and $\beta \in B_n$

• Dehornoy constructed a very efficient algorithm based on this ordering to solve the word problem in B_n

References:

• P. Dehornoy, *Braids and self-distributivity*, Progr. in Math. 195, Birkhäuser, 2000

• C. Kassel, *L'ordre de Dehornoy sur les tresses*, Séminaire Bourbaki n° 865 (November 1999) http://www-irma.u-strasbg.fr/~kassel/

Definition. *A LSD-set is a set equipped with a binary law $S \times S \to S$ satisfying*

$$a * (b * c) = (a * b) * (a * c). \tag{LSD}$$

Example. Take $S = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ and

$$a * b = (1 - t)a + tb.$$

We get the Burau representation

$$B_n \to GL_n(\mathbf{Z}[t, t^{-1}]).$$

This is an example of a LSD-set S in which left multiplications are *bijective*. Such a LSD-set gives rise to an action of the group B_n on the power-set S^n.

Definition. *A LSD-set S is acyclic if*

$$((a * b_1) * b_2) * b_3 \ldots \neq a$$

for all $a, b_1, b_2, b_3, \ldots \in S$.

An acyclic LSD-set in set theory

Axiom. *There exists a rank E with an elementary embedding $j : E \to E$.*

Elementary embedding: an injection that is not bijective and preserves all properties of E that can be defined using basic set-theoretical properties.

Rank: set considered in set theory with the property that (roughly) any function $E \to E$ can be considered as an element of E.

Take the set S of all elementary embeddings of the rank E: $S \neq \emptyset$.

If $i, j \in S$, define $i * j = i(j) \in S$. This binary laws satisfies Condition (LSD).

Proposition (Laver, 1989). *For any $j \in S$, the sub-LSD-set of S generated by j is an acyclic LSD-set.*

THEOREM (Dehornoy, 1991). *The free LSD-set D_1 on one generator is acyclic.*

Elements of D_1 are equivalence classes of $x,\ x * x,\ x * (x * x),\ (x * x) * x, \ldots$ modulo the (LSD) Relation, or, equivalently, modulo the action of the group G with the following presentation:

Generators: ∇_α where α runs over all finite sequences of 0 and 1

Relations:

$$\nabla_{\alpha 0\beta}\,\nabla_{\alpha 1\gamma} = \nabla_{\alpha 1\gamma}\,\nabla_{\alpha 0\beta}$$

$$\nabla_{\alpha 0\beta}\,\nabla_{\alpha} = \nabla_{\alpha}\,\nabla_{\alpha 10\beta}\,\nabla_{\alpha 00\beta}$$

$$\nabla_{\alpha 10\beta}\,\nabla_{\alpha} = \nabla_{\alpha}\,\nabla_{\alpha 10\beta}$$

$$\nabla_{\alpha 11\beta}\,\nabla_{\alpha} = \nabla_{\alpha}\,\nabla_{\alpha 11\beta}$$

$$\nabla_{\alpha 1}\,\nabla_{\alpha}\,\nabla_{\alpha 1}\,\nabla_{\alpha 0} = \nabla_{\alpha}\,\nabla_{\alpha 1}\,\nabla_{\alpha}$$

There exists a surjective homomorphism of groups $\pi = G \to B_\infty = \cup_n B_n$ defined by

$$\pi(\nabla_\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \text{ contains } 0 \\ \sigma_{i+1} & \text{if } \alpha = 11\ldots1 \ (i \text{ times}) \end{cases}$$