Université de Strasbourg. **Licence de Physique, L3.**

Examen de Probabilités-Statistique du 12-1-2009 : Corrigé.

Exercice n^o 1 0) $\sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}\cdot$ (Par multiplication par $(1-z)$; cela a été vu en cours...)

1) On peut dériver terme à terme cette série entière, dans son disque ouvert de convergence $\{|z|<1\}$. Cela donne aussitôt (par récurrence) :

$$\sum_{k\geq n-1} k(k-1)\dots(k-n+2)\, z^{k-n+1} = \frac{(n-1)!}{(1-z)^n}\,,$$

d'où en translatant k en $k+n-1$ et en divisant par $(n-1)!$: $\sum_{k\geq 0} C_{k+n-1}^{n-1}\, z^k = (1-z)^{-n}$.

2) $Y_1 = \min\{\ell\in \mathbb{N}^* \,|\, B_\ell = 1\}$ est de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

$$3) \qquad \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = n+k) = \mathbb{P}\Big(S_{n+k-1} = n-1\,;\, B_{n+k} = 1\Big)$$

$$= \mathbb{P}(S_{n+k-1} = n-1)\times \mathbb{P}(B_{n+k}=1) = C_{n+k-1}^{n-1}\,(1-p)^k\, p^{n-1}\times p = C_{n+k-1}^{n-1}\,(1-p)^k\, p^n.$$

4) Selon les questions 1) (avec $z = 1-p$) et 3), nous avons :

$$\mathbb{P}(Y_n\in\mathbb{N}^*) = \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(Y_n = n+k) = p^n\sum_{k\geq 0} C_{n+k-1}^{n-1}(1-p)^k = 1\,.$$

Cela signifie que la suite (S_ℓ) atteint presque sûrement le niveau n. Comme n est quelconque et que la suite (S_ℓ) est croissante, cela montre que S_ℓ tend presque sûrement vers l'infini lorsque ℓ tend vers l'infini.

5) Les variables $Y_1' := Y_1$ et $Y_j' := \min\{\ell\in\mathbb{N}^*\,|\, S_\ell = j\} - \min\{\ell\in\mathbb{N}^*\,|\,S_\ell = j-1\}$, pour $j\geq 2$, sont indépendantes, puisqu'elles concernent des blocs successifs disjoints deux à deux de la suite i.i.d. $\{B_j\,|\,j\in\mathbb{N}^*\}$ $\Big($il suffit de s'assurer que Y_j' est indépendante de l'événement $\{Y_1' = k_1,\dots,Y_{j-1}' = k_{j-1}\}$, pour tous $j\geq 2$ et $k_1,\dots,k_{j-1}\geq 1\Big)$, et ont manifestement toutes la loi de Y_1. Enfin nous avons clairement $Y_n = \sum_{j=1}^n Y_j'$.

6) Selon les questions 2) et 5) nous avons :

$$\mathbb{E}(Z_n) = n\,\mathbb{E}(Y_1) - n = n(1-p)/p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{Var}(Y_n) = n\,\mathrm{Var}(Y_1) = n(1-p)/p^2\,.$$

Exercice n^o 2 (Test bayésien)

0) $\alpha := \sup_{\theta\in H_0}\mathbb{P}_\theta(W)$, et $(1-\beta) := \inf_{\theta\in H_1}\mathbb{P}_\theta(W)$.

1) $\mathcal{Q}(H_0\,|\,W) = \frac{\mathcal{Q}(H_0\cap W)}{\mathcal{Q}(W)} = \frac{\int_{H_0} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta)}{\int_\Theta \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta)} = \frac{\int_{H_0} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta)}{\int_{H_0} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta) + \int_{H_1} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta)}\,.$

2) Nous avons par 0) : $\int_{H_0} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta) \le \alpha\,\nu(H_0)$, et la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+y}$ croît (pour tout $y>0$).

3) Nous avons par 0) : $\int_{H_1} \mathbb{P}_\theta(W)\,d\nu(\theta) \ge (1-\beta)\,\nu(H_1) = (1-\beta)(1-\nu(H_0))$.

4) $\mathcal{Q}(H_1\,|\,W^{\mathbf{c}}) = \frac{\int_{H_1} \mathbb{P}_\theta(W^{\mathbf{c}})\,d\nu(\theta)}{\int_\Theta \mathbb{P}_\theta(W^{\mathbf{c}})\,d\nu(\theta)} = \frac{\int_{H_1} [1-\mathbb{P}_\theta(W)]\,d\nu(\theta)}{\int_{H_1} [1-\mathbb{P}_\theta(W)]\,d\nu(\theta) + \int_{H_0} [1-\mathbb{P}_\theta(W)]\,d\nu(\theta)}$

$\le \frac{\beta\,\nu(H_1)}{1-\alpha-(1-\beta-\alpha)\,\nu(H_1)}$, de la même façon que ci-dessus.

5) Sous $\mathbb{P}_0$, $\sqrt{n}\,\overline{X}_n$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$, de sorte qu'on doit avoir

$\mathcal{N}(0,1)\Big([c\sqrt{n}\,,\infty[\Big) = \alpha = 0,05 \approx \mathcal{N}(0,1)\Big([1,65\,,\infty[\Big)$, et donc $c \approx 1,65/3,61 \approx 0,45$.

Nous avons ensuite $(1-\beta) = \mathbb{P}_1(W) = \mathcal{N}(\sqrt{n}\,,1)\Big([c\sqrt{n}\,,\infty[\Big) = \mathcal{N}(0,1)\Big([(c-1)\sqrt{n}\,,\infty[\Big)$
$\approx \mathcal{N}(0,1)\Big([1,65-\sqrt{n}\,,\infty[\Big) \approx \mathcal{N}(0,1)\Big([1,65-3,61\,,\infty[\Big) = \mathcal{N}(0,1)\Big([-1,96\,,\infty[\Big) \approx 0,975$.

$$6)\quad \mathcal{Q}(H_0\,|\,W) = \frac{0,05\,\mathbb{P}_0(W)}{0,05\,\mathbb{P}_0(W) + 0,95\,\mathbb{P}_1(W)} \approx \frac{(0,05)^2}{(0,05)^2 + (0,95\times 0,975)} \approx 3\% < \alpha\,,$$

tandis que dans cet exemple la majoration de la question 3) est simplement une égalité, puisque H_0 et H_1 sont des singletons.
