

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Géométrie

Examen

Mercredi 12 septembre 2007

Durée 3 heures

*Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.*

Exercice 1

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien. Considérons une symétrie centrale $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ et une réflexion affine $\psi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, et notons $\overrightarrow{\varphi}$ et $\overrightarrow{\psi}$ leurs applications linéaires associées respectives.

- (a) Peut-on affirmer que $\overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est une réflexion vectorielle ?
- (b) Peut-on affirmer que $\psi \circ \varphi$ est une réflexion affine ?

Exercice 2

On se place dans un plan affine \mathcal{E} défini sur \mathbb{R} . Soient A, B, C et D des points de \mathcal{E} deux à deux distincts. On suppose que

- les droites AB et CD sont parallèles,
- les droites AC et BD ne sont pas parallèles,
- le point O d'intersection des droites AC et BD est le milieu du segment $[AC]$.

Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ la symétrie centrale de centre O .

- (a) Montrer que $C = \varphi(A)$.
- (b) Montrer que $D = \varphi(B)$.
- (c) Montrer que les points A, B, C et D forment un parallélogramme.

Exercice 3

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien, et soient A, B et C trois points non alignés de \mathcal{E} . Notons G le centre de gravité du triangle ABC .

- (a) Montrer que la somme des trois produits scalaires $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$ est égale à $-\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.
- (b) Montrer que $AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.
- (c) Soit M un point de \mathcal{E} . Montrer que

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Exercice 4

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien. Soient A, B, C et D quatre points de \mathcal{E} deux à deux distincts tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, les droites AB et BC soient orthogonales, et les longueurs des segments $[AB]$ et $[BC]$ coïncident. Soit M un point appartenant au segment $[CD]$ et distinct des points C et D . Soit N un point appartenant au segment $[BC]$ et distinct des points B et C . Notons

B_1 le point appartenant à la droite AM tel que les droites AM et BB_1 soient orthogonales,

B_2 le point appartenant à la droite AN tel que les droites AN et BB_2 soient orthogonales,

D_1 le point appartenant à la droite AM tel que les droites AM et DD_1 soient orthogonales,

D_2 le point appartenant à la droite AN tel que les droites AN et DD_2 soient orthogonales.

- (a) Montrer qu'il existe une unique rotation $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de centre B telle que $\varphi(A) = C$.
- (b) Montrer l'égalité des angles orientés $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK})$, où $K = \varphi(B_1)$.
- (c) Montrer que les droites AM et BK sont parallèles.
- (d) Montrer que les droites DD_1 et CK sont parallèles.
- (e) Montrer que $AD_1 = BB_1$.
- (f) Montrer que $B_1B_2 = D_1D_2$ et que les droites B_1B_2 et D_1D_2 sont orthogonales.