

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Calcul différentiel

Examen

Vendredi 18 janvier 2008

Durée 3 heures

Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^5 y^2 (x - y)$. Soit $a = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Calculer la matrice jacobienne de f en tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 .
- (b) Calculer la matrice hessienne de f en tout point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 .
- (c) Calculer $f'(a)(h)$ et $f''(a)(h, k)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ et tout $k \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \text{ et } f(0, 0, 0) = 0.$$

Soient $F = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, 0), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ deux sous-espaces de \mathbb{R}^3 .

- (a) Montrer que l'application f admet des dérivées partielles par rapport à F et G en tout point de \mathbb{R}^3 .
- (b) La dérivée partielle de f par rapport à F est-elle continue en $(0, 0, 0)$?
- (c) L'application f est-elle différentiable en $(0, 0, 0)$?

Exercice 3

Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

On considère l'application $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(A) = A^3$.

- (a) Montrer que g est différentiable en tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'application g' .
- (b) Soit $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice unité. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif ε tel que toute matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\|H - I\| < \varepsilon$ admette une racine cubique (c'est-à-dire, admette une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = H$).

Exercice 4

Soit n un entier strictement positif, et soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe \mathcal{C}^1 . Supposons qu'il existe un nombre réel strictement positif k tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$, on ait

$$\langle f'(x)(h), h \rangle \geq k \langle h, h \rangle,$$

où, pour tous vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n , le symbole $\langle u, v \rangle$ désigne le produit scalaire standard $u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$ de u et v .

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.
- (b) Montrer que, pour tout sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^n , le sous-ensemble $f(U)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n .
- (c) Soient x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Considérons la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \langle f(x + t(y - x)), y - x \rangle$. Montrer que φ est différentiable en tout point de l'intervalle $]0, 1[$, et exprimer la dérivée φ' de φ à l'aide de la dérivée f' de f .
- (d) Montrer que, pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , on a

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq k \langle y - x, y - x \rangle.$$

En déduire que, pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , on a l'inégalité

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \geq k\|y - x\|_2,$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n : pour tout vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n , on a $\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$.

- (e) Montrer que, pour tout sous-ensemble fermé V de \mathbb{R}^n , le sous-ensemble $f(V)$ est un fermé de \mathbb{R}^n .
- (f) On admet que \mathbb{R}^n est connexe. Montrer que $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ et que f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur lui-même.