

**Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3**

**Calcul différentiel**

*Examen*

Vendredi 18 janvier 2008

Durée 3 heures

*Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.*

*Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.*

**Exercice 1**

Considérons l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^5 y^2 (x - y)$ . Soit  $a = (3, -2) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Calculer la matrice jacobienne de  $f$  en tout point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (b) Calculer la matrice hessienne de  $f$  en tout point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (c) Calculer  $f'(a)(h)$  et  $f''(a)(h, k)$  pour tout  $h \in \mathbb{R}^2$  et tout  $k \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2**

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \text{ si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0), \text{ et } f(0, 0, 0) = 0.$$

Soient  $F = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(x, y, 0), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  deux sous-espaces de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Montrer que l'application  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $F$  et  $G$  en tout point de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $F$  est-elle continue en  $(0, 0, 0)$  ?
- (c) L'application  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0, 0)$  ?

**Exercice 3**

Soit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels. On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de la norme  $\|\cdot\|$  définie par

$$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

On considère l'application  $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par  $g(A) = A^3$ .

- (a) Montrer que  $g$  est différentiable en tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et déterminer l'application  $g'$ .
- (b) Soit  $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice unité. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que toute matrice  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\|H - I\| < \varepsilon$  admette une racine cubique (c'est-à-dire, admette une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $M^3 = H$ ).

### Exercice 4

Soit  $n$  un entier strictement positif, et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Supposons qu'il existe un nombre réel strictement positif  $k$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$ , on ait

$$\langle f'(x)(h), h \rangle \geq k \langle h, h \rangle,$$

où, pour tous vecteurs  $u = (u_1, \dots, u_n)$  et  $v = (v_1, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , le symbole  $\langle u, v \rangle$  désigne le produit scalaire standard  $u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$  de  $u$  et  $v$ .

- (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , l'application  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un isomorphisme.
- (b) Montrer que, pour tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , le sous-ensemble  $f(U)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- (c) Soient  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons la fonction  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(t) = \langle f(x + t(y - x)), y - x \rangle$ . Montrer que  $\varphi$  est différentiable en tout point de l'intervalle  $]0, 1[$ , et exprimer la dérivée  $\varphi'$  de  $\varphi$  à l'aide de la dérivée  $f'$  de  $f$ .
- (d) Montrer que, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq k \langle y - x, y - x \rangle.$$

En déduire que, pour tous vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a l'inégalité

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \geq k\|y - x\|_2,$$

où  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  : pour tout vecteur  $u = (u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\|u\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ .

- (e) Montrer que, pour tout sous-ensemble fermé  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , le sous-ensemble  $f(V)$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ .
- (f) On admet que  $\mathbb{R}^n$  est connexe. Montrer que  $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$  et que  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur lui-même.