Université Louis Pasteur
U.F.R. de Mathématiques et d'Informatique

Année 2006 - 2007

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Calcul différentiel

Examen

Vendredi 19 janvier 2007

Durée 3 heures

Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (e^x, x - y)$.

(a) Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(b) Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Calculer la matrice jacobienne $J_f(x_0, y_0)$ de f en (x_0, y_0).

(c) Montrer que l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

(d) Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 2

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$g(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad \text{et } g(0, 0) = 0.$$

(a) Montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Justifier l'existence de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.
Calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

(c) L'application g est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 3

On se place dans $\mathbb{R}^3$, et on considère le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^3 &= 1 \\ xyz + 2x &= 1. \end{cases}$$

(a) Vérifier que le point $(1, -1, 1)$ est une solution de ce système.

(b) Montrer qu'il existe un nombre ε strictement positif et deux fonctions $\varphi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ et $\psi :]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $\varphi(-1) = \psi(-1) = 1$ et $(\varphi(y), y, \psi(y))$ soit une solution du système pour tout $y \in]-1-\varepsilon, -1+\varepsilon[$.

(c) Calculer $\varphi'(-1)$ et $\psi'(-1)$.

TSVP

Exercice 4

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, et soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que B est différentiable en tout point de $E \times F$ et calculer la dérivée de B.

Exercice 5

(a) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Considérons l'application $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \|x\|_\infty$. Déterminer l'ensemble des points où H est différentiable.

(b) Soit n un entier strictement positif. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1\dots,n} |x_i|.$$

Considérons l'application $H_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $H_n(x) = \|x\|_\infty$. Déterminer l'ensemble des points où H_n est différentiable.