

Master de sciences, mention Mathématiques, MFA 1-ère année

Géométrie différentielle

Examen

Vendredi 18 janvier 2008

Durée 4 heures

*Documents, téléphones portables, calculatrices et baladeurs sont interdits.
Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.*

Exercice 1

Posons

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + xz + yz + 2x + 2y - z = 0\},$$
$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4xy + 2xz + 4y - z = 0\}.$$

- (a) Montrer que M_1 et M_2 sont des sous-variétés de dimension 2 et de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{R}^3 .
- (b) Trouver les plans tangents en $(0, 0, 0)$ à M_1 et M_2 , respectivement.
- (c) Les sous-variétés M_1 et M_2 sont-elles transverses en $(0, 0, 0)$?

Exercice 2

Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe bi-régulière paramétrée par la longueur d'arc.

- (a) Montrer que l'image $\eta(\mathbb{R})$ de η est contenue dans un plan affine si et seulement si, pour tout point $t \in \mathbb{R}$, le vecteur $\eta'(t)$ est orthogonal au produit vectoriel $\eta''(t) \times \eta'''(t)$ des vecteurs $\eta''(t)$ et $\eta'''(t)$.
- (b) Pour tout point $t \in \mathbb{R}$, trouver un vecteur $a(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$v'(t) = a(t) \times v(t), \quad n'(t) = a(t) \times n(t), \quad b'(t) = a(t) \times b(t),$$

où $v(t)$, $n(t)$ et $b(t)$ sont les vecteurs du repère de Frenet de η en t .

Exercice 3

Soit $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe bi-régulière paramétrée par la longueur d'arc, et

$$r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$r(u, v) = \eta(u) + vb(u),$$

la surface des binormales de η (plus précisément, pour tout $u \in \mathbb{R}$, le vecteur $b(u)$ est le vecteur binormal de η en u).

Dans les réponses aux questions de cet exercice, on peut utiliser la courbure et la torsion de η , ainsi que les dérivées de ces deux fonctions.

- (a) Montrer que la surface r est régulière.
- (b) Trouver la première forme quadratique de r .
- (c) Trouver la deuxième forme quadratique de r .
- (d) Pour tout point $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, trouver la courbure de Gauss $K(u_0, v_0)$ de r en (u_0, v_0) .

Exercice 4

Soit $r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée définie par

$$r(u, v) = (au \sin v, au \cos v, bv),$$

où a et b sont des nombres réels strictement positifs.

- (a) Montrer que la surface r est régulière.
- (b) Trouver la courbure moyenne de la surface r .
- (c) Existe-il un point (u_0, v_0) de \mathbb{R}^2 tel que la courbure de Gauss $K(u_0, v_0)$ de la surface r en (u_0, v_0) soit strictement positive ?
- (d) Soit R un entier strictement positif. Considérons un ouvert connexe U_1 contenu dans $\mathbb{R} \times]0, \pi[$. Soit $r_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la surface paramétrée définie par

$$r_1(u_1, v_1) = (R \cos u_1 \sin v_1, R \sin u_1 \sin v_1, R \cos v_1).$$

Montrer que, pour tout ouvert connexe U de \mathbb{R}^2 , les surfaces $r|_U$ et r_1 ne sont pas isométriques.

Exercice 5

Soit U un ouvert connexe de \mathbb{R}^2 , et soit $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée régulière. Considérons un point (u_0, v_0) de U .

- (a) Soient t et s deux vecteurs appartenant à la direction du plan tangent à r en (u_0, v_0) tels que t et s soient orthogonaux et tous les deux non nuls. Montrer que la moyenne arithmétique $\frac{k(t)+k(s)}{2}$ des courbures normales $k(t)$ et $k(s)$ de r en (u_0, v_0) est égale à la courbure moyenne $H(u_0, v_0)$ de r en (u_0, v_0) .
- (b) Soit m un entier supérieur ou égal à 3. Considérons m vecteurs t_1, t_2, \dots, t_m appartenant à la direction du plan tangent à r en (u_0, v_0) tels que
 - les vecteurs t_1, t_2, \dots, t_m soient deux à deux distincts et tous non nuls,
 - pour tout entier $i = 1, 2, \dots, m - 1$, la mesure de l'angle géométrique formé par t_i et t_{i+1} soit égale à $\frac{2\pi}{m}$.
 Montrer que la moyenne arithmétique $\frac{k(t_1)+k(t_2)+\dots+k(t_m)}{m}$ des courbures normales $k(t_1), k(t_2), \dots, k(t_m)$ de r en (u_0, v_0) est égale à la courbure moyenne $H(u_0, v_0)$ de r en (u_0, v_0) .