

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Géométrie

Septembre 2007

Corrigé succinct

Exercice 1

- (a) Oui, $\overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est une réflexion vectorielle. En effet, $\overrightarrow{\varphi}$ est la multiplication par -1 , et $\overrightarrow{\psi}$ est une réflexion vectorielle. L'application $\overrightarrow{\psi} \circ \overrightarrow{\varphi}$ est une isométrie négative du plan vectoriel E , donc cette application est une réflexion vectorielle.
- (b) Non, on ne peut pas affirmer que $\psi \circ \varphi$ est une réflexion affine. Par exemple, soit \mathcal{E} l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de sa structure affine naturelle, φ la symétrie centrale de centre $(0, 0)$, et ψ la réflexion affine par rapport à la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1\}$. Dans ce cas, $\psi \circ \varphi$ est l'application $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$. Cette application n'est pas une réflexion affine (par exemple, parce qu'elle n'a pas de point fixe).

Exercice 2

- (a) Le point O est le milieu du segment $[AC]$. Donc, $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$. Par conséquent, $C = \varphi(A)$.
- (b) On a $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{C\varphi(B)}$. D'autre part, $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}$ (car φ est une symétrie centrale), et les droites AB et CD sont parallèles. Donc, le point $\varphi(B)$ appartient à la droite CD . De plus, le point $\varphi(B)$ appartient à la droite BD . Par conséquent, le point $\varphi(B)$ coïncide avec D .
- (c) On a $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$, d'où $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, c'est-à-dire, les points A, B, C et D forment un parallélogramme.

Exercice 3

- (a) Puisque G est le centre de gravité du triangle ABC , on a

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Donc

$$\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{0},$$

d'où

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2).$$

(b) On a

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 + BC^2 &= (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 2(GA^2 + GB^2 + GC^2) - 2(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) \\ &= 3(GA^2 + GB^2 + GC^2). \end{aligned}$$

(c) On a

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 \\ &= (GA^2 + GB^2 + GC^2) - 2\overrightarrow{GM} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 3MG^2 \\ &= \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2) + 3MG^2, \end{aligned}$$

d'où

$$3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{3}(AB^2 + AC^2 + BC^2).$$

Exercice 4

(a) Les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} sont non nuls et ont la même norme. Donc, il existe une unique rotation $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de centre B telle que $\varphi(A) = C$.

(b) On a

$$\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BK}.$$

Donc, les angles orientés $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BK})$ sont égaux.

(c) Puisque $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BC}$ et les vecteurs \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux, le fait que $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BK}$ implique que les vecteurs $\overrightarrow{BB_1}$ et \overrightarrow{BK} sont orthogonaux. De plus, les droites BB_1 et AM sont orthogonales. Donc, les droites AM et BK sont parallèles.

(d) Les vecteurs $\overrightarrow{AB_1}$ et $\overrightarrow{BB_1}$ sont orthogonaux. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{AB_1}) = \overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BK}$ sont orthogonaux. De plus, les droites DD_1 et AM sont orthogonales, et, d'après (c), les droites AM et BK sont parallèles. Par conséquent, les droites DD_1 et CK sont parallèles.

(e) On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. D'après (c) et (d), il existe des nombres réels λ et μ tels que $\overrightarrow{BK} = \lambda\overrightarrow{AD_1}$ et $\overrightarrow{CK} = \mu\overrightarrow{DD_1}$. On a

$$\overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{CK} = \lambda\overrightarrow{AD_1} - \mu\overrightarrow{DD_1}.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AD_1}$ et $\overrightarrow{DD_1}$ forment une famille libre, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 1$, d'où $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AD_1}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{DD_1}$. En particulier, $BK = AD_1$. De plus, $BK = BB_1$, car $\overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{BK}$. Donc, $AD_1 = BB_1$.

(f) Nous avons démontré que $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1})$. De façon similaire, on montre que $\overrightarrow{AD_2} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_2})$. Donc,

$$\overrightarrow{D_1D_2} = \overrightarrow{AD_2} - \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_2}) - \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{\varphi}(\overrightarrow{B_1B_2}),$$

ce qui implique que $B_1B_2 = D_1D_2$ et que les droites B_1B_2 et D_1D_2 sont orthogonales.