

Licence de sciences, mention Mathématiques, Année L3

Géométrie

Juin 2007

Corrigé succinct

Exercice 1

- (a) Oui, $\vec{\varphi}_2 \circ \vec{\varphi}_1$ est une rotation vectorielle. En effet, les applications linéaires $\vec{\varphi}_1$ et $\vec{\varphi}_2$ sont des rotations vectorielles du plan vectoriel E , et la composition de deux rotations vectorielles quelconques de E est une rotation vectorielle.

Par contre, l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1$ n'est pas forcément une rotation affine. Par exemple, soient O_1 et O_2 deux points distincts de \mathcal{E} , et soient φ_1 et φ_2 les symétries centrales de centres O_1 et O_2 , respectivement. Dans ce cas, l'application $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{2O_1O_2}$.

- (b) Oui, $\vec{\psi}_2 \circ \vec{\psi}_1$ est une rotation vectorielle. En effet, les applications linéaires $\vec{\psi}_1$ et $\vec{\psi}_2$ sont des réflexions vectorielles du plan vectoriel E ; la composition de deux réflexions vectorielles quelconques de E est une isométrie positive de E , c'est-à-dire, une rotation vectorielle de E .

Par contre, on ne peut pas affirmer que $\psi_2 \circ \psi_1$ est une rotation affine. Par exemple, soient \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites parallèles distinctes de \mathcal{E} , et soient ψ_1 et ψ_2 les réflexions par rapport à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , respectivement. Dans ce cas, l'application $\psi_2 \circ \psi_1$ est une translation de vecteur non nul.

Exercice 2

- (a) L'énoncé est un corollaire immédiat du théorème de Thalès.
(b) Notons O le point d'intersection des droites \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 . D'après (a), on a

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}, \quad \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}, \quad \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}}, \quad \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}}$$

d'où

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}} \cdot \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OD'}} \cdot \frac{\overline{OD'}}{\overline{OA'}} = 1.$$

Exercice 3

Soit G le barycentre du système de points pondérés $\{(A, 2), (B, 1)\}$. Pour tout point M de \mathcal{E} , on a

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 &= 2\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2(\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 \\ &= 3\overline{MG}^2 + 2\overline{MG} \cdot (2\overline{GA} + \overline{GB}) + 2\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 \\ &= 3MG^2 + \frac{2}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AB^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2. \end{aligned}$$

Donc, l'égalité

$$2MA^2 + MB^2 = k$$

est équivalente à l'égalité

$$MG^2 = \frac{1}{3}(k - \frac{2}{3}AB^2).$$

Par conséquent, l'ensemble \mathcal{K} (formé des points M de \mathcal{E} qui vérifient l'équation $2MA^2 + MB^2 = k$) est un cercle de rayon supérieur ou égal à 1 si et seulement si

$$\frac{1}{3}(k - \frac{2}{3}AB^2) \geq 1,$$

c'est-à-dire, si et seulement si

$$k \geq 3 + \frac{2}{3}AB^2.$$

Exercice 4

- (a) Les vecteurs $\overrightarrow{O_1A}$ et $\overrightarrow{O_1B}$ sont non nuls et ont la même norme. Donc, il existe une unique rotation $\varphi_1 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ de centre O_1 telle que $\varphi_1(A) = B$.
- (b) Le point O_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle AMB . Donc,

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) &= 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}), \\(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1B}) &= 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}), \\(\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1M}) &= 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}).\end{aligned}$$

De plus,

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}).$$

Par conséquent,

$$(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) = (\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1B}) = (\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1M}).$$

Puisque $(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) + (\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_1B}) + (\overrightarrow{O_1A}, \overrightarrow{O_1M})$ est l'angle nul, on obtient que $(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) + (\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) + (\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A})$ est l'angle nul.

- (c) D'après (b), la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_1B}$ et $\overrightarrow{O_1A}$ est égale à $2\pi/3$. De façon similaire, la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_2C}$, $\overrightarrow{O_2B}$ et la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_3A}$, $\overrightarrow{O_3C}$ sont toutes les deux égales à $2\pi/3$. Donc, pour démontrer l'égalité des angles orientés $(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A})$, $(\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B})$ et $(\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C})$, il est suffisant de montrer que les déterminants des deux matrices de passage

$$\begin{aligned}&\text{de la base } \overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A} \text{ à la base } \overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B}, \text{ et} \\&\text{de la base } \overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B} \text{ à la base } \overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C}\end{aligned}$$

sont positifs.

Remarquons que les déterminants des matrices de passage

de la base $\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}$ à la base $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}$,
de la base $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}$ à la base $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$,
de la base $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ à la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (d'après une des hypothèses),
de la base $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ à la base $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$,
de la base $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ à la base $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}$ (d'après une des hypothèses),
de la base $\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}$ à la base $\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB}$,
de la base $\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NB}$ à la base $\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B}$

sont positifs. Donc, le déterminant de la matrice de passage de la base $\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}$ à la base $\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B}$ est positif. De façon similaire, on montre que le déterminant de la matrice de passage de la base $\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B}$ à la base $\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C}$ est positif. Par conséquent, les angles orientés $(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A})$, $(\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B})$ et $(\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C})$ sont égaux.

(d) D'après (b) et (c), on obtient que $(\overrightarrow{O_1B}, \overrightarrow{O_1A}) + (\overrightarrow{O_2C}, \overrightarrow{O_2B}) + (\overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3C})$ est l'angle nul. Donc, l'application linéaire associée à $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est l'identité. Par conséquent, $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une translation.

(e) On a

$$(\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1)(A) = (\varphi_3 \circ \varphi_2)(B) = \varphi_3(C) = A.$$

De plus, d'après (d), l'application $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est une translation. Donc, $\varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est l'identité.

(f) Notons O l'image de O_1 par φ_2 . Puisque, d'après (e), l'application $\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ est l'identité, on obtient que $\varphi_3(O) = O_1$. On a $O_1O_2 = OO_2$ et $O_1O_3 = OO_3$. Ceci implique que la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_2O_1}$ et $\overrightarrow{O_2O_3}$ coïncide avec la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_2O_3}$ et $\overrightarrow{O_2O}$. Donc, ces deux mesures sont égales à $\pi/3$. De façon similaire, la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_3O_1}$, $\overrightarrow{O_3O_2}$ et la mesure de l'angle géométrique formé par les vecteurs $\overrightarrow{O_3O_2}$, $\overrightarrow{O_3O}$ sont égales à $\pi/3$. Par conséquent, le triangle $O_1O_2O_3$ est équilatéral et $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.